MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein** zu Leipzig. und Prof. **Adolph Mayer** zu Leipzig.

XXV. Band.

Mit einer lithographirten Tafel.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1885.

Inhalt des fünfundzwanzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Ueber die Biegung und Drillung eines unendlich dünnen elastischen Stabes mit zwei gleichen Widerständen, auf dessen freies Ende eine Kraft und ein um die Hauptaxe ungleichen Widerstandes drehendes Kräftepaar einwirkt.

Von

W. Hess in München.

(Mit einer lithographirten Tafel.)

Im XXIII. Bande dieser Annalen habe ich die Deformationsverhältnisse eines unendlich dünnen elastischen Stabes, dessen freies Ende von einem Kräftepaare angegriffen wird, untersucht im Anschlusse an die Bewegung eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt*). Im Folgenden soll nun das Gleichgewicht eines solchen Stabes behandelt werden unter der Annahme, dass ausser dem Kräftepaar noch eine Einzelkraft einwirke. Diesem Falle entspricht in der Theorie der Rotation die Drehung eines *schweren* Körpers um einen festen Punkt, welcher auf einer der drei Hauptträgheitsaxen durch den Schwerpunkt gelegen ist. Letzteres Problem ist aber vorerst analytisch in exacter Weise nur gelöst für das *Gyroscop* d. i. für einen schweren Körper, dessen Trägheitsmomente um die zwei anderen den festen Punkt nicht enthaltenden Hauptaxen einander gleich sind**). Es wird also auch zunächst nur das Gleichgewicht eines dem Gyroscop entsprechenden elastischen Stabes erörtert werden können d. i. aber eines Stabes mit *zwei gleichen Widerständen gegen Deformation.*

Um einerseits das Problem nicht zu weit auszudehnen, andererseits an eine auch synthetisch genauer behandelte Art der Bewegung anknüpfen zu können, möge angenommen werden, dass das Kräftepaar um die *Hauptaxe des ungleichen Widerstandes drehe.* Es ist dann diese Voraussetzung analog der gewöhnlichen Methode, das Gyroscop durch Drehung um seine Axe in Bewegung zu setzen, und ich kann

---

*) Ueber die Biegung und Drillung etc. Math. Ann. XXIII, p. 181—212.

**) Lottner, Reduction der Bewegung etc. Crelle's J. 50, p. 111—125.

mich auf eine frühere Arbeit, welche sich mit diesem Falle beschäftigt*), ohne Weiteres berufen.

Die Untersuchung theilt sich nun, wie in der ersten Abhandlung über den elastischen Stab, in zwei Theile. Im ersten Theile werden die Grössen der Biegung und Drillung in den einzelnen Punkten der elastischen Centrallinie untersucht und dabei die den Poinsot'schen Kegeln der Drehungsaxen entsprechenden windschiefen Flächen construirt, durch deren successives Aufbiegen die Ueberführung des geraden und ungedrillten Stabes in seine Gleichgewichtslage versinnlicht werden kann**). In der zweiten Hälfte werden sodann die Coordinaten eines Punktes der elastischen Centrallinie aufgestellt, die verschiedenen Typen der letzteren besprochen und die erhaltenen Resultate auf besondere Fälle angewandt.

Jede dieser Untersuchungen ist dabei an zwei Hauptfällen vorzunehmen: während es nämlich für den rotirenden Körper ganz gleichgiltig ist, welche unter den drei Hauptträgheitsmomenten desselben von vornherein als gleich angenommen werden, ist es hier wesentlich, ob die zwei gleichen Widerstände *beide Widerstände gegen Biegung* sind, oder ob der *eine der Widerstand gegen Drillung* ist. Die bisherigen Arbeiten über die Gleichgewichtsfigur des elastischen Stabes dürften sich, wenn auch da nicht in der angedeuteten eingehenden Weise, nur mit der ersteren Annahme eines isotropen Stabes befassen, indem gewöhnlich vorausgesetzt wird, dass der elastische Widerstand gegen Biegung der Krümmung der Gleichgewichtscurve proportional sei***). Unter dieselben sind hauptsächlich zu rechnen die Abhandlungen von Euler über den Specialfall der „elastischen Linie", die Note von Binet†), in welcher die Coordinaten eines Punktes der elastischen Raumcurve auf Quadraturen zurückgeführt sind, und die Anwendung, welche Hermite††) hiervon giebt.

---

*) W. Hess, Ueber das Gyroscop. Math. Ann. XIX, p. 121—154. (Im Folgenden mit „Gyr." bezeichnet).

**) Vgl. meine citirte erste Abhandlung über den elast. Stab.

***) Diese Voraussetzung ist z. B. bei Schell (Theorie d. Bew. u. d. Kräfte, III, § 9—20) ausschliesslich zur Anwendung gekommen. Dieselbe gilt nicht für einen beliebigen elastischen Stab, wie er in unserer früheren Untersuchung zu Grunde gelegt war, auch nicht für die Gleichheit von Biegungs- und Drillungswiderstand, indem das Moment der elastischen Kräfte $\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2}$ hiefür nicht der Biegung $\sqrt{p^2 + q^2}$ proportional ist.

†) Mémoire sur l'intégration des équations de la courbe élastique à double courbure. Comptes rendus, Bd. 18, p. 1195. Die Note von Wantzel im gleichen Bande, p. 1197, bietet gegen diese nichts wesentlich Neues, sie wählt nur andere Coordinatensysteme.

††) Sur quelques applications des fonctions elliptiques. Comptes rendus 1880, I, p. 480, 643.

Was die Resultate der Arbeit anlangt, so finden sich dieselben bei den einzelnen Paragraphen des Genaueren besprochen. Doch möge hier darauf aufmerksam gemacht werden, dass die beiden in der vorliegenden Arbeit untersuchten Formen, in welche die elastische Centrallinie unter Einwirkung von Kraft und Kräftepaar gekrümmt wird, sich von einander und von der durch bloses Kräftepaar hervorgerufenen Form ganz charakteristisch unterscheiden, wie ja auch die Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt sich wesentlich gegen die ziemlich conform verlaufende Drehung um den Schwerpunkt abhebt.

Einleitung.

Ein gerader elastischer Stab von cylindrischer Gestalt und im Vergleich zur Länge L sehr (unendlich) dünnem Querschnitte werde am einen Ende festgehalten und am andern Ende von einer Kraft und einem Kräftepaare angegriffen. Wir wählen wieder die gerade elastische Centrallinie des Stabes d. i. die Axe der Torsion zur Axe Z', die Hauptträgheitsaxen des Querschnittes eines Punktes P derselben zu Axen X', Y' des rechtwinkligen Coordinatensystems der 3 Hauptaxen. Die positive Richtung von Z' sei jene, welche vom freien Ende aus in den Stab eindringt; durch Drehung von 90^0 um $+Z'$ im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers*) werde $+X'$ nach $+Y'$ übergeführt. Vermöge der Einwirkung des Kraftsystems wird die elastische Centrallinie gebogen und gleichzeitig der Querschnitt jedes Punktes P in seiner Ebene gedreht; die nunmehrige Lage der 3 Hauptaxen ist daher zu fixiren durch die Neigungswinkel derselben gegen die Axen eines festen, congruenten Coordinatensystems XYZ, dessen eine Axe mit der Richtung der angreifenden Einzelkraft, welche für alle Querschnitte invariabel ist**), übereinstimmen möge.

Dem so bestimmten elastischen Stabe stelle man nun einen starren Körper mit einem festen Punkte O gegenüber, welcher der Einwirkung der Schwerkraft unterworfen und von einem Kräftepaare angegriffen ist. Von den 3 Hauptträgheitsaxen X', Y', Z' in O gehe eine durch den Schwerpunkt und von den Axen eines in O festen congruenten Systems X, Y, Z sei eine in der invariablen Richtung der Schwerkraft gezogen. Dann führt die Bestimmung der 9 Neigungscosinus sowohl dieser als der vorigen zwei Axensysteme nach den bekannten Untersuchungen Kirchhoff's auf genau dieselben Gleichungen, zunächst auf die Euler'schen Bewegungsgleichungen. Da die letzteren vorerst für einen Körper integrirt sind, dessen Hauptträgheitsmomente

*) In Uebereinstimmung mit den in unserer Abh. über das Gyroscop nach Poisson getroffenen Festsetzungen.

**) S. etwa Clebsch, Theorie der Elasticität. 1862. p. 209.

um die nicht durch den Schwerpunkt laufenden Axen einander gleich sind, so ist also für den elastischen Stab die Gleichheit zweier Hauptwiderstände vorauszusetzen — einmal der zwei Widerstände gegen Biegung, sodann des Widerstandes gegen Drillung und eines der Widerstände gegen Biegung.

A. Gleichheit der Widerstände gegen Biegung — isotroper Stab.

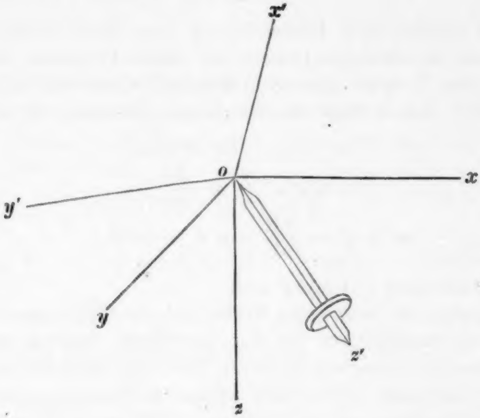
1.

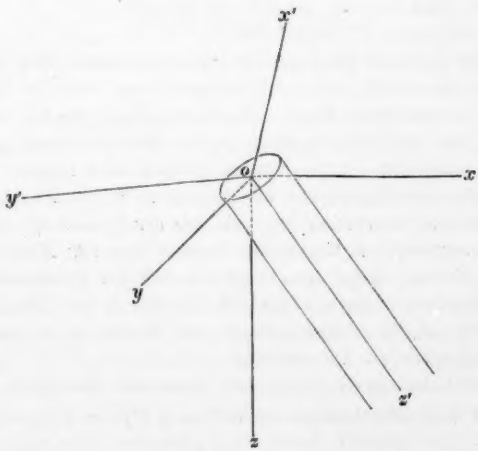
In diesem Falle ist die Hauptaxe ungleichen Widerstandes, um welche das Kräftepaar angreifen möge, die *Torsionsaxe* Z'. Dieselbe entspricht der *Figuraxe* Z' des Gyroscops; weiter entsprechen sich die Ebene des Querschnittes $X'Y'$ eines Punktes P und die Ebene des Aequators $X'Y'$ durch O. Es mögen nun, je nach dem vorliegenden Problem, bedeuten:

C das Trägheitsmoment um die Figuraxe OZ' des Gyroscops,	C der Widerstand gegen Torsion um die Torsionsaxe Z';
A das gleiche Trägheitsmoment um eine der unendlich vielen Hauptaxen des Aequators,	A der gleiche Widerstand gegen Biegung um eine der unendlich vielen Hauptaxen des Querschnitts;
M das Moment der Schwerkraft (gebildet aus dem Gewichte P des Körpers und des Abstandes γ von Unterstützungspunkt und Schwerpunkt),	M das Moment der auf das freie Ende einwirkenden Einzelkraft;
n die Grösse der um die Figuraxe anfänglich ertheilten Drehgeschwindigkeit,	n die Grösse der um die Torsionsaxe am freien Ende anfänglich ertheilten Drillung;
s die Zeit, gerechnet von $s_0 = 0$ an,	s der Bogen der el. Centrallinie, gerechnet vom freien Ende an;
ϑ der Winkel zwischen den Axen der Figur und der Schwere zur Zeit s,	ϑ der Winkel zwischen den Axen der Torsion und der Einzelkraft für die Bogenlänge s;
ϑ_0 der Winkel, unter welchem die Figuraxe des Gyroscops zu Anfang gegen die Richtung der Schwere gestellt ist,	ϑ_0 der Winkel, unter welchem die angreifende Kraft gegen die Torsionsaxe am freien Ende gerichtet ist;
σ der Winkel, welchen die im Aequator liegende Componente Θ' der instantanen Winkelgeschwindigkeit Θ mit der Hauptaxe X' bildet,	σ der Winkel, welchen die im Querschnitt liegende Componente Θ' der instantanen Krümmung (d. i. die Axe reiner Biegung) mit der Hauptaxe X' bildet.

Bezüglich der Componenten p, q, r der Winkelgeschwindigkeit resp. der Krümmung und deren Zusammensetzungen $\Theta = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$, $\Theta' = \sqrt{p^2 + q^2}$, $l = \sqrt{A^2(p^2 + q^2) + C^2 r^2}$ gilt des Näheren das bereits in unserer ersten Abhandlung über den elastischen Stab Gesagte.

Die gegenseitige Lage der beiden Systeme kann am besten aus folgender Gegenüberstellung erkannt werden:





Die Neigungscosinus ergeben sich aus folgendem Schema:

$$
\begin{array}{cccc}
 & X & Y & Z, \\
X' & a & a' & a'', \\
Y' & b & b' & b'', \\
Z' & c & c' & c''.
\end{array}
$$

Krümmung in den einzelnen Querschnitten.

2.

Mittels synthetischer Betrachtungen oder durch Combination der Euler'schen Gleichungen können für beide Probleme gleichmässig eine Reihe von Formeln gewonnen werden, welche wir in successiver Folge unserer Arbeit über das Gyroscop entlehnen. Es ist zunächst

$$r = n, \quad Cr = Cn, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{p}{q} = \frac{Ap}{Aq}, \tag{2}$$

$$p^2 + q^2 = \frac{2M}{A} (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0). \tag{3}$$

Die Gleichungen (1) sagen aus:

Das Moment der wirkenden Kräfte und die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, geschätzt um die Axe der Figur, bleiben während der ganzen Dauer der Bewegung constant*). — *Das Moment der in einem Punkte der elastischen Centrallinie wirkenden Spannung, geschätzt um die Axe der Torsion, und die Grösse der Torsion sind für alle Punkte constant; der Stab ist also gleichförmig gedrillt.*

Die Gleichungen (2) sagen aus:

In jedem Zeitmoment liegen die Axe des wirkenden Kräftepaars und die Axe der durch dieselbe hervorgerufenen Drehung mit der Axe der Figur in derselben Ebene. Und zwar liegt die Axe des Kräftepaars oder jene der Drehung näher an der Axe der Figur, je nachdem das Trägheitsmoment um die letztere grösser oder kleiner ist als dasjenige um eine der Hauptaxen des Aequators**). — *Für jeden Punkt P der elastischen Centrallinie liegt die Axe der Spannung und jene der dadurch hervorgerufenen Gesammtkrümmung mit der Axe der Torsion in derselben Ebene. Und zwar liegt die Axe der Spannung oder jene der Krümmung näher an der Axe der Torsion, je nachdem das Widerstandsmoment um die letztere grösser oder kleiner ist als dasjenige um eine der Hauptaxen des Querschnitts.*

Aus der Gleichung (3) folgt, dass die in der Ebene des Aequators auf einander liegenden Componenten $l' = A\sqrt{p^2 + q^2}$ des Kräftepaars

*) Gyr. 126.
**) Gyr. 125.

und $\Theta' = \sqrt{p^2 + q^2}$ der Drehung bis auf Constante gemessen werden durch den Cosinus des jeweiligen Neigungswinkels ϑ zwischen den Axen der Figur und der Schwere. Ganz ebenso werden die Grössen der im Querschnitte eines Punktes aufeinanderliegenden Componenten der Spannung und Krümmung, l' und Θ', gemessen durch den Cosinus des jeweiligen Neigungswinkels ϑ, welchen die Tangente der elastischen Centrallinie, d. i. ja die Axe der Torsion, mit der invariablen Richtung der Kraft bildet.

3.

Für den Winkel ϑ erhält man*)

$$\cos\vartheta - \cos\vartheta_0 = \alpha_1 \cdot \cos^2 \mathrm{am}(u + K). \tag{4}$$

Darin bedeutet u eine mit s proportionale Grösse, $u = m \cdot s$, und es ist gesetzt*)

$$m^2 = \frac{M}{A} \sqrt{(\varepsilon + \cos\vartheta_0)^2 + \sin^2\vartheta_0},$$

$$\alpha_{1(3)} = -(\varepsilon + \cos\vartheta_0) \underset{(-)}{+} \sqrt{(\varepsilon + \cos\vartheta_0)^2 + \sin^2\vartheta_0},$$

$$\varepsilon = \frac{C^2 n^2}{4AM}.$$

Die Moduln der auftretenden elliptischen Functionen sind $\varkappa, \varkappa'$, wo

$$\varkappa^2 = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon + \cos\vartheta_0}{2\sqrt{(\varepsilon + \cos\vartheta_0)^2 + \sin^2\vartheta_0}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_3},$$

$$\varkappa'^2 = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon + \cos\vartheta_0}{2\sqrt{(\varepsilon + \cos\vartheta_0)^2 + \sin^2\vartheta_0}} = \frac{-\alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3}.$$

Da $\alpha_1 > 0$, $\cos\vartheta - \cos\vartheta_0$ also positiv ist, so folgt für das Gyroscop:

In der Anfangslage liegt der Schwerpunkt desselben am höchsten; er sinkt sodann stetig, bis die Figuraxe mit der Verticalen einen Winkel ϑ_1 bildet, welcher für $u = K$, also für die Zeit $s_K = K : m$, aus $\cos\vartheta_1 = \cos\vartheta_0 + \alpha_1$ erhalten wird. Von dieser tiefsten Lage aus wieder gerade so steigend, wie er vorher gesunken, kehrt er zur höchsten, durch ϑ_0 repräsentirten Lage zurück, und nun wiederholt sich genau dasselbe Spiel des Sinkens und Steigens, da $\cos\vartheta$ mit der Periode $2K$ von μ periodisch ist. Die Figuraxe beschreibt auf diese Weise einen ausgezackten Kegel, welcher zwischen 2 Kreiskegeln $(\vartheta_0, \vartheta_1)$ um die Verticale eingeschlossen ist. 1) War der Anfangswinkel ϑ_0 spitz, der Schwerpunkt des Gyroscops also unterhalb des Unterstützungspunktes O gelegen, so bleibt demnach ϑ immer spitz. 2) Das Gleiche gilt, wenn ϑ_0 ein rechter Winkel war: Die höchste

*) Gyr. 131. 130.

Lage der Figuraxe ist eben die horizontale. 3) War hingegen ϑ_0 stumpf, d. h. der Schwerpunkt oberhalb des festen Punktes gelegen, so kann derselbe fortwährend oberhalb verweilen, oder mit seiner tiefsten Lage die Horizontalebene durch O berühren, oder auch unter die letztere heruntergehen, je nachdem die 2 Constanten ε und $\vartheta_0 = 180 - \vartheta_0'$ eine der Relationen $\varepsilon \gtreqless 1 : 2 \cos \vartheta_0'$ eingehen**).

In gleicher Weise zeigt sich für den Winkel ϑ, welchen die Torsionsaxe Z' d. i. die Tangente der elastischen Centrallinie des Stabes mit der invariablen Richtung der Einzelkraft bildet, Folgendes:

Der Winkel ist periodisch mit dem Parameterwerth $2K$ von u, also mit einem Bogenstück $s_{2K} = 2K : m$. Derselbe ist am grössten für das freie Ende des Stabes und alle um Vielfache von s_{2K} davon abstehende Punkte, nämlich ϑ_0, am kleinsten für die Mitten solcher Bogenstücke, nämlich ϑ_1 aus $\cos \vartheta_1 = \cos \vartheta_0 + \alpha_1$. 1) War ϑ_0 spitz, so bleibt ϑ fortwährend spitz: es kann also die gebogene elastische Centrallinie niemals der auf der Richtung der Kraft senkrecht stehenden invariablen Ebene parallel oder gar zugewandt erscheinen, sondern sie entfernt sich von dieser Ebene mehr und mehr, Fig. 1a. 2) War ϑ_0 recht, so kann ϑ nur wieder höchstens einem rechten Winkel gleich kommen: es ist also die elastische Centrallinie in allen Punkten, welche vom Ende um Vielfache von s_{2K} abstehen, der invariablen Ebene parallel, sie entfernt sich jedoch gleichfalls immer mehr von derselben, Fig. 1b. 3) War ϑ_0 stumpf, so kann ϑ entweder stumpf bleiben, oder in seiner extremen Lage ϑ_1 ein Rechter, oder auch spitz werden, je nachdem $\varepsilon \gtreqless 1 : 2 \cos \vartheta_0'$ ist. Die zwei ersten Vorgänge sagen für die Centrallinie ähnliches, wie die soeben besprochenen Fälle, dass ϑ_0 spitz oder recht war, nur hat man sich dieses Mal auf die andere Seite der invariablen Ebene zu begeben, Fig. 2a, 2b. Für die dritte Möglichkeit dagegen kehren sich anfangs die Tangenten der elastischen Centrallinie ab, werden dann für einen gewissen Punkt parallel zu dieser, und beginnen darüber hinaus die invariable Ebene mit ihren Richtungen zu schneiden, bis sie für s_K umkehren, zu einem rechten und von da zum Winkel ϑ_0 wieder ansteigen. Die Möglichkeit, dass die invariable Ebene, welche durch den freien Endpunkt des Stabes senkrecht der Kraftrichtung gelegt ist, von der Gleichgewichtscurve der elastischen Centrallinie geschnitten wird, ist demnach nur für diesen Fall gegeben, Fig. 3, 4, 5.

Die vorstehenden Sätze, in Verbindung mit der Thatsache, dass die Tangente der elastischen Centrallinie überall da, wo sie den Anfangswinkel ϑ_0 wieder bildet, Wendetangente ist, genügen, um sich

*) Gyr. 137.

von dem Verlaufe der Curve in den verschiedenen auftretenden Fällen fürs Erste ein annähernd deutliches Bild machen zu können. Die genauere Classification folgt § 8.

Da der Winkel ϑ für ein von 0 oder 180° verschiedenes ϑ_0 nie 0 werden kann, so folgt, dass die gebogene elastische Centrallinie im allgemeinen Falle nie der Richtung der Einzelkraft parallel werden kann.

Was den Werth von s_{2K} oder auch von s_K anlangt, so zeigte sich*):

Die Zeit, innerhalb welcher sich der Schwerpunkt des Gyroscops von seiner höchsten zur tiefsten Lage oder umgekehrt bewegt, ist um so kleiner, je grösser das Trägheitsmoment C und die anfänglich ertheilte Winkelgeschwindigkeit n um die Figuraxe d. h. je stärker das anregende Kräftepaar Cn ist, je kleiner ferner das Trägheitsmoment A um eine Axe des Aequators, je grösser das Moment $P\gamma = M$ der Schwerkraft und je kleiner der anfängliche Neigungswinkel zwischen der Figuraxe und der positiven Richtung der Schwere gewählt ist — einerlei, wie auch der Schwerpunkt anfangs gegen den Unterstützungspunkt gelegen sein möge.

Uebertragen lautet dieser Satz:

Das Curvenstück der elastischen Centrallinie, an dessen Endpunkten die Tangenten mit der invariablen Richtung der Kraft einen grössten und kleinsten Winkel (ϑ_0, ϑ_1) bilden, ist um so kürzer, je grösser der Widerstand C gegen Drillung und die anfänglich ertheilte Torsion n d. h. je stärker das anregende Kräftepaar Cn ist, je kleiner ferner der gleiche Widerstand A gegen Biegung, je stärker die wirkende Zugkraft M und je kleiner der anfängliche Winkel ϑ_0 der letzteren gegen die in den Stab eindringende Richtung der Stabaxe gewählt wird — einerlei, ob dieser Winkel spitz, recht oder stumpf ist.

4.

Aus den Gleichungen (3) und (4) ergiebt sich

$$\Theta' = \sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{\frac{2M\alpha_1}{A}} \cdot \cos \mathrm{am}(u + K). \tag{5}$$

Da für den elastischen Stab Θ' die Grösse der Biegung vorstellt, so zeigt sich also:

Die elastische Centrallinie wird unter dem Einflusse einer auf das freie Ende einwirkenden beliebig gerichteten Kraft und eines um die Stabaxe drehenden Kräftepaares in eine doppelt gekrümmte Curve gebogen, welche am freien Ende und in allen hiervon um Vielfache von

---

*) Gyr. 132. 138.

$s_{2K} = 2K : m$ abstehenden Punkten Wendepunkte besitzt. Die Biegung der Curve ist periodisch und an allen Stellen, welche von einem Wendepunkt gleichweit nach rechts oder links abliegen, gleich gross, in der Mitte eines Bogenstückes s_{2K} am grössten, nämlich

$$\Theta'_K = \sqrt{\frac{2M\alpha_1}{A}}. \tag{5a}$$

Die Grösse Θ' hat für den elastischen Stab nun noch eine weitere Bedeutung. Trägt man nämlich in jedem Punkte der noch geraden Centrallinie die daselbst zum Vorschein kommende gesammte Krümmung $\Theta = \sqrt{p^2 + q^2 + n^2}$ nach Richtung und Grösse auf, so erhält man nach Früherem*) die windschiefe Fläche und die Curve der Polodie, ganz entsprechend dem Kegel und der Curve der Polodie bei der Drehung, welche von den instantanen Drehungsaxen und ihren Endpunkten in dem ruhend gedachten Körper gebildet werden. Für das Gyroscop ist aber die Polodie eine ebene Curve, deren Ebene parallel dem Aequator und im Abstande n der constanten Geschwindigkeitscomponenten davon gelegen ist; dieselbe besteht aus unendlich vielen congruenten Blättern, welche im Mittelpunkte eines Kreises zusammenstossen und von dem Umfange des letzteren berührend eingeschlossen werden**). Der Radiusvector der Polodie ist $\varrho = \sqrt{p^2+q^2} = \Theta'$, der Polarwinkel, der in 2. erwähnte Winkel, $\sigma = -\frac{(2A-C)n}{m}\cdot u$**), der Radius des umhüllenden Kreises $\varrho_K = \Theta'_K$.

Auf den elastischen Stab übertragen ergiebt sich:

Die Curve der Polodie ist auf einem der Stabaxe parallelen Cylinder gelegen, dessen im freien Endquerschnitt gezeichnetes Profil eine Curve ist, aus unendlich vielen congruenten blattförmigen Theilen bestehend, welche mit ihren Enden im Mittelpunkte des Querschnittes berührend zusammenstossen und von einem concentrischen Kreise umhüllt werden. Der Radiusvector der Curve ist nichts anderes als die Grösse Θ' der Biegung, der Radius des einschliessenden Kreises der Betrag der Maximalbiegung Θ'_K, Fig. 7.

Die Polargleichung der Curve ist

$$\begin{aligned} \Theta' &= \sqrt{\frac{2M\alpha_1}{A}}\cdot \operatorname{cosam}(u+K), \\ \sigma &= -\frac{(2A-C)n}{m}\cdot u. \end{aligned} \tag{6}$$

Die letzte Formel zeigt, dass der Winkel zwischen der Axe reiner Biegung und der Hauptaxe X' dem Bogen s der elastischen Centrallinie proportional ist, und dass die Richtung, in welcher der Radius-

*) W. Hess, Ueber die Biegung und Drillung etc. p. 194.

**) Gyr. 140. 142.

vector Θ' die Profilcurve durchläuft, der um die Torsionsaxe anfangs erfolgenden Drehungsrichtung entgegengesetzt ist.

Aus der Veränderung von Θ'_K folgte für das Gyroscop*):

Der Radius des die Polodie umschliessenden Kreises ist um so grösser (die Blätter der Curve sind um so länger), je kleiner das die Bewegung hervorrufende Kräftepaar Cn und je grösser das Moment $M = P\gamma$ der Schwerkräfte ist — ohne Rücksicht auf die Lage des Schwerpunktes. Bewegt sich der letztere ganz oberhalb des Unterstützungspunktes, so wird der Radius grösser mit steigendem Trägheitsmoment A um eine Axe des Aequators und mit fallendem (stumpfen) Winkel ϑ_0; bewegt er sich auch unterhalb desselben, so wird derselbe grösser mit sinkendem Trägheitsmoment A und mit steigendem (spitzen oder stumpfen) Anfangswinkel ϑ_0.

Durch Uebertragung ergiebt sich für das jetzige Problem:

Der den Cylinder der Polodie umschliessende Kreiscylinder und damit die relative Stärke der Biegung der elastischen Centrallinie ist um so grösser (die Blätter der Profilcurve sind um so länger), je kleiner der Widerstand C und die anfangs ertheilte Drillung n und je grösser die wirkende Kraft M ist — ohne Rücksicht auf die Richtung der letzteren. War der Winkel ϑ_0, unter welchem die Richtung der Kraft die Axe des Stabes traf, ein stumpfer und bleibt er es fortwährend, d. h. ist $2\varepsilon\cos[180^0 - \vartheta_0] > 1$ (§ 3), so wird der Kreiscylinder oder die Biegungsstärke grösser mit zunehmendem Widerstande A gegen Biegung und mit abnehmendem Winkel ϑ_0, in allen andern Lagen mit abnehmendem Widerstande A und mit zunehmendem (spitzen oder stumpfen) Anfangswinkel ϑ_0.

Der Polarwinkel, welcher ein Blatt der Profilcurve bestimmt, ist

$$(6\text{a}) \qquad \sigma_{2K} = 2\sigma_K = -\frac{(2A-C)\,n}{m}\cdot 2K = -(2A-C)\,n\cdot s_{2K}.$$

Aus der Veränderung desselben mit derjenigen der Constanten folgt für den elastischen Stab ähnlich wie für das Gyroscop**):

Die Blätter werden um so breiter, je kleiner der Widerstand C gegen Drillung und je grösser die anfangs ertheilte Torsion n, je grösser der Widerstand A gegen Biegung, je kleiner die wirkende Kraft M und je grösser der spitz genommene Anfangswinkel ϑ_0 oder ϑ_0' zwischen Kraftrichtung und Stabaxe gewählt ist, und zwar für alle Fälle.

Es ist bemerkenswerth, dass hier, im Gegensatze zu früher, C und n ungleiches Verhalten zeigen.

Die Form der besprochenen Profilcurve ist, wie erwähnt, in den

*) Gyr. 142.

**) Gyr. 142.

Fig. 7 ungefähr dargestellt. Dieselbe schliesst sich im allgemeinen nicht; soll Schluss eintréten, so muss die Bedingung erfüllt sein:

$$-\sigma_{2K} = \frac{2A-C}{2A}\cdot\frac{K}{m} \quad \text{mit } \pi \text{ rational};$$

es kann dann die Curve ganz charakteristische Formen, wie die eines Ovals u. s. w., besitzen.

5.

Die Grössen p, q der Biegung längs der Hauptaxen X', Y' des Querschnittes sind zugleich mit den Componenten p, q der Winkelgeschwindigkeit längs der Hauptaxen X', Y' des Aequators, wenn die anregenden Kräftepaare als linksdrehend angenommen werden,

$$(7)\quad \begin{aligned} p &= \sqrt{\frac{2M\alpha_1}{A}}\cdot\cos\operatorname{am}(u+K)\cdot\cos\frac{(2A-C)n}{2Am}u,\\ q &= -\sqrt{\frac{2M\alpha_1}{A}}\cdot\cos\operatorname{am}(u+K)\cdot\sin\frac{(2A-C)n}{2Am}u. \end{aligned}$$

Dieselben sind im allgemeinen nicht periodisch mit dem Bogen $s=\frac{u}{m}$ der elastischen Centrallinie. Für $u=0,\ 2K,\ 4K,\ \ldots$ verschwinden beide. Ausserdem wird $p=0$ für alle Bogenentfernungen, welche ungeraden Vielfachen der Grösse $\frac{2A}{(2A-C)n}\cdot\frac{\pi}{2}$ gleichkommen, q für alle durch gerade Vielfache markirten Punkte; in den ersteren Punkten ist die Hauptebene $X'Z'$, in den letzteren die Hauptebene $Y'Z'$ Schmiegungsebene der elastischen Centrallinie.

Die Gleichungen der Polodie werden

$$(8)\quad \begin{aligned} x' &= p,\\ y' &= q,\\ z' &= s+n. \end{aligned}$$

Man erkennt aus ihnen, dass die Projectionscurven derselben auf die 2 Hauptebenen $X'Z'$ und $Y'Z'$ im allgemeinen unregelmässig verlaufende Curven von wellenförmiger Form sind, wie beiläufig in Fig. 8 dargestellt ist. Periodicität im Verlaufe tritt nur ein, wenn ein der elliptischen und ein der trigonometrischen Function zugehöriger Nullpunkt zusammenfällt, was wieder die Bedingung erfordert, dass der Betrag des Winkels σ_{2K} mit π rational sei. Hierfür sind aber die Componenten p und q periodisch und es ist nach dem vorhergehenden Paragraphen zugleich der Cylinder der Polodie geschlossen.

Die Fläche der Polodie wird erhalten, wenn man den Coordinaten x', y', z' einen Proportionalitätsfactor ω zufügt.

6.

Denkt man sich durch successive Deformation um die instantane Axe Θ der Krümmung die Ueberführung des geraden und ungedrillten elastischen Stabes in seine Gleichgewichtslage vom freien Ende aus vorgenommen, so werden die einzelnen Axen Θ successive in eine neue Lage übergeführt und in dieser Erzeugenden einer neuen windschiefen Fläche, der Fläche der Herpolodie, auf welcher dann die Fläche der Polodie aufgebogen erscheint. Die Leitlinie der neuen Fläche ist die gebogene elastische Centrallinie. Die Linie der Endpunkte der Axen Θ ist die Curve der Herpolodie, auf welcher die Polodie aufgebogen erscheint. Die Gleichungen ξ, η, ζ der Herpolodiecurve erfordern zu ihrer Aufstellung die Kenntniss der Coordinaten x, y, z der elastischen Centrallinie und der Neigungscosinus $a, b, c \ldots c''$ der 3 Hauptaxen des Stabes gegen die Axen des festen Coordinatensystems:

$$\xi - x = ap + bq + cn,$$
$$\eta - y = a'p + b'q + c'n,$$
$$\zeta - z = a''p + b''q + c''n.$$

Nun ist bei der Rotation der feste Kegel der Herpolodie zwischen zwei Kreiskegeln um die Verticale eingeschlossen, also sind hier die Erzeugenden der Fläche der Herpolodie denjenigen eines Kegels parallel, welcher zwischen zwei Kreiskegeln um die invariable Richtung der angreifenden Einzelkraft beschrieben gedacht wird. Für die Rotation gilt weiter*):

Zu den Zeiten 0, $s_K = \frac{K}{m}$, s_{2K}, $s_{3K} \ldots$ liegen mit der Axe der Schwere die Axen der Figur und der instantanen Drehung, somit auch (§ 2) die Axe des anregenden Kräftepaares in derselben Ebene. Dabei fallen für die Zeiten 0, s_{2K}, $s_{4K} \ldots$ din 3 letzteren Axen in eine Gerade zusammen, während für die anderen Zeiten die gegenseitige Lage dadurch charakterisirt ist, dass der Verticalen zunächst die Figuraxe liegt und die folgende Axe die Kräftepaar- oder Drehungsaxe ist (§ 2), je nachdem das Trägheitsmoment um die Figuraxe grösser oder kleiner ist als jenes um eine der Trägheitsaxen des Aequators.

Analog verzeichnen wir die Sätze:

Für alle Punkte der gebogenen elastischen Centrallinie, welche Wendepunkte sind ($s = 0$, s_{2K}, $s_{4K} \ldots$), fallen die Axe der Spannung und der dadurch hervorgerufenen Krümmung mit der Axe der Torsion zusammen; für alle dazwischen liegende Punkte grösster Biegung liegen die 3 genannten Axen mit der Richtung der angreifenden Einzelkraft in derselben Ebene, und zwar so, dass dieser invariablen Richtung zu-

*) Gyr. 148.

nächst die Axe der Torsion liegt und sodann die Axe der Spannung oder Krümmung folgt, je nachdem der Widerstand gegen Drillung grösser oder kleiner als ist als einer der Widerstände gegen Biegung.

Krümmung des ganzen Stabes.

7.

Unter den Projectionen der vermöge eines blosen Kräftepaars gebogenen Centrallinie war nach unserer früheren Untersuchung jene auf die invariable Ebene des Kräftepaares XY die einfachste. Das Gleiche findet hier statt bezüglich der invariablen Ebene XY, senkrecht der Einzelkraft Z. Es gilt für die Grösse der Biegung der genannten Projection wieder die Gleichung*)

$$\Theta^{xy} = \frac{a''p + b''q}{\sqrt{1 - c''^2}},$$

worin a'', b'', c'' die Neigungscosinus der 3 Hauptaxen des Stabes gegen die Kraftrichtung Z bezeichnen. Diese Cosinus werden im allgemeinen den Euler'schen Gleichungen zu entnehmen sein, ihre Aufstellung in Functionen von p, q, r kann jedoch hier erspart werden. Es ist nämlich für das allgemeinste Problem der Bewegung das Moment des zu irgend einer Zeit wirksamen Kräftepaars längs der invariablen Richtung der Schwerkraft constant**). Demnach ist auch *für einen unendlich dünnen elastischen Stab, dessen freies Ende von einer Kraft und einem Kräftepaare afficirt wird, das Moment des Kräftepaars längs der unveränderlichen Linie der Kraft für alle Punkte der elastischen Centrallinie eine constante Grösse.*

Hier ist das Anfangsmoment des Kräftepaares um die Torsionsaxe Cn und der anfängliche Neigungscosinus dieser Axe gegen die Linie der Kraft $\cos\vartheta_0 = c_0''$, also

$$Ap \cdot a'' + Aq \cdot b'' + Cn \cdot c'' = Cn \cdot c_0'',$$

$$a''p + b''q = -\frac{Cn}{A} \cdot (\cos\vartheta - \cos\vartheta_0).$$

Dieser Werth, oben eingesetzt, giebt

$$\Theta^{xy} = -\frac{Cn}{A} \cdot \frac{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}{\sin^2\vartheta}. \tag{9}$$

Aus dem Verhalten von ϑ mit dem Bogen s fliessen darauf bezüglich die Sätze:

Die Projection der gebogenen elastischen Centrallinie auf die normal zur Richtung der Kraft stehende invariable Ebene ist periodisch gebogen

---

*) W. Hess: Ueber die Biegung und Drillung etc. 198.

**) S. etwa: W. Hess. Ueber das Problem der Rotation. Math. Ann. XX. 463.

und besitzt wie die elastische Centrallinie selbst unendlich viele Wendepunkte. Je zwei überbenachbarte Wendepunkte begrenzen congruente, je zwei benachbarte symmetrische Stücke der Curve; die Mitte eines solchen symmetrischen Zweiges besitzt ein Maximum der Biegung und theilt den Zweig nochmals symmetrisch, Fig. 6.

Die absolute Grösse der Maximalbiegung Θ_K^{xy} wird erhalten durch Einsetzen des Winkels ϑ_1 an Stelle von ϑ. Es ist aber

$$\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0 = \alpha_1$$

und unter Bezugnahme auf den Werth von ε

$$\sin\vartheta_1 = \sqrt{2\alpha_1\varepsilon},$$

so dass nach leichter Reduction folgt

$$\text{(9a)}\qquad \Theta_K^{xy} = \frac{M}{Cn}\cdot\sqrt{\frac{2}{\alpha_1\varepsilon}},$$

eine Formel, welche auch vermittelst der Relation (8a) geschrieben werden kann

$$\text{(9b)}\qquad \Theta_K^{xy} = \frac{4M^2}{C^2n^2}\cdot\frac{1}{\Theta_K'}$$

und für die Krümmungsradien $1:\Theta_K'$ und $1:\Theta_K^{xy}$ folgende Eigenschaft ersehen lässt:

Das geometrische Mittel aus den Biegungsradien der elastischen Centrallinie und ihrer Projection auf die invariable Ebene senkrecht der Kraft ist für die Stellen grösster Biegung gleich dem anregenden Kräftepaare dividirt durch die doppelte Kraft.

Aus der im § 4 verzeichneten Veränderung von Θ_K' ersieht man, wie sich die Biegungsgrösse Θ_K^{xy} gegenüber einer Variirung der Grösse A des Biegungswiderstandes und des Anfangswinkels ϑ_0 zwischen Kraftrichtung und Stabaxe verhält — eben umgekehrt wie Θ_K'. Durch kurze Untersuchung folgt weiter, dass Θ_K^{xy} um so grösser wird, je grösser die wirkende Einzelkraft M und je grösser das anregende Kräftepaar Cn, je grösser also der Drillungswiderstand C und die anfangs erfolgende Drillung n wird.

Die Projectionen der elastischen Centrallinie auf die 2 andern festen Coordinatenebenen YZ und ZX besitzen die Biegungsgrössen

$$\Theta^{yz} = \frac{ap+bq}{\sqrt{1-c''^2}},\qquad \Theta^{zx} = \frac{a'p+b'q}{\sqrt{1-c'^2}}.$$

Diese Curven sind nicht mehr periodisch gebogen; sie besitzen, da für $u=0, 2K, 4K\ldots$ die beiden Componenten p, q verschwinden, unendlich viele Wendepunkte. Das letztere gilt auch für die Projection auf jede andere Ebene des Raumes, wie es nach dem Verlaufe der elastischen Gleichgewichtscurve ja selbstverständlich ist.

8.

Wie unter den Projectionen der elastischen Centrallinie jene auf die invariable Ebene die einfachste ist, so ist unter den 3 Coordinaten x, y, z eines Punktes derselben die Coordinate z, welche den Abstand des Stabpunktes von der invariablen Ebene angiebt, ausgezeichnet. Der Neigungscosinus der Stabtangente Z' gegen die invariable Linie Z der Kraft ist $c'' = \cos\vartheta$, also wird

$$z = \int \cos\vartheta \cdot ds = \frac{1}{m} \cdot \int [\cos\vartheta_0 + \alpha_1 \cdot \cos^2 \operatorname{am}(u+K)] \cdot du.$$

Denkt man sich den Coordinatenanfangspunkt des festen Systems XYZ in das freie Ende gelegt, so dass für $u = 0$, $x = y = z = 0$ ist, so kommt für z:

$$(10) \qquad z = \frac{\varkappa^2 \cos\vartheta_0 - \varkappa'^2 \alpha_1}{\varkappa^2} \cdot \frac{u}{m} + \frac{\alpha_1}{\varkappa^2 m} [E_{u+K} - E_K],$$

worin E die Legendre'sche Function zweiter Gattung bezeichnet. Man erkennt:

z besteht aus einem mit dem Bogen s proportionalen und einem damit periodischen Term; wächst der Bogen s um Vielfache des Stückes $s_{2K} = \frac{2K}{m}$, so wächst die Coordinate z um Vielfache des Abstandes

$$(10a) \qquad z_{2K} = \frac{\varkappa^2 \cos\vartheta_0 - \varkappa'^2 \alpha_1}{\varkappa^2} \cdot s_{2K} + \frac{\alpha_1}{\varkappa^2 m} \cdot 2E_K,$$

um welchen der erste nach dem freien Ende auftretende Wendepunkt von der invariablen Ebene entfernt ist.

Weiter ergiebt sich

$$z_{2K \pm u} = z_{2K} \pm z_u,$$

und für den ersten Punkt grösster Biegung

$$(10b) \qquad z_K = \frac{1}{2} \cdot z_{2K}.$$

Legt man daher in den Abständen $z_K, z_{2K}, \ldots$ Parallelebenen zur invariablen Ebene, so wird die Curve durch je 2 benachbarte Ebenen in symmetrische, durch je zwei überbenachbarte in congruente Theile zerlegt.

Diejenigen Punkte, denen die Abstände $z_{2K}, z_{4K}, \ldots$ zukommen, sind Wendepunkte der Raumcurve.*) *Ueber die Art und Weise des Verlaufes der letzteren entscheiden einzig und allein die zwei Grössen ε und ϑ_0 — obgleich in das Problem* 5 *Constante eingehen* —, wie ja

---

*) Dieselben sind in den Zeichnungen durch Striche markirt; alle anderen in diesen auftretenden Wendepunkte rühren von der perspectivischen Darstellung her.

auch die verschiedenen Fälle in der Bewegung des Gyroscops durch jene 2 Grössen charakterisirt waren.

Ia. *Der Winkel ϑ_0, unter welchem die Kraft gegen die Stabaxe am freien Ende gerichtet ist, sei spitz.*

Dann bildet die Curve mit der Richtung der Kraft*) stets spitze Winkel ϑ, sie steigt also von dem dieser Richtung zugekehrten (positiven) Theil der invariablen Ebene stetig, ohne derselben jemals parallel zu werden. Die Winkel für $z_0, z_{2K}, \ldots$ sind am grössten, nämlich gleich ϑ_0, jene für $z_K, z_{3K}, \ldots$ am kleinsten, nämlich ϑ_1 aus $\cos\vartheta_1 = \alpha_1 + \cos\vartheta_0$ . . Fig. 1a.

Ib. *Der Winkel ϑ_0 sei ein rechter.*

Dann ist die Curve in ihren Wendepunkten $z_0, z_{2K}, \ldots$ der invariablen Ebene parallel . . . . Fig. 1b.

IIa. *Der Winkel ϑ_0 sei stumpf,* $=180^0-\vartheta_0'$, *und* $2\varepsilon\cos\vartheta_0' > 1$.

Dann bleibt ϑ immer stumpf, die Curve steigt also von der der Kraftrichtung abgewendeten (negativen) Seite der invariablen Ebene aus stetig, ohne der letzteren jemals parallel zu werden . . . . Fig. 2a.

IIb. *Der Winkel ϑ_0 sei stumpf und* $2\varepsilon\cos\vartheta_0' = 1$.

Die Curve ist dann in den Punkten grösster Biegung, $z_K, z_{3K}, \ldots$ der invariablen Ebene parallel . . . . Fig. 2b.

III. *Der Winkel ϑ_0 sei stumpf und* $2\varepsilon\cos\vartheta_0' < 1$.

Dann wird ϑ auch spitz d. h. die Curve ist zwar anfänglich von der Kraftrichtung und der invariablen Ebene abgewendet, nähert sich jedoch später der letzteren. Es erreicht nämlich der Abstand z eines Curvenpunktes von der invariablen Ebene seine extremen Werthe, wenn $\frac{dz}{ds}$ d. i. aber $\cos\vartheta = 0$ wird. Die Parameterwerthe u_1 und $2K - u_1$, für welche dieses eintritt, finden sich aus

$$\cos^2 \operatorname{am}(u_1 + K) = \frac{\cos\vartheta_0'}{\alpha_1};$$

der erste repräsentirt ein Maximum, der zweite ein Minimum von z, und für sie wird die Curve der invariablen Ebene parallel.

Es können nun verschiedene Fälle eintreten, je nach dem Werthe der constanten Grösse

$$\Gamma = \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 2\varepsilon\cdot\cos\vartheta_0' + 1}}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 2\varepsilon\cdot\cos\vartheta_0' + 1}},$$

welche den Quotienten der beiden in z_{2K} mit s_{2K} und E_K multi-

*) Dieser ist natürlich die Centralaxe des Kräftesystems *Zugkraft M — Kräftepaar Cn* parallel.

plicirten Factoren darstellt. Es kann nämlich die elastische Centrallinie die invariable Ebene schneiden, eventuell berühren, oder auch nicht.

IIIa. $z_K > 0$, *d. h.* $E_K : K > \Gamma$.

Dann sind auch z_{2K}, z_{3K}, ... positiv. Die Curve verläuft also anfangs wohl auf der negativen, später aber durchweg auf der positiven Seite der invariablen Ebene . . . Fig. 3.

IIIb. $z_K = 0$, $E_K : K = \Gamma$.

Mit z_K sind auch z_{2K}, z_{3K}, ... gleich Null, d. h. es fallen sowohl alle Punkte grösster Biegung als auch alle Wendepunkte in die invariable Ebene. Die letzteren müssen dabei sämmtlich mit dem Anfangspunkte des freien Endes zusammenliegen, da ausserdem kein Gleichgewicht in der elastischen Centrallinie vorhanden wäre. Die Curve hat also die Gestalt eines räumlichen Achters. . . . . Fig. 4.

IIIc. $z_K < 0$, $E_K : K < \Gamma$.

In diesem Falle verläuft die elastische Centrallinie, weil auch z_{2K}, z_{3K}, ... negativ sind, der Hauptsache nach auf der negativen Seite der elastischen Centrallinie, ... Fig. 5. Doch sind hiebei immer noch drei Möglichkeiten vorhanden:

IIIc′. $z_{2K-u_1} > 0$ *d. h.* $(E_K + E_{K-u_0}) : (2K - u_0) > \Gamma$.

Dann ist der Abstand des tiefsten Punktes z_{2K-u_0} positiv d. h. die Curve verläuft eine Strecke weit auf der der Kraftrichtung zugekehrten positiven Seite der invariablen Ebene. . . . . Fig. 5a.

IIIc″. $z_{2K-u_1} = 0$, $(E_K + E_{K-u_0}) : (2K - u_0) = \Gamma$.

Dann liegt der tiefste Punkt z_{2K-u_1} in der invariablen Ebene d. h. die Curve berührt einmal die letztere. Fig. 5b.

IIIc‴. $z_{2K-u_1} < 0$, $(E_K + E_{K-u_1}) : (2K - u_0) < \Gamma$.

Dann liegt auch der tiefste Punkt z_{2K-u_1}, also die ganze Curve auf der negativen Seite der invariablen Ebene. . . . . Fig. 5c.

Diese Uebergänge sind ganz ähnlicher Art wie die der später zu behandelnden ebenen elastischen Linie (§ 12).

9.

Um zu den zwei andern Coordinaten x, y eines Punktes der elastischen Centrallinie übergehen zu können, ist es nothwendig, die Neigungscosinus c, c' zu bilden, welche die Stabtangente Z' mit den Coordinatenaxen X, Y der invariablen Ebene bildet. Auch hier zeigt es sich nun von Vortheil, statt des festen Systems X, Y ein bewegliches (X), (Y) einzuführen, welches, mit gleichförmiger Winkelge-

schwindigkeit in der Ebene rotirend, nach einer dem Bogen s der elastischen Centrallinie gleichen Zeit s einen Winkel $\Psi . s$ zurücklegt.

Es sei der Winkel der festen Axe X gegen die jeweilige Schnittlinie zwischen der Ebene des Querschnittes X' Y' und der invariablen Ebene X Y (eine Linie, welche bei dem Gyroscop die Linie der Knoten genannt wird) ψ, der Winkel zwischen der festen Axe X und der beweglichen Axe X' ψ', so wird

$$\psi = \psi' + \Psi \cdot s.$$

Dabei sind ψ, ψ' und Ψ von X aus alle in der gleichen Richtung gezählt, nämlich, wie es ähnlich bei dem Euler'schen Winkel ψ üblich ist, dem Sinne der anfänglich erfolgten Drillung n entgegengesetzt. Bezeichnet man nun die Neigungscosinus der Tangente Z' der elastischen Centrallinie gegen die rotirenden Axen (X), (Y) mit (c), (c'), so gelten für dieselben jene Ausdrücke, welche in der Lottner'schen Arbeit für c und c' sich finden*), nämlich (mit kleinen Aenderungen)

$$(11)\quad \begin{aligned} (c) &= \frac{\mathrm{H}(ia_1)\cdot \mathrm{H}_1(ia_2)}{\mathrm{H}_1(ia_1+ia_2)\cdot \mathrm{H}_1(ia_1-ia_2)} \cdot \frac{\Theta(u+ia_1)\cdot\Theta_1(u+ia_2)-\Theta(u-ia_1)\cdot\Theta_1(u-ia_2)}{\Theta_u^2}, \\ (c') &= \frac{\mathrm{H}(ia_1)\cdot \mathrm{H}_1(ia_2)}{i\cdot\mathrm{H}_1(ia_1+ia_2)\cdot \mathrm{H}_1(ia_1-ia_2)} \cdot \frac{\Theta(u+ia_1)\cdot\Theta_1(u+ia_2)+\Theta(u-ia_1)\cdot\Theta_1(u-ia_2)}{\Theta_u^2}. \end{aligned}$$

Die Constanten ia_1 und ia_2 sind dabei durch die Gleichungen gegeben

$$(12)\quad \begin{aligned} \sin^2 \operatorname{am} ia_1 &= -\frac{\alpha_1-\alpha_3}{1-\alpha_1}, \\ \sin^2 \operatorname{am} (ia_2+K) &= \frac{\alpha_1-\alpha_3}{1+\alpha_1}, \end{aligned}$$

wo α_1 und α_3 die in § 3 erwähnte Bedeutung haben.

Wie man sieht, sind die Werthe (c) und (c') mit dem Parameterwerth $2K$ von u, also mit dem Bogen $s_{2K} = \frac{2K}{m}$ periodisch. Dieselben müssen behufs späterer Integration in unendliche Reihen verwandelt werden.

Nun hat, wie bekannt, Jacobi die Ausdrücke für die Neigungscosinus γ, γ' der Hauptaxe Z' des um den Schwerpunkt rotirenden Körpers gegen die beweglichen Axen (X), (Y) der invariablen Ebene des angreifenden Kräftepaars, welche sich proportional mit

$$\frac{\Theta(u+ia_1) \mp \Theta(u-ia_1)}{\Theta(u)}$$

darstellten, in einfach unendliche Reihen entwickelt. Eine solche Entwicklung ist zwar hier nicht möglich, wohl aber können (c), (c') durch

*) a. a. O. 121.

doppelt unendliche Reihen dargestellt werden, welche wieder nach *sin* oder *cos* einer mit dem Bogen s proportionalen Grösse fortschreiten. Die Bildung derselben kann auf verschiedene Weise geschehen:

In Jacobi's Nachlasse*) finden sich die Ausdrücke für (c) und (c') ersetzt durch Summen aus drei Producten, welche ausser Constanten als Factoren je eine der elliptischen Functionen *sin am*, *cos am*, Δ *am* und je eine der von der Bewegung um den Schwerpunkt her bekannten Formen

$$\frac{\Theta(u+ia_1+ia_2) \mp \Theta(u-ia_1-ia_2)}{\Theta(u)} \text{ u. s. w.}$$

enthalten. Durch Multiplication der für solche Quotienten giltigen Reihen mit den für *sin am*, *cos am*, Δ *am* gegebenen und durch Addition der 3 Summanden erhielte man die gewünschten Reihen für (c), (c').

Wir wollen statt dessen einen andern Weg einschlagen, indem wir von folgender Zerlegung ausgehen:

$$2 \cdot \frac{\Theta(u+ia_1)\cdot\Theta_1(u+ia_2) \mp \Theta(u-ia_1)\cdot\Theta_1(u-ia_2)}{\Theta^2(u)}$$

$$= \frac{\Theta(u+ia_1)+\Theta(u-ia_1)}{\Theta(u)} \cdot \frac{\Theta_1(u+ia_2) \mp \Theta_1(u-ia_2)}{\Theta(u)}$$

$$+ \frac{\Theta(u+ia_1)-\Theta(u-ia_1)}{\Theta(u)} \cdot \frac{\Theta_1(u+ia_2) \pm \Theta_1(u-ia_2)}{\Theta(u)}$$

und die für die Factoren auf der rechten Seite bei Jacobi**) sich findenden Reihen substituiren.

Es bedeutet im Folgenden

$$v = \frac{\pi\cdot u}{2K} = \frac{\pi\cdot m}{2K}\cdot s; \quad b_1 = \frac{a_1}{2K'}; \quad b_2 = \frac{a_2}{2K'}; \quad q = e^{-\pi\cdot\frac{K'}{K}}$$

$$N = (1-q^{2\mu-2b_1})(1-q^{2\mu+2b_1})(1+q^{2\nu-2b_2})(1+q^{2\nu+2b_2}).$$

Die Constante F, mit welcher (c) und (c') multiplicirt sind, ist

$$F = \frac{\mathrm{H}_1(ia_1+ia_2)\cdot\mathrm{H}_1(ia_1-ia_2)}{8\cdot\mathrm{H}^2(ia_1)\cdot\mathrm{H}_1{}^2(ia_2)}\cdot\Theta^2(o)\cdot\Theta_1{}^2(o)\cdot\mathrm{H}_1{}^2(o)$$

oder durch Einführung der Werthe der elliptischen Transcendenten und vermöge der Gleichungen (12)

$$F = -\frac{M}{A}\cdot\frac{s_k^2}{4\pi^2}.$$

Die Ausdrücke für (c) und (c') sind dann gegeben, wie folgt:

---

*) Sur la rotation d'un corps de révolution grave etc. Jacobi's gesammelte Werke, herausgeg. v. d. preuss. Acad. d. Wissensch. Bd. II, pag. 508.

**) Sur la rotation d'un corps. ibid. zu Eingang.

$$
\begin{aligned}
F\cdot(c) = {} & \frac{q^{b_1+b_2}+q^{-b_1+b_2}}{1+q^{2b_2}}\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\frac{q^{\mu}(1-q^{2\mu})}{(1-q^{2\mu-2b_1})(1-q^{2\mu+2b_1})}\sin 2\mu v \\
& + \frac{q^{b_1+b_2}-q^{b_1-b_2}}{1-q^{2b_1}}\cdot\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\frac{q^{\nu}(1-q^{2\nu})}{(1+q^{2\nu-2b_2})(1+q^{2\nu+2b_2})}\sin 2\nu v \\
& + \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left\{(1-q^{2\mu+2\nu})(q^{b_1+b_2}+q^{-b_1-b_2})+(q^{2\nu}-q^{2\mu})(q^{b_1-b_2}+q^{-b_1+b_2})\right\} \\
& \qquad\cdot\frac{q^{\mu+\nu}\cdot\sin(2\mu+2\nu)v}{N} \\
& + \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left\{(1-q^{2\mu+2\nu})(q^{b_1-b_2}+q^{-b_1+b_2})+(q^{2\nu}-q^{2\mu})(q^{b_1+b_2}+q^{-b_1-b_2})\right\} \\
& \qquad\cdot\frac{q^{\mu+\nu}\cdot\sin(2\mu-2\nu)v}{N}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
-F\cdot(c') = {} & \frac{q^{b_1+b_2}}{(1-q^{2b_1})(1+q^{2b_2})}+\frac{q^{b_1+b_2}-q^{-b_1+b_2}}{1+q^{2b_2}}\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\frac{q^{\mu}(1+q^{2\mu})}{(1-q^{2\mu-2b_1})(1-q^{2\mu+2b_1})}\cos 2\mu v \\
& + \frac{q^{b_1+b_2}+q^{b_1-b_2}}{1-q^{2b_1}}\cdot\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\frac{q^{\nu}(1+q^{2\nu})}{(1+q^{2\nu-b_2})(1+q^{2\nu+b_2})}\cos 2\nu v \\
& + \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left\{(1+q^{2\mu+2\nu})(q^{b_1+b_2}-q^{-b_1-b_2})+(q^{2\nu}+q^{2\mu})(q^{b_1-b_2}-q^{-b_1+b_2})\right\} \\
& \qquad\cdot\frac{q^{\mu+\nu}\cdot\cos(2\mu+2\nu)v}{N} \\
& + \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left\{(1+q^{2\mu+2\nu})(q^{b_1-b_2}-q^{-b_1+b_2})+(q^{2\nu}+q^{2\mu})(q^{b_1+b_2}-q^{-b_1-b_2})\right\} \\
& \qquad\cdot\frac{q^{\mu+\nu}\cdot\cos(2\mu-2\nu)v}{N}.
\end{aligned}
$$

Durch Integration sind hieraus die Werthe

$$(x)=\int(c)\cdot ds, \qquad (y)=\int(c')\cdot ds,$$

welche die Abstände eines Punktes der Projection der elastischen Centrallinie in der invariablen Ebene von den für ein bestimmtes s verzeichneten Axen (X), (Y) angeben, ohne Weiteres zu bilden. Die wirkliche Aufstellung möge daher, um Raum zu sparen, unterbleiben.

10.

Der Winkel ψ zwischen der festen Axe X und der Schnittlinie der invariablen Ebene XY mit der Querschnittsebene $X'\,Y'$ ist für einen Punkt von der Bogenentfernung s ausgedrückt durch den Winkel

ψ' zwischen dieser Schnittlinie und der beweglichen Axe (X) einerseits und dem mit s proportionalen Winkel Ψ zwischen X und (X) andererseits. Der letztere ist*)

$$\Psi = m \cdot \left[\frac{\partial}{\partial a_1} \log \mathsf{H}(ia_1) + \frac{\partial}{\partial a_2} \log \mathsf{H}_1(ia_2)\right]. \tag{14}$$

Aus

$$\cos\psi = \cos\psi' \cdot \cos\Psi s - \sin\psi' \cdot \sin\Psi s,$$
$$\sin\psi = \sin\psi' \cdot \cos\Psi s + \cos\psi' \cdot \sin\Psi s$$

folgen aber durch Multiplication mit $\sin\vartheta$ nach den bekannten Gesetzen der Euler'schen Winkel

$$c' = (c') \cdot \cos\Psi s - (c) \cdot \sin\Psi s,$$
$$c = (c) \cdot \cos\Psi s + (c') \cdot \sin\Psi s.$$

Ersetzt man darin (c') und (c) durch ihre Reihen (13), so erhält man solche für c und c'. Es ergiebt sich, wenn man

$$\Psi \cdot s = 2e \cdot v$$

sein lässt, wodurch

$$e = \frac{\Psi \cdot K}{m \cdot \pi} \tag{15}$$

wird:

$$F \cdot c = -\frac{q^{b_1+b_2}}{(1-q^{b_1})(1+q^{b_2})} \cdot \sin 2ev$$
$$+\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\infty}\left\{\frac{1}{(q^{b_1+b_2}+q^{b_1-b_2})(1-q^{2\varrho-2b_1})} + \frac{1}{(q^{b_1+b_2}-q^{-b_1+b_2})(1-q^{2\varrho-2b_2})}\right\}$$
$$\cdot q^{\varrho} \cdot \sin(2\varrho+2e)v$$
$$+\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\infty}\left\{\frac{1}{(q^{-b_1-b_2}+q^{-b_1+b_2})(1-q^{2\varrho+2b_1})} + \frac{1}{(q^{-b_1-b_2}-q^{b_1-b_2})(1+q^{2\varrho+2b_2})}\right\}$$
$$\cdot q^{\varrho} \cdot \sin(2\varrho-2e)v$$
$$+ q^{-b_1+b_2} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{q^{\mu+\nu}}{(1-q^{2\mu-2b_1})(1+q^{2\nu-2b_2})} \cdot \sin(2\mu+2\nu+2e)v$$
$$+ q^{b_1+b_2} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{q^{\mu+\nu}}{(1-q^{2\mu+2b_1})(1+q^{2\nu+2b_2})} \cdot \sin(2\mu+2\nu-2e)v$$
$$+ q^{-b_1+b_2} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{q^{\mu+\nu}}{(1-q^{2\mu-2b_1})(1+q^{2\nu+2b_2})} \cdot \sin(2\mu-2\nu+2e)v$$
$$+ q^{b_1-b_2} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{q^{\mu+\nu}}{(1-q^{2\mu+2b_1})(1+q^{2\nu-2b_2})} \cdot \sin(2\mu-2\nu-2e)v$$

*) Lottner, a. a. O. 119.

$$-F \cdot c' = \frac{q^{b_1+b_2}}{(1-q^{2b_1})(1+q^{2b_2})} \cdot \cos 2ev$$

$$-\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\infty} \left\{ \frac{1}{(q^{b_1+b_2}+q^{b_1-b_2})(1-q^{2\varrho-2b_1})} + \frac{1}{(q^{b_1+b_2}-q^{-b_1+b_2})(1+q^{2\varrho-2b_2})} \right\}$$

$$\cdot q^{\varrho} \cdot \cos(2\varrho + 2e)v$$

$$+\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\infty} \left\{ \frac{1}{(q^{-b_1-b_2}+q^{-b_1+b_2})(1-q^{2\varrho+2b_1})} + \frac{1}{(q^{-b_1-b_2}-q^{b_1-b_2})(1+q^{2\varrho+2b_2})} \right\}$$

$$\cdot q^{\varrho} \cdot \cos(2\varrho - 2e)v$$

$$-q^{-b_1-b_2} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{q^{\mu+\nu}}{(1-q^{2\mu-2b_1})(1+q^{2\nu-2b_2})} \cdot \cos(2\mu + 2\nu + 2e)v$$

$$+q^{b_1+b_2} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{q^{\mu+\nu}}{(1-q^{2\mu+2b_1})(1+q^{2\nu+2b_2})} \cdot \cos(2\mu + 2\nu - 2e)v$$

$$-q^{-b_1+b_2} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^{\mu+\nu}}{(1-q^{2\mu-2b_1})(1+q^{2\nu+2b_2})} \cdot \cos(2\mu - 2\nu + 2e)v$$

$$+q^{b_1-b_2} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{q^{\mu+\nu}}{(1-q^{2\mu+2b_1})(1+q^{2\nu-2b_2})} \cdot \cos(2\mu - 2\nu - 2e)v.$$

Es mag als bemerkenswerth hervorgehoben werden, dass die in diesen Doppelsummen auftretenden Nenner eine weit einfachere Gestalt besitzen als der in (c) und (c') vorkommende Nenner N, eine Erscheinung, welche auch bei unserm früher behandelten Falle der Einwirkung eines blosen Kräftepaares hervortrat.

Aus den Neigungscosinus c, c' können die Coordinaten

$$x = \int c \cdot ds = \frac{2K}{m\pi} \cdot \int c \cdot dv,$$

$$y = \int c' \cdot ds = \frac{2K}{m\pi} \cdot \int c' \cdot dv$$

eines Punktes der elastischen Centrallinie bezüglich der festen Axe X, Y der invariablen Ebene ohne Mühe angeschrieben werden. Sowohl c, c' als x, y sind periodisch mit dem Bogen $s \left(= \frac{2e}{\psi} \cdot v\right)$; für das freie Ende $s = 0$ ist, wie schon früher festgelegt, $x = y = z = 0$.

Specielle Fälle.

11.

Reducirt sich das um die Axe des Gyroscops drehende Kräftepaar Cn auf 0, so geht die Bewegung des Gyroscops in diejenige des *gewöhnlichen Pendels* über, welches ohne Anfangsgeschwindigkeit aus seiner höchsten Lage ϑ_0 (spitz, recht oder stumpf) losgelassen wird.

Verschwindet ebenso das um die Torsionsaxe des elastischen Stabes drehende Paar Cn d. h. wird $n = 0$, so wird (§ 5) $q = 0$, während

$$p = \sqrt{\frac{2 M \alpha_1}{A}} \cdot \cos \operatorname{am} (\mu + K) \tag{17}$$

erhalten bleibt. Es ist also der Stab gar nicht gedrillt und nur um die parallelen Hauptaxen X' der Querschnitte, sonach in die Ebene $Y' Z'$ gebogen — die elastische Centrallinie ist in die sogenannte *elastische Linie* übergegangen. Von der letzteren können natürlich nur jene Typen erscheinen, welche dem *gewöhnlichen Pendel* entsprechen, also Curven, bei welchem nicht etwa noch ein Kräftepaar senkrecht der Hauptaxenebene $Y' Z'$ gewirkt hat.

Die Constanten des § 3 werden

$$\varepsilon = 0, \qquad \alpha_1 = 1 - \cos \vartheta_0,$$

$$m^2 = \frac{M}{A}, \qquad \varkappa^2 = \frac{\alpha_1}{2} = \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2}.$$

Die invariable Ebene senkrecht der Richtung Z der wirkenden Kraft schneidet die Hauptaxenebenen $Y' Z'$, in welcher die Richtung Z zu liegen kommt, nach der Coordinatenaxe Y.

Auf das System YZ bezogen lauten nun, da ϑ den Winkel zwischen der jeweiligen Tangente Z' der Curve und der invariablen Axe Z vorstellt, die Differentialgleichungen der elastischen Linie

$$\frac{dz}{ds} = \cos \vartheta, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin \vartheta.$$

Durch Substitution von

$$\cos \vartheta - \cos \vartheta_0 = \alpha_1 \cdot \cos^2 \operatorname{am} (\mu + K)$$

und Integration ergiebt sich, ähnlich wie im allgemeinen Falle (10)

$$Z = -\frac{\mu}{m} + \frac{2}{m} [E_{\mu+K} - E_K]. \tag{18}$$

Für die Coordinate y lässt sich schreiben

$$\frac{dy}{ds} = - \frac{d (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0)}{ds}$$

und vermöge der Werthe von $\cos \vartheta - \cos \vartheta_0$ und p

$$\frac{dy}{ds} = -\frac{A}{2M} \cdot \frac{d(p^2)}{d\vartheta}.$$

Nun hat man aber für den Contingenzwinkel $d\vartheta$ und die Krümmung p die Relation

$$\frac{d\vartheta}{ds} = p,$$

somit wird

$$\frac{dy}{ds} = -\frac{A}{M} \cdot dp$$

und

$$(19) \qquad y = -\frac{A}{M} \cdot p = -\sqrt{\frac{A}{M}} \cdot 2 \sin \frac{\vartheta_0}{2} \cdot \cos \operatorname{am} (\mu + K).$$

Diese Gleichung drückt das bekannte, von Jacob Bernoulli entdeckte Theorem aus, *dass der Abstand eines Punktes der elastischen Centrallinie von der Linie der Kraft proportional ist der Grösse der Biegung in diesem Punkte.* Man ersieht aus ihr weiter, dass die Curve die Axe Z der Kraft immer und zwar theoretisch in unendlich vielen Punkten schneidet, welche alle Wendepunkte sind und um die Bogenentfernung $s_{2K} = \frac{2K}{m}$ aus einander liegen. Für die ganze Curve ist die Linie Z Symmetrieaxe, für jedes durch zwei Wendepunkte abgegrenzte Stück ausserdem die Maximalordinate $y' = \mp \sqrt{\frac{A}{M}} \cdot 2 \sin \frac{\vartheta_0}{2}$. Die Tangenten in den letzteren sind der Axe z parallel, jene in den Wendepunkten schneiden dieselbe nach Winkeln $\pm \vartheta_0$. Je zwei überbenachbarte Wendepunkte bestimmen einen congruenten Curvenzweig, je zwei benachbarte einen symmetrischen.

Hieraus ist ersichtlich, dass der Typus unserer Curve der in den Handbüchern von Schell (Theorie d. Bew. u. d. Kräfte. 1880. II, p. 123—124. Fig. 38—43) und Thomson und Tait (Handb. der theor. Phys. 1874. I, 2. p. 136, Fig. 28—32) dargestellte ist. Die Veränderungen und Uebergänge in demselben erscheinen übrigens daselbst nicht erschöpfend behandelt und mögen daher auf Grund der exacten Formeln im nächsten Paragraphen untersucht werden.

Aus der Veränderung des symmetrischen Bogenstückes und der Maximalordinate,

$$(19\text{a}) \qquad s_K = \frac{K}{m}, \quad y' = \mp \sqrt{\frac{A}{M}} \cdot 2 \sin \frac{\vartheta_0}{2},$$

deren erstere bereits für den allgemeinen elastischen Stab besprochen wurde (§ 3), folgt:

Die Wendepunkte der elastischen Linie folgen sich um so rascher und die Curve erscheint gleichzeitig um so flacher, je stärker die wirkende Kraft M, je kleiner der Widerstand A gegen Biegung und je kleiner der Winkel ϑ_0 zwischen der Richtung der Kraft und der noch geraden elastischen Linie — gezählt gegen ihre wirkliche Länge — gewählt ist.

12.

Wir lassen nun ϑ_0 alle Werthe von 0^0 bis 180^0 durchlaufen.

I. $\vartheta_0 = 0^0$ *und* $\vartheta_0 = 180^0$. In beiden Fällen bleibt die elastische Linie gerade; im letzteren ist ihr Gleichgewicht stabil, im ersteren nur so lange als die Länge $L \leqq \pi \sqrt{\frac{A}{M}}$ *) ist. Fig. 9.

II. $\vartheta_0 < 90^0$. Die Curve bildet in allen Punkten mit der Linie der Kraft spitze Winkel: sie besitzt die Gestalt der gewöhnlichen Sinuslinie. Fig. 10.

III. $\vartheta_0 = 90^0$. Die Wendetangenten stehen auf der Linie der Kraft senkrecht. Fig. 11.

IV. $\vartheta_0 > 90^0 = 180^0 - \vartheta_0'$. Ist der Winkel ϑ_0 stumpf, so ist es nach $\cos\vartheta + \cos\vartheta_0' = \alpha_1 \cdot \cos^2 \mathrm{am}\,(\mu + K)$ auch zunächst der Winkel ϑ; derselbe nimmt ab, bis er für einen Parameterwerth u_1 einem rechten gleichkommt und darüber hinaus spitz wird. Für $\cos\vartheta = 0$ folgt aber

$$\cos^2 \mathrm{am}\,(u_1 + K) = \frac{\cos\vartheta_0'}{1 + \cos\vartheta_0'}$$

und hieraus

$$\sin^2 \mathrm{am}\,(u_1 + K) = \frac{1}{1 + \cos\vartheta_0'} = \frac{1}{2\varkappa^2},$$

$$\Delta^2 \mathrm{am}\,(u_1 + K) = \frac{1}{2}.$$

Es ist also die Abscisse z der Curve im Anfange 0; sie wird sogann negativ und erreicht, absolut genommen, für u_1 ihr Maximum

$$z_{u_1} = -\frac{u_1}{m} + \frac{2}{m}\,[E_{u_1+K} - E_K];$$

wieder kleiner werdend geht sie für einen Werth

$$u_0 = 2\,[E_{u_0+K} - E_K]$$

durch 0 hindurch, um nunmehr positiv zu werden und für $2K - u_1$ ihren positiven Maximalwerth anzunehmen. Für $u = 2K$ wird dieselbe

$$z_{2K} = 2 \cdot z_K = 2\left[-\frac{K}{m} + \frac{2E_K}{m}\right],$$

und weiter ist

$$z_{2K \mp u} = z_{2K} \mp z_u.$$

Je nachdem der Werth von z_K positiv, Null oder negativ ist, erscheinen nun drei verschiedene Typen.

---

*) Schell, a. a. O. 123.

1. $z_K > 0$, $2E_K > K$. Dann sind auch z_{2K}, z_K, ... alle positiv, die Curve erstreckt sich also nach der positiven Seite. Es kommt bei derselben nur mehr darauf an, wie die senkrechte Tangente für $2K - u_1$ und die Maximalordinate y_{3K} gegen einander liegen, ob nämlich $z_{3K} \gtreqless z_{2K-u_1}$ oder, was dasselbe, $z_K \gtreqless - z_{u_1}$ ist.
   a. $z_K > - z_{u_1}$, $2E_{u_1+K} > u_1 + K$. Die Curvenzweige schneiden sich nicht. Fig. 12.
   b. $z_K = - z_{u_1}$, $2E_{u_1+K} = u_1 + K$. Die Curvenzweige berühren sich. Fig. 13.
   c. $z_K < - z_{u_1}$, $2E_{u_1+K} < u_1 + K$. Die Curvenzweige durchsetzen sich Fig. 14. Ihre Doppelpunkte liegen immer auf den Maximalordinaten und können den Anfangspunkt der Curve immer näher und näher gebracht werden. Fallen dieselben in den letzteren, so ist
2. $z_K = 0$, $2E_K = K$. Da auch Z_{2K}, Z_{3K}, ... 0 sind, so besitzt die Curve die Gestalt eines Achters, diesen beliebig oft überdeckt angenommen. Fig. 15.

   Aus den Legendre'schen Tabellen folgt für den Winkel $\vartheta_0 = 2 \cdot \arcsin \varkappa$, welcher die Bedingung $2E_\varkappa = K$ erfüllt, mittels Interpolation in Annäherung

$$\vartheta_0 = 129^0, 3.$$

3. $z_K < 0$, $2E_K < K$. Da auch z_{2K}, z_{3K}, ... negativ sind, so erstreckt sich die elastische Linie nach der negativen Seite. Dieselbe besitzt Doppelpunkte, welche immer auf den Maximalordinaten gelegen sind und für einen Parameterwerth u' eintreten, für welchen $z_K = z_{u'}$ und daraus

$$K - u' = 2E_{K-u'} \quad \text{ist.} \qquad \text{Fig. 16.}$$

Die Schleifen können sich mehr und mehr zusammenziehen und so gegen eine Grenzlage angehen, in welcher die elastische Linie Spitzen besässe. Doch kann diese Grenzlinie niemals erreicht werden, weil darin die der Krümmung proportionale Ordinate y unendlich gross werden müsste, was auf die selbstverständlichen Specialfälle $M = 0$, $A = \infty$ hinführt.

Damit sind alle bei unserer elastischen Centrallinie auftretenden Möglichkeiten erschöpft. Von den gezeichneten Formen können übrigens *blose Stücke* auftreten, je nachdem das Verhältniss der Länge L der ganzen Linie zu derjenigen eines Curventheils s_{2K} < 1, $= 1$, > 1, $= 2$, > 2, ... ist.

13.

Unter den weiter auftretenden speciellen Fällen bietet jener, dass die Einzelkraft $M = 0$ ist, wenig Bemerkenswerthes: die elastisehe Centrallinie bleibt gerade und wird nur gleichförmig gedrillt. Der Fall, dass auch der Drillungswiderstand C gleich dem gleichen Biegungswiderstand A wird, erzeugt ferner wenig Vereinfachung gegen die Allgemeinheit. Dagegen giebt die Annahme, dass der *Drillungswiderstand C gleich ist der Summe* $2A$ *der Biegungswiderstände*, zu einigen Bemerkungen Anlass. Es werden nämlich die allgemeinen Formeln (1, 6, 7)

$$(20)\qquad r = n,\ q = 0,\ \Theta' = p = \sqrt{\frac{2M\alpha_1}{A}}\cos\operatorname{am}(u+K),\ \sigma = 0$$

und die Constante ε geht über in

$$\varepsilon = \frac{A}{M}\cdot n^2.$$

Daraus folgt:

Die Biegungscomponente längs jener Hauptaxe, welche zu Anfang mit der Stabaxe und der Richtung der Kraft in einer Ebene liegt, ist für alle Punkte der elastischen Centrallinie Null — diese Ebene ist also durchaus Schmiegungsebene der Curve. Die Biegungscomponente nach der andern Hauptbiegungsaxe ist durch den Bogen s in derselben Weise ausgedrückt wie die Biegung der elastischen Linie .

Da die Drillung n nicht verschwindet, ist übrigens die Curve keine ebene.

Nach einem im § 7 angewandten Satze war

$$a''p + b''q = -\frac{Cn}{A}\cdot(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0).$$

Diese Gleichung geht hier über in

$$(21)\qquad a'' = -\frac{An}{M}\cdot p$$

d. h. der Neigungscosinus zwischen der invariablen Richtung der Einzelkraft und der Binormale der gebogenen elastischen Centrallinie ist proportional der Biegung der Curve. In allen Punkten, in welchen die letztere Wendepunkte besitzt (s_{2K}, s_{4K}, ...), *ist also die Schmiegungsebene der Curve der Richtung der Einzelkraft parallel.*

Für das Problem des Gyroscops bedeutete das Eintreten der Bedingung $2A = C$ den Uebergang des Körpers in eine unendlich dünne Platte senkrecht der Figuraxe. Für diesen Fall ergab sich der Satz:

Der Kegel der Polodie ist in eine Ebene durch die Figuraxe, die Polodie selbst in eine dazu senkrechte Gerade übergegangen.

Analog folgt hier, aus der Gleichung der Curve der Polodie

$$x' = p, \quad y' = 0, \quad z' = s + n.$$

Die Fläche der Polodie ist in die Ebene $X'Y'$ übergegangen, die Curve der Polodie in eine wellenförmige Linie, welche nach Art der Sinuslinie die Torsionsaxe in unendlich vielen Punkten, welche zugleich Wendepunkte sind, schneidet.

Als Beispiel für den Verlauf dieser Linie kann etwa Fig. 10 dienen.

Zusammenhang zwischen den Kirchhoff'schen und den für die Coordinaten der elastischen Raumcurve direct gefundenen Bedingungsgleichungen.

14.

Wie schon eingangs erwähnt wurde, setzen alle Ueberlegungen, welche über das Gleichgewicht der elastischen Curve im Raume angestellt zu werden pflegen, voraus, dass das von der Biegung herrührende Moment der elastischen Kräfte in irgend einem Punkte der letzteren (bei uns durch $\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2}$ dargestellt) der Grösse der Biegung $(\Theta' = \sqrt{p^2 + q^2})$ darin proportional sei, eine Voraussetzung, welche einzig und allein für den *isotropen* Stab, dessen Hauptwiderstände A und B gegen Biegung einander gleich sind, Gültigkeit besitzt. Es mag nun nothwendig erscheinen, an dieser Stelle den Nachweis zu erbringen, dass die für einen Punkt der elastischen Raumcurve unter obiger Annahme nach den Principien der Statik gebildeten Gleichgewichtsbedingungen, wie sie sich bei Poisson*), Binet**), Wantzel**), Schell***) u. A. finden, mit den Formeln, welche der Kirchhoff'schen Theorie entspringen, übereinstimmen

Die letzteren lauten nämlich in der Fassung, wie sie unsere Definition der Grössen der Krümmung p, q, $r = n$ und der Neigungscosinus a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' verlangt,

$$\text{(m)} \quad \begin{cases} A\,\dfrac{dp}{ds} + (C - A)\cdot qn = -Mb'', \\[2mm] A\,\dfrac{dq}{ds} + (A - C)\cdot pn = -Ma'', \\[2mm] \qquad\qquad n = \text{const.} \end{cases}$$

Zwischen diesen Cosinus der X', Y', Z'-Axe gegen die festen Axen X; Y; Z und den Krümmungscomponenten bestehen dabei die Bedingungen

---

*) Traité de mécanique. I. No. 317 u. ff.

**) a. a. O.

***) a. a. O. p. 138.

(o) $$da'' = (b''r - c''q) \cdot ds, \quad db'' = (c''p - a''r) \cdot ds,$$
$$dc'' = (a''q - b''p) \cdot ds,$$
$$da = (br - cq) \cdot ds \quad \text{u. s. w.},$$

ausserdem für erstere noch die Relationen der orthogonalen Transformation.

Die Coordinaten x, y, z eines Punktes der elastischen Curve bezüglich des festen Systems X, Y, Z sind dargestellt durch

$$\frac{dx}{ds} = c, \quad \frac{dy}{ds} = c', \quad \frac{dz}{ds} = c''.$$

Andererseits ergiebt nun die Forderung des Gleichgewichts, dass die algebraische Summe der in einem jeden Punkte der elastischen Curve auftretenden Kräfte resp. Kraftmomente bezüglich der 3 Axen X, Y, Z Null sei. Diese letzteren sind aber: 1) Das Moment der elastischen Kräfte, proportional (A) der Biegung Θ' und gerichtet nach der Binormalen, welche mit den festen Axen die Neigungscosinus λ, μ, ν bildet. 2) Das Moment der Torsionskräfte, proportional (C) der — hier constanten — Torsion n, gerichtet nach der Tangente Z', deren Neigungscosinus c, c', c'' sind. 3) Das Moment der auf das freie Ende wirkenden äusseren Kräfte, bestehend hier aus der Kraft M und dem um die Torsionsaxe Z' drehenden Kräftepaare Cn. Die Reduction auf die Centralaxe Z des Systems lässt M nach Richtung und Grösse bestehen und multiplicirt nur Cn mit dem Neigungscosinus zwischen M und Cn d. i. mit $\cos \vartheta_0 = c_0''$.

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten daher für den Punkt x, y, z:

$$A \cdot \Theta' \cdot \lambda + Cn \cdot c - M \cdot y = 0,$$
$$A \cdot \Theta' \cdot \mu + Cn \cdot c' + M \cdot x = 0,$$
$$A \cdot \Theta' \cdot \mu + Cn \cdot c'' - Cn \cdot c_0'' = 0.$$

Es stellen aber $\Theta' \cdot \lambda$, $\Theta' \cdot \mu$, $\Theta' \cdot \nu$ die Projectionen der Biegungsgrösse Θ' auf die festen Axen X, Y, Z vor und können deshalb durch die Projectionen p, q, n von Θ' längs der Hauptaxen X', Y', Z' und durch die Neigungscosinus der letzteren Axen gegen die ersteren ausgedrückt werden, wie folgt:

$$\Theta' \cdot \lambda = ap + bq,$$
$$\Theta' \cdot \mu = a'p + b'q,$$
$$\Theta' \cdot \nu = a''p + b''q.$$

Denkt man sich diese Ausdrücke oben eingesetzt und die entstehenden Gleichungen differenzirt, die Differentialgleichungen

$$A \cdot \left[a \frac{dp}{ds} + b \frac{dq}{ds}\right] + A \cdot \left[p \frac{da}{ds} + q \frac{db}{ds}\right] + Cn \cdot \frac{dc}{ds} - M \cdot c' = 0,$$

$$A\cdot\left[a'\,\frac{dp}{ds}+b'\,\frac{dq}{ds}\right]+A\cdot\left[p\,\frac{da'}{ds}+q\,\frac{db'}{ds}\right]+Cn\cdot\frac{dc'}{ds}+M\cdot c=0,$$

$$A\cdot\left[a''\,\frac{dp}{ds}+b''\,\frac{dq}{ds}\right]+A\cdot\left[p\,\frac{da''}{ds}+q\,\frac{db''}{ds}\right]+Cn\cdot\frac{dc''}{ds}\qquad=0,$$

ferner mit a, a', a''; b, b', b'' multiplicirt und addirt, so fliessen unter Beobachtung der Relationen (o) und der Formeln der orthogonalen Transformation leicht die Gleichungen

$$A\cdot\frac{dp}{ds}-A\cdot qn+Cn\cdot q+M\cdot b''=0,$$

$$A\cdot\frac{dq}{ds}+A\cdot pn-Cn\cdot p-M\cdot a''=0.$$

Diese bilden aber im Vereine mit $n=$ const. die Kirchhoff'schen Gleichungen (m).

Hätte man die Projectionen $\Theta'\cdot\lambda$, $\Theta'\cdot\mu$, $\Theta'\cdot\nu$ der Biegung durch die Coordinaten x, y, z des Punktes der elastischen Curve ausgedrückt, so hätten die obigen Gleichgewichtsbedingungen die Form angenommen

$$y'z''-z'y''=\alpha x'+\beta y,$$
$$z'x''-x'z''=\alpha y'-\beta x,$$
$$x'y''-y'x''=\alpha z'+\gamma,$$

worin die accentuirten Grössen die Differentialquotienten von x, y, z nach dem Bogen s und α, β, γ Constante bedeuten. Es sind dies jene Gleichungen, an welche Hermite*) angeknüpft hat, um aus ihnen die Coordinaten der elastischen Gleichgewichtscurve des Raumes in einfacher Weise zu bestimmen. Seine Methode konnte übrigens im Vorausgehenden nicht befolgt werden, einmal, weil hiedurch der Zusammenhang unseres Problems mit dem der Rotation zerrissen worden wäre, dann aber auch, weil für die nachfolgende Betrachtung eines nicht mehr isotropen Stabes nur unsere Ableitung mittels unendlicher Reihen Gültigkeit besitzt.

B. Gleichheit eines Widerstandes gegen Biegung und des Widerstandes gegen Drillung.

15.

Wir untersuchen vorerst, ob diese Annahme möglich ist.

Die drei Hauptwiderstände eines Stabes gegen Deformation drücken sich im Falle symmetrischer Querschnitte X', Y' aus, wie folgt:**)

---

*) a. a. O., p. 634 u. ff.

**) Clebsch, a. a. O., p. 195 u. 196.

$$A = Eq \cdot \varkappa^2,$$
$$B = Eq \cdot \lambda^2,$$
$$C = Eq \cdot \vartheta^2.$$

Darin bedeuten E der Elasticitätsmodul, q die Grösse des Querschnittes, $\varkappa$, λ die Hauptträgheitsradien des letzteren, und ϑ den Torsionsradius. Dieser bestimmt sich aus der Gleichung*)

$$2(1+\mu) \cdot \vartheta^2 = \varkappa^2 + \lambda^2 - \frac{1}{q} \cdot \int\limits_q \left[x' \cdot \frac{\partial B_0}{\partial y'} - y' \cdot \frac{\partial B_0}{\partial x'}\right] \cdot dq.$$

In dieser bezeichnet die Constante μ das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation eines elastischen Elementarprismas $\left(0 < \mu < \frac{1}{2}\right)$ und B_0 eine der Lösung des de St-Vénant'schen Problems entspringende Function, welche im ganzen Querschnitt die Gleichung

$$\frac{\partial^2 B_0}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 B_0}{\partial y'^2} = 0$$

und in der Contour die Bedingung

$$\frac{\partial B_0}{\partial x'} \cdot \cos p + \frac{\partial B_0}{\partial y'} \cdot \sin p = x' \cdot \sin p - y' \cdot \cos p$$

erfüllen muss, unter p den Winkel der nach Aussen gerichteten Normalen mit der X'-Axe verstanden. Ist die Gleichung der Contour $f(x', y') = 0$ bekannt, so lässt sich die Function B_0 bestimmen.**)

Sollen nun die beiden Widerstände A, B gegen Biegung einander gleich sein, so hat man $\varkappa = \lambda$ zu setzen und erhält als Bedingung die Regularität der Querschnittsfigur.

Sollen dagegen der Biegungswiderstand B und der Drillungswiderstand C gleich werden, so muss $\vartheta = \lambda$ gesetzt werden, und es resultirt, sofern man wieder

$$\varkappa^2 \cdot q \text{ durch} \int y'^2 \cdot dq, \quad \vartheta^2 \cdot q = \lambda^2 \cdot q \text{ durch} \int x'^2 \cdot dq$$

ersetzt, dass folgendes Integral, ausgedehnt über den ganzen Querschnitt, verschwinden muss:

$$\int \left[y'^2 - (1-2\mu)\, x'^2 - \left(x' \frac{\partial B_0}{\partial y'} - y' \frac{\partial B_0}{\partial x'}\right)\right] \cdot dq\,.$$

Dieser Fall tritt beispielsweise immer ein, wenn die unter dem Integralzeichen vorkommende Function eine unpaare ist; er enthält

*) Clebsch, a. a. O., p. 195 u. 196.

**) Siehe z. B. Clebsch, a. a. O., p. 107 u. 108.

eine Bedingung für die Grösse μ, welche übrigens zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}$ enthalten bleiben muss.

Um zu einem concreten Falle überzugehen, sei der Querschnitt des elastischen Stabes von der Ellipse

$$\frac{x'^2}{m^2} + \frac{y'^2}{n^2} = 1$$

begrenzt. Hiefür wird*)

$$B_0 = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \cdot x'y'.$$

Das Integral in der Formel für ϑ^2 ergiebt $\frac{q}{4}(3m^2 - n^2)$ und es kommt

$$2(1 + \mu) \cdot \vartheta^2 = \varkappa^2 + \lambda^2 - \frac{1}{4}(3m^2 - n^2).$$

Setzt man in dieser Gleichung $\vartheta^2 = \lambda^2, = \frac{m^2}{5}$; $\varkappa^2 = \frac{n^2}{5}$, so erscheint als Bedingungsgleichung

$$1 + 2\mu = \frac{9n^2 - 15m^2}{4m^2}.$$

Dieselbe ist stets realisirbar, weil über m und n immer so verfügt werden kann, dass der Bruch < 2, $\mu < \frac{1}{2}$ wird.

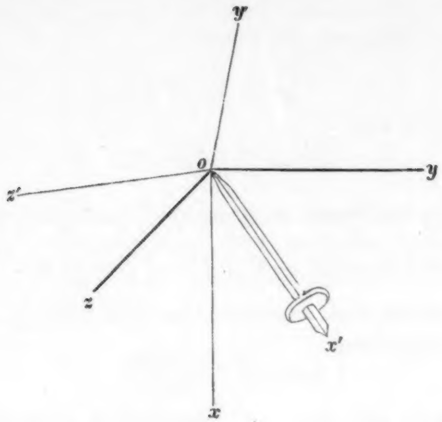
16.

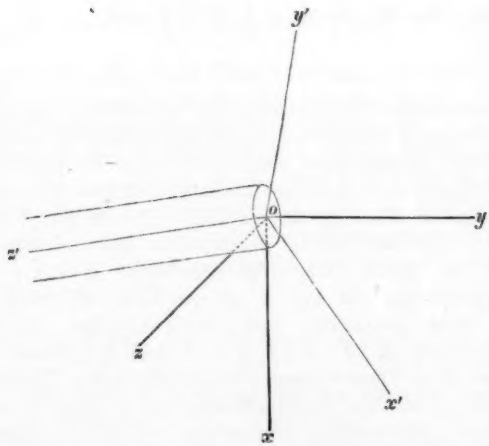
Auf den nunmehr zu besprechenden Fall des Gleichgewichtes eines elastischen Stabes, dessen Drillungswiderstand gleich einem der Biegungswiderstände ist, gelangt man, wenn man in den Kirchhoff-Euler'schen Gleichungen $B = C$ setzt. Als ausgezeichnetes Moment erscheint dann dasjenige der Biegung A, als ausgezeichnete Hauptaxe jene der Biegung X'. Für das Problem der Rotation bedeutet dieser Process: man nimmt als gleiche Hauptträgheitsmomente B und C und lässt den Schwerpunkt auf der Axe X' gelegen sein. Hiedurch wird aber gar nichts Neues geschaffen; man erhält dieselben Ausdrücke wie früher, sobald man X', Y', Z'; p, q, r; C und A cyklisch vertauscht. Wendet man diese Vertauschung auch auf die festen Coordinatenaxen X, Y, Z, sowie auf die Neigungscosinus $a, b, \ldots, c''$, sowohl hinsichtlich ihrer alphabetischen Reihenfolge als ihrer Accentuirung an, so bleibt das frühere Schema

$$\begin{array}{cccc} & Y & Z & X \\ Y' & b' & b'' & b \\ Z' & c' & c'' & c \\ X' & a' & a'' & a = \cos\vartheta, \end{array}$$

*) Clebsch, a. a. O. p. 107 u. 108.

bestehen und es kann die gegenseitige Lage der jetzigen Systeme aus folgender Gegenüberstellung abgelesen werden:





Wir erhalten durch die besprochene Vertauschung zunächst folgende Formeln:

(22) $p=n,\ Ap=An,\ \operatorname{tg}\sigma=\frac{p}{r}=\frac{Cp}{Cr},\ C(q^2+r^2)=2M\cdot(\cos\vartheta-\cos\vartheta_0)$.

Dieselben sagen aus:

Ist einer der Hauptwiderstände des elastischen Stabes gegen Biegung dem Widerstande gegen Drillung gleich, so ist die Grösse der Biegung

um die Hauptaxe des andern Biegungswiderstandes, um welche das Kräftepaar angreifend gedacht wird, constant für alle Punkte der elastischen Centrallinie.

Die Axe des die Spannung repräsentirenden Kräftepaars und die Axe der durch dasselbe hervorgerufenen Gesammtkrümmung liegen mit der ausgezeichneten Hauptaxe X' der Biegung stets in derselben Ebene, und zwar befindet sich die Axe der Spannung oder der Krümmung näher an X', je nachdem der Widerstand um diese Hauptaxe grösser oder kleiner ist als der gleiche Widerstand um die Hauptaxe der Torsion.

Für den Winkel ϑ zwischen der ausgezeichneten Hauptaxe der Biegung und der Richtung der Kraft ergiebt sich, wie früher,

$$\cos\vartheta - \cos\vartheta_0 = \alpha_1 \cdot \cos^2 \operatorname{am}(u+K), \tag{23}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} u &= m \cdot s, \\ m^2 &= \frac{M}{C} \cdot \sqrt{(\varepsilon + \cos\vartheta_0)^2 + \sin^2\vartheta_0}, \\ \alpha_1 &= -(\varepsilon + \cos\vartheta_0) + \sqrt{(\varepsilon + \cos\vartheta_0)^2 + \sin^2\vartheta_0}, \\ \varepsilon &= \frac{A^2 n^2}{4CM}. \end{aligned}$$

Für ϑ zeigt sich genau dasselbe Verhalten wie beim isotropen Stab (§ 3); insbesondere entscheiden wieder die Relationen

$$2\varepsilon \cos(180^0 - \vartheta_0) \gtreqless 1,$$

ob bei stumpfem Anfangswinkel ϑ_0 die extreme Lage ϑ_1 von ϑ stumpf, recht oder spitz ist.

Die Grössen q der Biegung und r der Drillung werden

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2M\alpha_1}{C}} \cdot \cos \operatorname{am}(u+K) \cdot \cos \frac{(2C-A)n}{2Cm} \cdot u, \\ r &= -\sqrt{\frac{2M\alpha_1}{C}} \cdot \cos \operatorname{am}(u+K) \cdot \cos \frac{(2C-A)n}{2Cm} \cdot u \end{aligned} \tag{24}$$

und es spielt der aus ihnen sich zusammensetzende Antheil $\sqrt{q^2+r^2}$ der Krümmung dieselbe Rolle, wie vorher die Biegung $\Theta' = \sqrt{p^2+q^2}$, ohne natürlich deren geometrische Bedeutung zu besitzen.

Die Biegung findet sich hier ausgedrückt durch

$$\Theta'^2 = n^2 + \frac{2M\alpha_1}{C} \cdot \cos^2 \operatorname{am}(u+K) \cdot \cos^2 \frac{(2C-A)n}{2Cm} \cdot u \tag{25}$$

d. h. *die elastische Centrallinie ist im allgemeinen nicht periodisch gebogen und kann also in congruente, in einander verschiebbare Theile nicht zerschnitten werden.*

Periodicität tritt ein, wenn $\frac{2Cm}{(2C-A)nK}$ mit π rational ist.

Solange das drehende Kräftepaar nicht verschwindet, ist n von 0 verschieden und kann Θ' nie 0 werden. Daraus folgt:

Die unter der Einwirkung einer Einzelkraft und eines um die Hauptaxe X' des ungleichen Biegungswiderstandes gebogene elastische Centrallinie besitzt keine Wendepunkte. Die Biegung wird am kleinsten, nämlich gleich der im freien Ende hervorgerufenen (n), *für alle Punkte, deren Bogenentfernungen von diesem Ende gerade Vielfache der Grösse* $\frac{K}{m}$ *oder ungerade Vielfache der Grösse* $\frac{C}{(2C-A)n}\cdot\pi$ sind.

Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden kleinsten Werthen wird die Biegung natürlich ein Maximum. Die Drillung der Curve ist im allgemeinen nicht periodisch. Periodicität tritt aber wieder ein, wenn $\frac{2Cm}{(2C-A)nK}$ mit π rational ist. Aus dem Nullwerden von r folgt:

In allen Punkten der elastischen Centrallinie, welche vom freien Ende um gerade Vielfache der Bogenstücke $\frac{K}{m}$ *oder* $\frac{C}{(2C-A)n}\cdot\pi$ *entfernt sind, haben die Querschnitte keine Drehung in ihrer Ebene erfahren.*

Die Gestalt der Curve ersieht man aus Fig. 17.

Für die Polodie ergeben sich die Gleichungen

$$x' = n, \quad y' = q, \quad z' - s = r.$$

Die erste derselben sagt:

Die Polodie ist eine ebene Curve, deren Ebene — die Fläche der Polodie — auf der Hauptaxe X' des ungleichen Biegungswiderstandes senkrecht steht. Ihre Projectionen auf die Hauptebenen $X'\,Y'$, $X'\,Z'$ sind somit Stücke von geraden Linien, ihre Projection auf die Hauptebene $Y'\,Z'$ ist eine transcendente Curve.

Für die Biegung der Projection der elastischen Centrallinie auf die invariable Ebene senkrecht der Einzelkraft ergiebt sich ein Ausdruck, welcher auch nur dann wieder mit dem Bogen s der Curve periodisch ist, wenn die schon einigemale erwähnte Rationalität mit π stattfindet.

Die Neigungscosinus der Tangente Z' der elastischen Centrallinie gegen die festen Coordinatenaxen X, Y, Z, von uns wieder mit c, c', c'' bezeichnet, sind zu erhalten aus jenen, welche in der Lottner'schen Arbeit unter b'', b, b' dargestellt sind. Bestimmen wir nämlich, wie früher, die Neigungscosinus der Tangente Z' vorerst gegen ein mit gleichförmiger Geschwindigkeit in unserer invariablen Ebene rotirendes Coordinatensystem (Y), (Z) und nennen dieselben (c'), (c''), so brauchen die Ausdrücke für die letzteren unter entsprechender Aenderung der Constanten nur den in der Lottner'schen Untersuchung auftretenden Formeln für b, b' gleichgesetzt zu werden.

Dieselben unterscheiden sich von dem im ersten Hauptabschnitte aufgestellten Cosinus (c), (c') einfach dadurch, dass in sie statt der

Grössen $\Theta(u \pm ia)$ und $\Theta_1(u \pm ia)$ die Grössen $\mathrm{H}(u \pm ia)$ und $\mathrm{H}_1(u \pm ia)$ eingehen. Durch eine der früheren analoge Umformung erhält man wieder für die jetzigen Neigungscosinus (c'), (c'') gegen das bewegliche System (Y), (Z), sowie für diejenigen c', c'' gegen die festen Axen Y, Z doppelt unendliche Reihen, ebenso durch Integration für die Coordinaten (y), (z) und y, z. Die Grösse $x = \int c \cdot ds$ oder nach Lottner $\int b'' \cdot ds$ des Abstandes eines Punktes der elastischen Centrallinie von der invariablen Ebene YZ senkrecht der Kraftrichtung X ergiebt sich hier nicht, wie das frühere Z, in geschlossener Form.

An Specialfällen kann man hier verzeichnen:

1. Wird die *wirkende Kraft gleich Null*, $M = 0$, so tritt Kreisbiegung um die Axe X' ein.

2. *Verschwindet das wirkende Kräftepaar* d. h. ist $n = 0$, so wird auch die Drillung $r = 0$ und die Biegung $q = \sqrt{\frac{2M\alpha_1}{C}} \cdot \cos \operatorname{am}(u + K)$. Wir haben wieder den Fall der elastischen Linie.

3. Ist der *ungleiche Widerstand gegen Biegung so gross wie die Summe der zwei andern gleichen Widerstände*, $A = 2C$, so wird

$$(26)\qquad \begin{aligned} &p = n, \quad r = 0, \quad q = \sqrt{\frac{2M\alpha_1}{C}} \cdot \cos \operatorname{am}(u + K), \\ &\Theta' = \sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{n^2 + \frac{2M\alpha_1}{C} \cdot \cos^2 \operatorname{am}(u + K)}. \end{aligned}$$

D. h.

Ist der eine Widerstand eines elastischen Stabes gegen Biegung gleich dem Widerstande gegen Drillung und gleich der Hälfte des andern Widerstandes gegen Biegung, so wird die elastische Centrallinie unter dem Einflusse einer auf das freie Ende wirkenden Kraft und einem um die Hauptaxe des letztgenannten Widerstandes drehenden Kräftepaare in eine periodisch gekrümmte Curve umgebogen. Dieselbe besitzt niemals Wendepunkte und eine Drillung des elastischen Stabes um sie ist nicht vorhanden. Fig. 18.

Die Biegung ist am kleinsten am freien Ende und in allen davon um Vielfache von $s_{2K} = \frac{2K}{m}$ abstehenden Punkten, nämlich n, am grössten für alle dazwischen liegenden Punkte $s_K, s_{3K}, \ldots$, nämlich

$$\Theta'_K = \sqrt{n^2 + \frac{2M\alpha_1}{C}}.$$

Dieser Werth, d. i., die relative Stärke der Biegung wird um so grösser, je grösser die wirkende Kraft und je kleiner der Widerstand des Stabes gegen Deformation ist. Dieselbe steigt mit wachsendem Anfangswinkel ϑ_0 zwischen der Kraftrichtung und der charakteristischen Biegungsaxe, sobald ϑ_0 stumpf war und stumpf bleiben muss ($2\varepsilon \cos \vartheta_0' > 1$), ferner

mit wachsender Anfangsbiegung n, sobald $3(\varepsilon + \cos \vartheta_0)^2 > \sin^2 \vartheta_0$ ist — ausserdem fällt Θ'_K mit der Zunahme dieser Grössen.

Für die ohnedies ebene Curve der Polodie ergeben sich die Gleichungen

(27) $$x' = n,\ y' = q = \sqrt{\frac{2M\alpha_1}{C}} \cdot \cos \operatorname{am}(u+K),\ z' = s = \frac{u}{m}\cdot$$

Dieselbe ist darnach eine der Sinuslinie oder auch der elastischen Linie ähnliche Curve; sie besitzt sogar eine erheblich einfachere Gleichung wie die letztere (Vgl. die Analogie mit § 13). Die Biegung der Projection der diesmaligen elastischen Centrallinie auf die invariable Ebene senkrecht der Kraftrichtung X ist wieder periodisch. Dieselbe kann Wendepunkte besitzen oder nicht; es entscheidet darüber wieder die eine oder andere von zwei Ungleichungen zwischen den bekannten Grössen ε und ϑ_0.

München, im April 1884.

Ueber Polygone, welche einem Gebilde zweiten Grades umschrieben sind.

Von

A. Voss in Dresden.

Poncelet giebt in seinem Traité des propriétés projectives, Tom I, p. 78, den folgenden Satz:

„Un polygone, plane ou gauche, ayant tous ses côtés tangents à une même ligne ou à une même surface du second ordre, il existe à partir du chaque point de contact deux segments sur le côté correspondant; et le produit de tous les segments non contigus ou qui n'ont point d'extremités connexes est egal au produit de tous les autres.“

Nach der von Poncelet befolgten auf dem Carnot'schen Satze beruhenden Methode kann man indessen nur schliessen, dass das eine Product dem anderen seinem absoluten Werthe nach gleich sei. Von Plücker wird gelegentlich die Bemerkung gemacht*), dass für ein einem Kegelschnitte umschriebenes Dreiseit die beiden Producte auch dem Zeichen nach gleich seien und hieraus folgt dann unmittelbar, dass dies bei einem Kegelschnitt für jedes Polygon der Fall sein muss**). Neuerdings machte Herr Bruno***) in einer synthetischen Untersuchung darauf aufmerksam, dass das a. a. O. angeführte aus dem obigen Satze abgeleitete und auch schon von Brianchon ausgesprochene Corollar†): „Dans tout quadrilatère gauche circonscrit à une surface du second ordre les quatre points de contact sont dans un même plan“, nicht allgemein richtig sei, dass vielmehr der Ort der Berührungspunkte der vierten Seiten eines Vierseits, von dem die Berührpunkte der drei ersten Seiten gegeben sind, aus vier reellen Kegelschnitten besteht, von denen nur einer mit dem Poncelet'schen zusammenfällt.

---

*) Plücker, System der anal. Geometrie, S. 44.

**) Vgl. S. 46 unten.

***) Giuseppe Bruno, Sui quadrilateri sghembi, circonscritti ad una quadrica. Atti di Torino.

†) Poncelet, a. a. O., p. 78.

Im Folgenden stelle ich mir nun die Frage, unter welchen Umständen überhaupt n beliebig auf einer Fläche zweiten Grades gegebene Punkte Berührungspunkte der Seiten eines geschlossenen Polygons werden können; naturgemäss erweitert sich dieselbe zu einer Untersuchung über quadratische Mannigfaltigkeiten F von $m-2$ Dimensionen überhaupt, welche in § III vollständig durchgeführt ist, und eine Vergleichung der scheinbar ganz heterogenen Verhältnisse in der Ebene, dem Punkt und Linienraum etc. gestattet. Dabei zeigt sich, dass die Bestimmung solcher Polygone, deren Seiten nicht Erzeugende von F sind, immer mittelst *linearer* Gleichungen erfolgt, während die aus Erzeugenden gebildeten von den Wurzeln einer reciproken Gleichung abhängen. Bei der Discussion der letzteren treten *zwei schiefe Invarianten der Punktgruppe* auf; für eine projectiv allgemeine Fläche zweiten Grades z. B. existiren bei ungeradem n stets zwei solche Polygone, bei geradem n aber nur dann, wenn eine dieser Invarianten verschwindet, dann aber gleich einfach unendlich viele. In den § V, VI habe ich noch gezeigt, welch einfache analytische Lösung die specielle Frage für eine Fläche zweiten Grades mit Hülfe der Liniengeometrie findet, während die Behandlung in Punktcoordinaten, wie es scheint, ein näheres Eingehen auf die Determinantentheorie erfordert.

I.

Vorbemerkungen.

Auf einer Fläche zweiten Grades seien $n+1$ Punkte $A_1, A_2 \dots A_n$ A_{n+1} gegeben, in denen Tangenten $A_1, A_2 \dots A_n, A_{n+1}$ gezogen werden. Verlangt man, dass bei einer irgendwie festgesetzten Ordnung der Punkte*) — und eine solche soll im folgenden immer vorausgesetzt werden — je zwei auf einander folgende Tangenten sich schneiden, so entsteht ein der Fläche umschriebenes Polygon.

Die Construction desselben verläuft sehr einfach. Denn die Ecken $z^1, z^2 \dots z^n, z^{n+1}$ des Polygons liegen auf den Seiten des zu dem Polygon $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ polarconjugirten Polygons. Man hat daher von A_1 nach der auf der Polare von $A_1 A_2$ liegenden Ecke z^1 eine Gerade zu ziehen, von z^1 nach A_2 bis zum Schnitt z^2 mit der Polare von $A_2 A_3$ und so fort, wobei es von der Wahl der ersten Geraden $A_1 z^1$ abhängen wird, ob das Polygon sich schliesst.

Wie man sieht, ist die Aufgabe, ein geschlossenes Polygon zu construiren, nur ein specieller Fall der folgenden: Gegeben sind n Punkte, jedem sei eine durch ihn gehende Ebene zugeordnet. Man

*) Die Anzahl dieser Ordnungen beträgt, wie man sieht, $\frac{1}{2}\,n!$

soll ein geschlossenes Polygon construiren, von dem jede Seite durch einen der Punkte geht und gleichzeitig in der zugehörigen Ebene liegt. Aus den Fundamentalsätzen der projectiven Geometrie ergiebt sich unmittelbar die allgemeine Möglichkeit von zwei Polygonen, deren Construction schliesslich von der der Doppelelemente zweier projectiver Punktreihen abhängt, also die Lösung einer quadratischen Gleichung erfordert. Mit dieser allgemeinen Erkenntniss ist indess, wie überhaupt, so insbesondere für das vorliegende Problem wenig gewonnen, da die näheren Umstände der Construction sich keineswegs übersehen lassen.

Anstatt die $n+1$ Punkte A als gegeben anzusehen, mag es sich auch empfehlen, zu n gegebenen Punkten den Ort eines $n+1^{\text{ten}}$ Punktes, welcher Berührungspunkt der Schlussseite des Polygons werden soll, zu suchen; im allgemeinen mögen im folgenden beide Gesichtspunkte festgehalten werden.

Zunächst bemerke man: Ist n eine ungerade Zahl, so ziehe man durch A_1 die Erzeugende der Fläche erster Art, sie heisse e_1; durch A_2 dann die Erzeugende e_2 zweiter Art. Indem man in dieser Abwechselung fortfährt, geht durch den Punkt A_n die Erzeugende *erster* Art e_n und man kann dann e_1 und e_n jedesmal durch eine Erzeugende *zweiter* Art, welche durch den willkürlichen Punkt A_{n+1} geht, verbinden. Daraus folgt:

Durch $n+1=2m$ beliebig auf einer projectiv allgemeinen Fläche zweiten Grades gegebene Punkte lassen sich bei festgesetzter Reihenfolge immer *zwei* von Erzeugenden gebildete, also entweder reelle oder imaginäre, geschlossene Polygone hindurchlegen.

Vorausgesetzt mag im folgenden immer werden, dass keine zwei der auf einander folgenden Punkte A auf derselben Erzeugenden sich befinden. Die Modificationen, welche unter diesen Umständen eintreten, sind übrigens leicht zu übersehen, bieten jedoch kein besonderes Interesse dar.

Ist dagegen n eine gerade Zahl, so wird die Erzeugende e_1 unter allen Umständen bei Anwendung der obigen Construction mit e_n von entgegengesetzter Art sein; *das Polygon kann sich daher nicht schliessen.* Setzt man aber die Construction in der angegebenen Weise auch vom $n+1^{\text{ten}}$ Punkte über $A_1 A_2 \ldots$ wieder von neuem fort, so ergiebt sich:

Durch $n+1=2m+1$ beliebig auf der Fläche gegebene Punkte lässt sich stets ein *einziges* aus $2(n+1)$ Erzeugenden gebildetes geschlossenes Polygon hindurchlegen, bei welchem durch jeden dieser Punkte zwei Seiten desselben hindurchgehen.

Polygone, deren Seiten aus Erzeugenden gebildet sind, mögen *uneigentliche* heissen, diejenigen, deren Seiten die Fläche in den Punkten A nur berühren, *eigentliche.* Man hat dann weiter:

Existirt bei $n+1=2m$ ein eigentliches Polygon, so muss es eine ∞^1 Schaar solcher geben.

Denn man denke sich von A_1 nach der Polare von $A_1 A_2$ die beiden Erzeugenden e_1 und ε_1 und die Seite t_1 des eigentlichen Polygons gezogen. Wählt man nun eine beliebige andere von A_1 nach jener Polare gezogene Gerade als Seite τ_1, so muss bei fortgesetzter Construction auch diese zu einem eigentlichen Polygon führen. Denn das Doppelverhältniss der Geraden e_1, ε_1, t_1, τ_1 bleibt ungeändert für alle weiteren Eckpunkte, und hierdurch ist der soeben angeführte Satz bedingt.

Endlich bemerke man: *Lässt sich durch $n+1$ Punkte überhaupt ein eigentliches Polygon legen, so existirt auch stets ein diesem „conjugirtes" eigentliches Polygon, welches zu denselben Punkten gehört.* Man erhält dasselbe, wenn man die conjugirten Polaren der Seiten des ersteren in Bezug auf die Fläche sucht, bei welchem Processe die Tangenten in *conjugirte* Tangenten, sich schneidende Gerade aber wieder in solche, die sich schneiden, übergeführt werden.

II.

Polygone erster und zweiter Art.

Bei der analytischen Behandlung der Frage möge zunächst eine Erweiterung eintreten. In einer projectiven Mannigfaltigkeit, deren Dimension $m-1$ vorläufig unbestimmt gelassen sei, werde eine Mannigfaltigkeit zweiten Grades F durch die quadratische Gleichung

$$F = (a_x)^2 = 0, \tag{1}$$

zwischen den projectiven Coordinaten $x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_m$ ausgeschieden, auf welcher sich die n Punkte A_k mit den Coordinaten x_i^k befinden, so dass

$$(a_{x^k})^2 = 0 \quad \text{für} \quad k = 1, 2 \ldots n.$$

Dabei mag es gestattet sein, von Tangenten, insbesondere von Erzeugenden der F, sowie von eigentlichen und uneigentlichen Polygonen, welche der F umschrieben sind, in dem vorhin erläuterten Sinne zu sprechen. Bezeichnet man nun die Coordinaten der Ecke z^1 durch z_i, durch die Grössen $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$ noch unbestimmte Parameter, so hat man

$$\begin{array}{llllll}
\text{für} & \text{die} & \text{Ecke} & z^1 & \text{die Coordinaten} & z_i, \\
\text{„} & \text{„} & \text{„} & z^2 & \text{„} & z_i + \lambda_2 x_i^2, \\
\text{„} & \text{„} & \text{„} & z^3 & \text{„} & z_i + \lambda_2 x_i^2 + \lambda_3 x_i^3, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\text{„} & \text{„} & \text{„} & z^n & \text{„} & z_i + \lambda_2 x_i^2 + \cdots \lambda_n x_i^n, \\
\text{„} & \text{„} & \text{„} & z^{n+1} & \text{„} & z_i - \lambda_1 x_i^1.
\end{array}$$

Die Ecken z^{n+1} und z^n sind dabei zunächst willkürlich auf den Tangenten in den Punkten A_1 und A_n gewählt. Alsdann sind

(2) $$\sigma\zeta_i = \varrho z_i^{n+1} + z_i^n$$

die Coordinaten eines willkürlichen Punktes einer Geraden, welche die beiden von A_1 und A_n auslaufenden Tangenten schneidet. Die Bedingung, dass jede der Ecken $z^1, z^2 \ldots z^{n-1}$ bezüglich auf der Polare der Geraden A_1A_2, $A_2A_3, \ldots A_{n-1}A_n$, in Bezug auf die Gleichung (1) liegt, und der Punkt z^n in der Tangentenebene von A_n sich befinde, drückt sich aus durch die Gleichungen:

(3) $$\begin{aligned}
&(01) = 0,\\
&(02) = 0,\\
&(03) + \lambda_2(23) = 0,\\
&(04) + \lambda_2(24) + \lambda_3(34) = 0,\\
&\;\vdots \qquad\quad \vdots\\
&(0n) + \lambda_2(2n) + \cdots + \lambda_{n-1}(n-1\,n) = 0,
\end{aligned}$$

in denen zur Abkürzung

$$(kl) = (lk) = a_{x^l}\, a_{x^k}; \quad k, l = 1, 2 \ldots n,$$
$$(0l) = a_z{}'\, a_{x^l},$$

gesetzt ist, so dass

$$(kk) = 0, \quad k = 1, 2 \ldots n$$

ist, weil die Punkte A auf der F vorausgesetzt werden. Damit nun die Gerade (2) Tangente von F im Punkte A_{n+1} mit den Coordinaten x_i^{n+1} sei, muss die Gleichung

$$(a\zeta)^2 = 0$$

eine Doppelwurzel ϱ haben. Mit Hülfe der Relationen (3) erhält aber diese Bedingung, in welche aus (2) der Werth von ζ einzutragen ist, die Form:

(4) $$(a_z)^2\,(1+\varrho)^2 - 2\varrho \sum_{k,l} \lambda_l \lambda_k (lk) = 0,$$
$$k, l = 1, 2 \ldots n.$$

Es muss daher entweder sein

(5a) $$\sum_{k,l} \lambda_l \lambda_k (kl) = 0,$$

und die zugehörigen Werthe der Coordinaten des Berührpunktes A_{n+1} ergeben sich durch die m Gleichungen:

(6a) $$\sigma x_i^{n+1} = \sum_k \lambda_k x_i^k,$$

da in diesem Falle die Gleichung (4) die Doppelwurzel $\varrho = -1$ hat. Oder es ist

(5b) $$\sum_{k,l} \lambda_l \lambda_k (lk) = 2(a_s)^2$$

mit der Doppelwurzel $\varrho = +1$, und die zugehörigen Werthe der x_i^{n+1} sind gegeben durch:

(6b) $$\sigma' x_i^{n+1} = 2z_i - \lambda_1 x_i^1 + \lambda_2 x_i^2 + \cdots + \lambda_n x_i^n.$$

In den Formeln (6a), (6b) können sich indessen die Proportionalitätsfactoren σ, σ' auch gleich Null ergeben; man erhält dann keine Bestimmung der Coordinaten von A_{n+1}. Die Bedeutung dieses speciellen Falles wird sich weiterhin ergeben.

Den beiden verschiedenen rationalen Doppelwurzeln $\varrho = \mp 1$ der Gleichung (4) entsprechend sind zwei verschiedene Arten von Polygonen zu unterscheiden, welche im Folgenden als *Polygone erster und zweiter Art* bezeichnet werden sollen. Diese sind stets eigentlich, so lange (a_z^2) von Null verschieden vorausgesetzt wird, d. h. die erste Ecke z^1 nicht auf F gewählt wird. Um dieselben auch geometrisch zu charakterisiren durchschneide man das Polygon mit einer beliebigen Ebene $\mathsf{E}_z = 0$. Dann entstehen auf jeder Seite vier Punkte, zwei Ecken z^k, z^{k+1}, der Berührungspunkt A^{k+1} und der betreffende Schnittpunkt S_{k+1} mit der Ebene $\mathsf{E}_z = 0$, welche ein Doppelverhältniss

$$D_{k+1} = (z_k z_{k+1} A_{k+1} S_{k+1})$$

haben. Nun gilt der Satz:

Das Product der Doppelverhältnisse D auf den $n+1$ Seiten ist bei den Polygonen erster Art gleich $+1$, bei denen zweiter Art gleich -1.

Sind nämlich z_i^k, z_i^{k+1} die Coordinaten zweier auf einander folgenden Ecken, x_i^{k+1} die des Berührpunktes A_{k+1}, so ist

$$z_i^{k+1} - z_i^k = \lambda_k x_i^{k+1},$$

und der Punkt S_{k+1} hat die Coordinaten

$$z_i^{k+1} - \mu z_i^k,$$

wo der sich hieraus ergebende Werth von μ

$$\mu = \frac{\mathsf{E}_{z^{k+1}}}{\mathsf{E}_{z^k}}$$

zugleich das Doppelverhältniss D_{k+1} darstellt. Die Gleichungen:

$$D_1 = \frac{\mathsf{E}_{z^1}}{\mathsf{E}_{z^{n+1}}},$$

$$D_2 = \frac{\mathsf{E}_{z^2}}{\mathsf{E}_{z^1}}, \ldots$$

$$D_n = \frac{\mathsf{E}_{,n}}{\mathsf{E}_{,n-1}},$$

$$D_{n+1} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\mathsf{E}_{,n+1}}{\mathsf{E}_{,n}}$$

geben mit einander multiplicirt:

$$D_1 D_2 \ldots D_{n+1} = -\frac{1}{\varrho}.$$

Nimmt man die Ebene E als unendlich ferne an, so ist das Abstandsverhältniss je zweier Ecken des Polygons gegen dieselbe bekanntlich gleich -1 zu setzen. Die Doppelverhältnisse verwandeln sich dann in die mit -1 multiplicirten Abstandsverhältnisse des auf einer Polygonseite liegenden Berührpunktes gegen die beiden auf dieser befindlichen Ecken (wobei dasselbe positiv zu nehmen ist, wenn der Berührpunkt sich *zwischen* den Ecken befindet) und somit hat man den Satz:

Für die Polygone erster Art ist das Product jener Abstandsverhältnisse gleich $(-1)^{n+1}$, *für die der zweiten Art dagegen* $(-1)^n$.

Es fragt sich nun: Ist bei beliebig festgesetzter Reihenfolge der Punkte $A_1 \ldots A_n$ der $n+1^{\text{te}}$ Punkt willkürlich wählbar, wenn ein Polygon der bezeichneten Art entstehen soll. Da die beiden Bedingungen (5a) und (5b), wovon man sich leicht überzeugt, nur ausdrücken, dass der Punkt A_{n+1} *auf* F liegen muss, so kann man bei gegebenem A_{n+1} von denselben ganz absehen und hat es dann nur mit den Gleichungen (3) und den m Gleichungen (6a) oder (6b) zu thun. Sowie man nun den Punkt z^1 auf der Polare von $A_1 A_2$ annimmt, sind durch (3) die $\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_{n-1}$ bestimmt. In den Gleichungen (6) bleiben daher noch willkürlich λ_1, λ_n und die den beiden ersten Gleichungen (3)

$$(01) = 0, \quad (02) = 0$$

unterworfenen Coordinaten z_i, d. h. im ganzen m Parameter. Daraus scheint hervorzugehen, dass, wofern nicht besondere Lagen der $n+1$ Punkte vorausgesetzt werden, immer zwei Polygone verschiedener Art sich bestimmen lassen. Dass dies nicht allgemein richtig ist, geht schon aus den früheren Bemerkungen hervor und ist insbesondere für $m = 3$ unmittelbar ersichtlich. Jedenfalls aber besteht der Satz:

Die Construction der eigentlichen Polygone ist, falls sie überhaupt erfolgen kann, nur von linearen Gleichungen abhängig.

Ich verfolge zunächst die einfachsten Fälle, um sodann unter III. die Aufklärung des soeben erwähnten Paradoxons analytisch zu geben. Betrachtet man einen *Kegelschnitt*, so ist bei beliebiger Annahme der $n+1$ Punkte immer nur *ein* Polygon möglich. Ueberhaupt gilt der Satz:

Bei geradem n ist nur ein Polygon zweiter, bei ungeradem n nur ein Polygon erster Art um einen Kegelschnitt construirbar.

Denn es sei für die Punkte $A_1, A_2 \ldots A_{n+1}$ auf dem Kegelschnitt ein Polygon erster Art möglich, also:

$$\sigma x_i^{n+1} = \lambda_1 x_i^1 + \cdots + \lambda_n x_i^n.$$

Nimmt man nun einen Punkt A_{n+2} hinzu, während die ersten $n+1$ ungeändert bleiben, so ändern sich weder z^1 noch $\lambda_2 \ldots \lambda_n$, während an Stelle von λ_1 etwa λ_1' tritt. Wäre nun wieder ein Polygon erster Art möglich, so hat man:

$$\sigma' x_i^{n+2} = \lambda_1' x_i^1 + \cdots + \lambda_n x_i^n + \lambda_{n+1} x_i^{n+1}.$$

Damit wird denn

$$\sigma' x_i^{n+2} = x_i^1 (\lambda_1' - \lambda_1) + (\sigma + \lambda_{n+1}) x_i^{n+1};$$

d. h. es müsste A_{n+2} mit A_1 und A_{n+1} auf einer geraden sich befinden. Ebenso können nicht beide Polygone zweiter Art sein. Sie sind daher stets ungleicher Art. Nun ist aber für $n = 2$ offenbar nur ein Polygon zweiter Art vorhanden, da sonst A_1, A_2, A_3 sich in gerader Linie befinden müssten. Es folgt hieraus:

Bei einem um einen Kegelschnitt beschriebenen Polygon ist stets das Product der Abstandsverhältnisse der Berührpunkte der Seiten gegen die Ecken gleich $+1$.

Es ist übrigens leicht, diesen Satz auch ganz direct analytisch zu beweisen. Man durchschneide das System der Tangenten eines Kegelschnittes $f = 0$ mit den Berührungspunkten A_k durch eine willkürliche Gerade $a_x = 0$. Die Tangente in A_k sei von derselben im Punkte B_k mit den Coordinaten c_1, c_2, c_3 getroffen, dann sind die Coordinaten der Ecken z^{k-1} und z^k von der Form

$$x_i^{k-1} + \lambda c_i, \quad x_i^k + \mu c_i$$

und das Doppelverhältniss ist

$$D_k = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Bestimmt man λ und μ, so erhält man unmittelbar, wenn zur Abkürzung

$$\sum_i x_i^k \frac{\partial f}{\partial x_i^{k-1}} = (k, k-1) = (k-1, k)$$

gesetzt wird:

$$D_k = \frac{(k, k-1) \sum_i c_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i^{k+1}}}{(k, k+1) \sum_i c_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i^{k-1}}}.$$

Man hat ferner aus den Gleichungen

$$\sum c_i a_i = 0,$$
$$\sum c_i \frac{\partial f}{\partial x_i^k} = 0,$$
$$\sum c_i \frac{\partial f}{\partial x_i^{k+1}} = x,$$
$$\sum c_i \frac{\partial f}{\partial x_i^{k-1}} = y$$

durch Elimination der c

$$0 = y \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1^k} & \frac{\partial f}{\partial x_2^k} & \frac{\partial f}{\partial x_3^k} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1^{k+1}} & \frac{\partial f}{\partial x_2^{k+1}} & \frac{\partial f}{\partial x_3^{k+1}} \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1^k} & \frac{\partial f}{\partial x_2^k} & \frac{\partial f}{\partial x_3^k} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1^{k-1}} & \frac{\partial f}{\partial x_2^{k-1}} & \frac{\partial f}{\partial x_3^{k-1}} \end{vmatrix};$$

also in leicht verständlicher Abkürzung

$$D_k = \frac{(k, k-1)}{(k, k+1)} \frac{(a, k, k+1)}{(a, k, k-1)},$$

woraus

$$D_1 D_2 \cdots D_n = (-1)^n,$$

und hieraus folgt das zu erweisende, da nach dem Carnot'schen Satz das Product der Abstandsverhältnisse der Ecken irgend eines Polygons gegen eine Gerade gleich $(-1)^n$ ist.

Es werde jetzt eine *Fläche zweiten Grades* betrachtet. Für $n = 2$ ist offenbar ein Polygon zweiter Art möglich, da sonst wieder drei Punkte der Fläche in gerader Linie sich befinden müssten (das duale Polygon besteht aus 3 durch einen Punkt gehenden Geraden); bei $n = 3$ ergiebt sich aus dem folgenden, dass eigentliche Polygone nur vorhanden sind, wenn die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 eine weitere Relation befriedigen. Bei $n = 4$ kann man jedoch stets ein Polygon erster Art construiren. Denn aus den Gleichungen (6a)

$$(7) \quad \begin{aligned} x_1^5 &= \lambda_1 x_1^1 + \lambda_2 x_1^2 + \lambda_3 x_1^3 + \lambda_4 x_1^4, \\ x_2^5 &= \lambda_1 x_2^1 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_2^3 + \lambda_4 x_2^4, \\ x_3^5 &= \lambda_1 x_3^1 + \lambda_2 x_3^2 + \lambda_3 x_3^3 + \lambda_4 x_3^4, \\ x_4^5 &= \lambda_1 x_4^1 + \lambda_2 x_4^2 + \lambda_3 x_4^3 + \lambda_4 x_4^4, \end{aligned}$$

kann man, so lange die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 nicht in einer Ebene liegen, also die Determinante D derselben nicht verschwindet, die Werthe der λ bestimmen und aus den Gleichungen (3)

$$(8) \quad \begin{aligned} &(01) = 0, \\ &(02) = 0, \\ &(03) + \lambda_2(23) = 0, \\ &(04) + \lambda_2(24) + \lambda_3(34) = 0 \end{aligned}$$

kann man dann eindeutig die Coordinaten des Punktes z^1 bestimmen, falls nicht die Determinante Δ der Fläche verschwindet. Denn die Determinante des Coefficienten in den Ausdrücken (01), (02), (03), (04) ist gleich ΔD. Eine geometrische Construction ergiebt sich hieraus in folgender Weise.

Man bestimme die Ebene $\alpha_x = 0$, welche durch die Punkte A_1, A_4, A_5 geht. Dann ist nach (7)

$$\lambda_2 \alpha_x^2 + \lambda_3 \alpha_x^3 = 0.$$

Sucht man andererseits den Schnitt der Geraden $A_2 A_3$ mit jener Ebene, so ist der Schnittpunkt P mit den Coordinaten $x_i^2 + \mu x_i^3$ bestimmt durch

$$\alpha_x^2 + \mu \alpha_x^3 = 0,$$

so dass $\mu = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}$ ist. Nun betrachte man die lineare Gleichung für z^1, welche aus den beiden letzten Gleichungen (8) resultirt, nämlich:

$$(03)\,[(24) + \mu(34)] - (04)\,(23) = 0.$$

Diese Ebene geht durch die Polare von $A_3 A_4$ und enthält ausserdem den Punkt P, wie man unmittelbar erkennt. Daraus ergiebt sich folgende Construction für z^1: *Die Ebene $A_1 A_4 A_5$ schneidet die Gerade $A_2 A_3$ in P, die gesuchte Ecke z^1 ist der Schnitt der Polare von $A_1 A_2$ mit der Ebene, welche durch P und die Polare von $A_3 A_4$ geht.* Durch analoge Construction lässt sich natürlich jede Ecke des umschriebenen Polygons erster Art finden. Das conjugirte Polygon ist selbstverständlich *zweiter Art* und kann ebenfalls linear construirt werden; am einfachsten erhält man dasselbe, wenn man zu z^1 auf der Polare von $A_1 A_2$ den in Bezug auf die Fläche conjugirten Punkt sucht und diesen als erste Ecke benutzt. Liegen die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 in einer Ebene, so tritt der Fall ein, dass der Factor σ verschwindet. Es lassen sich dann, wie im folgenden Paragraphen gezeigt wird, unendlich viele Polygone construiren, welche diese vier Punkte zu Berührpunkten ihrer Seiten haben, d. h. die Ecke z^1 kann für diese auf der Polare von $A_1 A_2$ ganz willkürlich gewählt werden. Man wähle nun als Punkt z^1 denjenigen, in dem diese Polare von der Tangentenebene in A_5 getroffen wird; es entsteht dann ein singuläres Polygon, bei welchem von z^1 aus drei Seiten ausgehen. Oder man nehme für z^1 den Punkt, in welchem die Ebene $A_1 A_2 A_5$ jene Polare trifft; es entsteht das polar conjugirte Polygon.

III.

Die beiden schiefen Invarianten J_1, J_2 der Punktgruppe $A_1 A_2 \ldots A_n$.

Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen denke man sich die Werthe der z_i aus den m Gleichungen:

$$(1)\qquad z_i + \lambda_2 x_i^2 + \cdots + \lambda_n x_i^n = -\varrho(z_i - \lambda_1 x_i^1),$$
$$i = 1, 2 \ldots m,$$

welche ausdrücken, dass das zu den Berührpunkten

$$A_1 A_2 \ldots A_n$$

mit den Coordinaten x gehörige Polygon sich schliesst, in die n Bedingungen II, (3), oder

$$(2)\qquad \begin{aligned} &(01) = 0, \\ &(02) = 0, \\ &(03) + \lambda_2(23) = 0, \\ &\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &(0n) + \lambda_2(2n) + \cdots + \lambda_{n-1}(n\; n-1) = 0 \end{aligned}$$

eingesetzt. Es ergiebt sich so das System der n Gleichungen

$$(3)\qquad \begin{array}{rcccl} * & + \lambda_2(12) & + \cdots + & \lambda_n(1n) & = 0, \\ -\varrho\lambda_1(21) & + \quad * & + \cdots + & \lambda_n(2n) & = 0, \\ -\varrho\lambda_1(31) & - \varrho\lambda_2(32) & + \cdots + & \lambda_n(3n) & = 0, \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & , \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & , \\ -\varrho\lambda_1(n1) & - \varrho\lambda_2(n2) & + \cdots & * & = 0. \end{array}$$

Die aus (3) sich ergebende Gleichung, in welcher σ an Stelle von $-\varrho$ gesetzt ist,

$$(4)\qquad \Omega = \begin{vmatrix} 0 & (12) & \cdots & (1n) \\ \sigma(12) & 0 & \cdots & (2n) \\ \sigma(13) & \sigma(23) & \cdots & (3n) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \sigma(n1) & \sigma(n2) & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

mit deren Hülfe die Werthe der λ und damit aus (1) die der z_i sich finden lassen, hat die für die Frage bedeutungslose Wurzel $\sigma = 0$. Denn für diese sind nach (3) sämmtliche λ auch gleich Null, mithin müssten nach (1) sämmtliche z_i verschwinden. Man sieht ferner, dass $\Omega = 0$ jedesmal die Wurzel $\frac{1}{\sigma}$ hat, wenn σ eine solche ist. Das heisst: *Die von ± 1 verschiedenen Wurzeln von* (4) *sind paarweise reciprok.*

Bildet man ferner aus (1) die Relation:

$$(a_{z+\lambda_2 x^2+\cdots+\lambda_n x^n})^2 = \sigma^2 (a_{z-\lambda_1 x^1})^2,$$

so entsteht, da nach (2) gefunden wird

$$\lambda_3(03) + \cdots + \lambda_n(0n) + \sum_{i,k} \lambda_i \lambda_k (ik) = 0,$$

$$i, k = 2, 3 \cdots n,$$

(5) $$(a_z)^2 (1 - \sigma^2) = 0.$$

Für die von ± 1 *verschiedenen Wurzeln der Gleichung* (4) *ist also*

$$(a_z)^2 = 0;$$

sie führen stets zu uneigentlichen Polygonen, deren sämmtliche Seiten Erzeugende der quadratischen Mannigfaltigkeit sind.

Es seien ferner z_i^h, z_i^k zwei Systeme der z_i, welche zu den Wurzeln σ^h, σ^k von (4) gehören. Die zugehörigen Werthe der λ seien durch

$$\lambda_{1h}, \lambda_{2h} \cdots \lambda_{nh}$$

$$\lambda_{1k}, \lambda_{2k} \cdots \lambda_{nk}$$

bezeichnet. Die Relation

$$(a_{z^h+\lambda_{2h}x^2+\cdots+\lambda_{nh}x^n})(a_{z^k+\lambda_{2k}x^2+\cdots+\lambda_{nk}x^n}) = \sigma_k \sigma_h (a_{z^h})(a_{z^k})$$

giebt, wie man leicht mit Hülfe von (2) beim Ausmultipliciren findet

(6) $$(a_{z^h} a_{z^k}) (1 - \sigma_k \sigma_h) = 0.$$

Für irgend zwei reciproke Wurzeln verschwindet der zweite Factor, d. h. es ist zwischen den zugehörigen Ecken z_i^h, z_i^k (und in gleicher Weise für alle Paare correspondirender Ecken dieser Polygone) keine weitere Beziehung vorhanden. Für je zu zwei nicht reciproken Wurzeln gehörige, zu denen hier auch die eventuell vorhandenen ± 1 zu rechnen sind, findet dagegen die Gleichung

$$(a_{z^h} a_{z^k}) = 0$$

statt, *d. h. je zwei solcher Ecken sind conjugirt oder in Involution in Bezug auf F.*

Die Wurzel $\sigma = -1$ kann nur vorhanden sein, wenn die *schiefe Determinante*

(7) $$J_2 = \begin{vmatrix} 0 & (12) & \cdots & (1n) \\ -(12) & 0 & \cdots & (2n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -(1n) & -(2n) & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

verschwindet. Bei *ungeradem* n ist dies bekanntlich immer der Fall, *es existirt dann also stets ein eigentliches Polygon zweiter Art.*

Zu einer Discussion für den Fall, wo $\sigma = +1$ als Wurzel auftritt, ist indessen die Gleichung (4) nicht unbedingt geeignet. Man bilde daher direct die gleich Null zu setzende Determinante der in λ und z linearen Gleichungen (1) und (2).

Es sei zunächst $m > n$. Die eben genannte Determinante K,

$$(8) \qquad \frac{K}{-\sigma} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_x{}^1 a_1 & \cdots & a_x{}^1 a_m \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_x{}^2 a_1 & \cdots & a_x{}^2 a_m \\ 0 & (23) & \cdots & 0 & a_x{}^3 a_1 & \cdots & a_x{}^3 a_m \\ . & . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ 0 & (2n) & \cdots & 0 & a_x{}^n a_1 & \cdots & a_x{}^n a_1 \\ x_1{}^1 & x_1{}^2 & \cdots & x_1{}^n & 1-\sigma & \cdots & 0 \\ x_2{}^1 & x_2{}^2 & \cdots & x_2{}^n & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ x_m^1 & x_m^2 & \cdots & x_m^n & 0 & \cdots & 1-\sigma \end{vmatrix},$$

welche abgesehen von dem Factor $-\sigma$ eine Gleichung $m-2$ Grades in $1-\sigma$ vorstellt, forme man dadurch um, dass man die letzten m Verticalreihen, mit den $x_1^k, x_2^k \cdots x_m^k$, $k = 1, 2 \cdots n$ und mit $\frac{1}{1-\sigma}$ multiplicirt und summirt, von den ersten n Verticalreihen abzieht. Es entsteht dann

$$\frac{K}{-\sigma} = (-1)^m (\sigma - 1)^{m-n} \begin{vmatrix} 0 & (12) & \cdots & (1n) \\ (12) & 0 & \cdots & (2n) \\ (13) & \sigma(23) & \cdots & (3n) \\ . & . & \cdots & . \\ (1n) & \sigma(2n) & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

d. h. die Wurzel $\sigma = 1$ ist $m-n$-fach vorhanden. Hätte man K vor dieser Transformation noch p-fach mit beliebigen Grössenreihen horizontal und vertical gerändert, so würde noch immer rechter Hand der Factor $(\sigma-1)^{m-n-p}$ auftreten; d. h. es verschwinden für $\sigma = +1$ nebst K die ersten, zweiten und $m-n-1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten. Eine weitere Betrachtung zeigt, dass auch noch alle die $m-n^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten verschwinden, welche sich auf eine Ränderung beziehen, die sich nur auf die ersten n Horizontalreihen und Verticalreihen erstreckt. Dieser $m-n$-fachen Wurzel entspricht also das System

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0,$$

während die z aus den Gleichungen (3)

$$(01) = 0, \quad (02) = 0, \cdots, (0n) = 0$$

zu entnehmen sind, und eine $m - n - 1$-fache lineare Mannigfaltigkeit bilden. Wie man sieht, entstehen dabei nur singuläre Polygone, deren sämmtliche Ecken z^1 jedesmal in eine einzige zusammenfallen.

Die Wurzel $\sigma = 1$ wird in höherem Grade auftreten, wenn die symmetrische Determinante

$$(9) \qquad J_n = \begin{vmatrix} 0 & (12) & \cdots & (1n) \\ (21) & 0 & \cdots & (2n) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (n1) & (n2) & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

verschwindet. Damit ist dann aber zunächst kein weiteres Verschwinden von Unterdeterminanten verbunden. Versieht man nämlich von vornherein K mit m Rändern, so zeigt sich bei ähnlicher Behandlung wie vorhin, dass erst dann alle $m - n^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten verschwinden, wenn alle n-reihigen Determinanten aus dem System

$$\begin{Vmatrix} a_{x^1} a_1 & \cdots & a_{x^1} a_m \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{x^n} a_1 & \cdots & a_{x^n} a_m \end{Vmatrix}$$

verschwinden, und dann treten auch eigentliche nicht singuläre Polygone auf.

Es sei nun zweitens $n \geqq m$. Die Wurzel $\sigma = 1$ ist im allgemeinen nicht mehr vorhanden, und man hat die Determinante K folgendermassen zu behandeln. Um die letzten m Verticalreihen zu vereinfachen, gebe man K in verticalem Sinne einen Rand, gebildet aus dem Systeme

$$\left.\begin{matrix} x_1^1 & \cdots & x_m^1 \\ x_1^2 & \cdots & x_m^2 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1^n & \cdots & x_m^n \end{matrix}\right\} n,$$
$$\left.\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}\right\} m,$$
$$\left.\begin{matrix} -1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & -1 \end{matrix}\right\} m,$$

während die fehlenden Elemente in den m Horizontalreihen durch Nullen zu ersetzen sind. Subtrahirt man nun die mit dem $a_k\, a_i$, d. h. den *Coefficienten* a_{ik} *der quadratischen Form*, multiplicirten m letzten Verticalreihen von den vorhergehenden m, so entsteht

$$
(10)\quad K = (-1)^{m+1} \begin{vmatrix}
0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & x_1^1 & \cdot\cdot & x_m^1 \\
0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & x_1^2 & \cdot\cdot & x_m^2 \\
0 & (2\,3) & \cdot & 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & x_1^3 & \cdot\cdot & x_m^3 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\
0 & (2\,n) & \cdot & 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & x_1^n & \cdot\cdot & x_m^n \\
\sigma x_1^1 & x_1^2 & \cdot & x_1^n & 1-\sigma & \cdot\cdot & 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\
\sigma x_m^1 & x_m^2 & \cdot & x_m^n & 0 & \cdot\cdot & 1-\sigma & 0 & \cdot\cdot & 0 \\
0 & 0 & \cdot & 0 & a_{11} & \cdot\cdot & a_{1m} & -1 & \cdot\cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\
0 & 0 & \cdot & \cdot & a_{m1} & \cdot\cdot & a_{mm} & 0 & \cdot\cdot & -1
\end{vmatrix}.
$$

Nun addire man die mit den $\delta_{ik}(\sigma - 1)$ multiplicirten letzten m Horizontalreihen, wo

$$\delta_{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{\Delta}$$

die durch die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{mm} \end{vmatrix}$$

der quadratischen Form F dividirten ersten Unterdeterminanten bedeuten, zu den vorhergehenden m Horizontalreihen, so entsteht, abgesehen vom Vorzeichen

$$
K \equiv \Delta \begin{vmatrix}
0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & x_1^1 & \cdot\cdot & x_m^1 \\
0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & x_1^2 & \cdot\cdot & x_m^2 \\
\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\
0 & (2n) & \cdot\cdot & 0 & x_1^n & \cdot\cdot & x_m^2 \\
\sigma x_1^1 & x_1^2 & \cdot\cdot & x_1^n & (1-\sigma)\delta_{11} & \cdot\cdot & (1-\sigma)\delta_{1m} \\
\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\
\sigma x_m^1 & x_m^2 & \cdot\cdot & x_m^n & (1-\sigma)\delta_{m1} & \cdot\cdot & (1-\sigma)\delta_{mn}
\end{vmatrix}.
$$

Behufs einer letzten Reduction multiplicire man die letzten m Verticalreihen mit den

$$\frac{1}{2}\, a_x^k\, a_1, \quad \frac{1}{2}\, a_x^k\, a_1, \; \ldots, \; \frac{1}{2}\, a_x^k\, a_m, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

und addire sie. Addirt man das entstehende Aggregat für $k = 1$ zur ersten Verticalreihe, subtrahiert dagegen für $k = 2, \ldots, n$ von den folgenden, so ergiebt sich, wenn zur Abkürzung noch

$$2\,\frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} = \xi$$

gesetzt wird,

$$(11)\qquad K \equiv \Delta\left(\frac{\sigma+1}{2}\right)^m \begin{vmatrix} 0 & -\frac{(12)}{2} & \ldots & -\frac{(1n)}{2} & -x_1^1 & \cdot\cdot & -x_m^1 \\ \frac{(12)}{2} & 0 & \ldots & -\frac{(2n)}{2} & -x_1^2 & \cdot\cdot & -x_m^2 \\ \frac{(13)}{2} & \frac{(23)}{2} & \ldots & -\frac{(3n)}{2} & -x_1^3 & \cdot\cdot & -x_m^3 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \frac{(1n)}{2} & \frac{(2n)}{2} & \ldots & 0 & -x_1^n & \cdot\cdot & -x_m^n \\ x_1^1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n & \xi\delta_{11} & \cdot\cdot & \xi\delta_{1m} \\ x_2^1 & x_2^2 & \ldots & x_2^n & \xi\delta_{21} & \cdot\cdot & \xi\delta_{2m} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ x_m^1 & x_m^2 & \ldots & x_m^n & \xi\delta_{m1} & \cdot\cdot & \xi\delta_{mm} \end{vmatrix}.$$

Die hieraus entspringende Gleichung welche nach Absonderung des Factors σ wieder vom $m - 2^{\text{ten}}$ Grade sein muss, denke man sich nach Potenzen von $\sigma - 1$ geordnet und betrachte den Coefficienten von $(\sigma - 1)^0$. Derselbe ergiebt sich aus (11) für $\xi = 0$ in der Gestalt einer zweiten schiefen Determinante

$$(12)\qquad J_1 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{(12)}{2} & \cdot\cdot & \frac{(1n)}{2} & x_1^1 & \ldots & x_m^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ -\frac{(1n)}{2} & -\frac{(2n)}{2} & \cdot\cdot & 0 & x_1^n & \ldots & x_m^n \\ -x_1^1 & -x_1^2 & \cdot\cdot & -x_1^n & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ -x_m^1 & -x_m^2 & \cdot\cdot & -x_m^n & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Die beiden Ausdrücke J_1 und J_2, welche bei ungeradem $n + m$, resp. n identisch verschwinden, mögen bei geradem $n + m$, *n als schiefe Invarianten der Punktgruppe* bezeichnet werden. Sie sind die Quadrate von Ausdrücken i_1 und i_2, welche in den Coordinaten jedes der n Punkte linear sind. Fasst man einen derselben, z. B. A_n, als variabel auf, so stellen die Gleichungen

$$i_1 = 0, \quad i_2 = 0,$$

Ebenen dar. *Jede dieser Ebenen geht aber durch die Punkte A_1 und A_{n-1} hindurch*, wie man sofort aus der Form von (7) und (12) ersieht.

Hiernach ergeben sich für $n \geq m$ folgende Sätze.

1) Ist m ungerade $= 2p + 1$, so ist die Gleichung

$$\frac{K}{\sigma} = 0$$

von ungerader Ordnung $2(p-1)+1$ in σ, sie hat also $p-1$ Paare reciproker Wurzeln, zu welchen $2(p-1)$ *uneigentliche Polygone* gehören; ausserdem aber verschwindet bei geradem n die Invariante J_1, *d. h. es giebt ein eigentliches Polygon erster Art.* Bei ungeradem n wird dagegen durch das Verschwinden von J_2 ein solches zweiter Art indicirt.

2) Ist m gerade $= 2p$, so sind bei geradem n im allgemeinen nur $p-1$ conjugirte Wurzelpaare vorhanden. Bei ungeradem n aber verschwinden J_1 und J_2, *d. h. neben* $2(p-2)$ *uneigentlichen Polygonen tritt noch ein eigentliches von erster und eines von zweiter Art auf.*

3) Es ist also im allgemeinen kein eigentliches Polygon vorhanden, wenn m und $m+n$ beide gerade sind. Verschwindet aber J_1 oder J_2 bei gerader Reihenzahl, so verschwinden gleich auch alle ersten Unterdeterminanten dieser Ausdrücke; dasselbe gilt dann auch von der Determinante K. Das heisst, *wenn zwei reciproke Wurzeln in eine einzige* ± 1 *zusammenfallen, so gehört zu derselben eine lineare Reihe von Auflösungen für die* λ, z; *d. h. es existirt dann eine* ∞^1 *Schaar von eigentlichen Polygonen* (*in demselben im allgemeinen zwei uneigentliche*) *der einen oder anderen Art.*

Man kann nun auch wenigstens im allgemeinen die Specialfälle des Problems discutiren. Diese kommen dadurch zu Stande, dass Wurzeln der Gleichung $K = 0$ zusammenfallen. Dabei können entweder zwei reciproke Wurzeln in ± 1 übergehen, und es kommt dann auf eine Untersuchung der Unterdeterminantensysteme von J_1 oder J_2 an, um zu entscheiden, welche besonderen Verhältnisse dabei eintreten; oder es fallen zwei Paare reciproker Wurzeln unter einander zusammen. Nun hat die Gleichung $K = 0$ nach (11), abgesehen von den etwaigen Wurzeln $\sigma = \pm 1$, $\xi = 0, \infty$, nur paarweise entgegengesetzt gleiche Wurzeln ξ, d. h. sie kann immer in eine Form gebracht werden, in der sie nur Potenzen mit geradem Exponenten in ξ enthält. Mit Hülfe dieser Bemerkung ist es in den einfacheren Fällen sehr leicht, die vollständige Discussion durchzuführen.

Es erübrigt noch die Behandlung des Falles $\Delta = 0$, doch mag vorausgesetzt werden, dass die ersten Unterdeterminanten von Δ nicht sämmtlich verschwinden.

Es bestehen daher die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ir}\,\alpha_r = 0, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

für bestimmte Werthe der α_r, die nicht sämmtlich Null sind. Aus dem Ausdrucke für K (10) sondert sich dann der Factor $\sigma - 1$ ab. Giebt man demselben horizontal und vertical einen Rand aus willkürlichen Grössen $u_1, u_2, \ldots, u_n, u_1', \ldots, u_n'; v_1, \ldots, v_n, v_1', v_2', \ldots, v_m'$, so erhält man nach analogen Umformungen, wie früher, falls α_k nicht verschwindet,

$$(13)\qquad [K]_{\sigma=1} = \frac{\Delta_{kk}}{\alpha_k} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i' \begin{vmatrix} 0 & -\left(\frac{12}{2}\right) & \cdot\cdot & -\left(\frac{1n}{2}\right) & -x_1^{\,1} & \cdot\cdot & -x_m^1 & v_1 \\ \left(\frac{12}{1}\right) & 0 & \cdot\cdot & -\left(\frac{2n}{2}\right) & -x_1^{\,2} & \cdot\cdot & -x_m^2 & v_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ \left(\frac{1n}{2}\right) & \left(\frac{2n}{2}\right) & \cdot\cdot & 0 & -x_1^n & \cdot & -x_m^n & v_n \\ x_1^{\,1} & x_1^{\,2} & \cdot\cdot & x_1^n & 0 & \cdot\cdot & 0 & v_1' \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ x_m^1 & x_m^2 & \cdot\cdot & x_m^n & 0 & \cdot\cdot & 0 & v_m' \\ 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & \alpha_1 & \cdot\cdot & \alpha_m & 0 \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt, dass die Werthe der $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ im allgemeinen gleich Null werden, während die z_i den α_i proportional sind; es entsteht nur ein singuläres Polygon für $\sigma = 1$, wie übrigens aus der allgemeinen Beschaffenheit der mit dem singulären Punkte $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ behafteten Mannigfaltigkeit F schon erkannt werden konnte. Den Kern der letzten Determinante bildet aber wieder die schiefe Invariante J_1; verschwindet sie bei geradem $n + m$, so tritt eine lineare Reihe von Werthen z, λ ein, welche zu eigentlichen Polygonen gehören.

Endlich sei noch bemerkt, dass der Coefficient von $(\sigma - 1)^1$ in der nach $\sigma - 1$ entwickelten Gleichung $K = 0$ die Form

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} 0 & \left(\frac{12}{2}\right) & \cdot\cdot & \left(\frac{1n}{2}\right) & x_1^{\,1} & \cdot\cdot & x_m^1 & 0 \\ -\left(\frac{12}{2}\right) & 0 & \cdot\cdot & \left(\frac{2n}{2}\right) & x_1^{\,2} & \cdot\cdot & x_m^2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ -\left(\frac{1n}{2}\right) & -\left(\frac{2n}{2}\right) & \cdot\cdot & 0 & x_1^n & \cdot\cdot & x_m^n & 0 \\ -x_1^{\,1} & -x_1^{\,2} & \cdot\cdot & -x_1^n & 0 & \cdot\cdot & 0 & \alpha_1 \\ -x_2^{\,1} & -x_2^{\,2} & \cdot\cdot & -x_2^n & 0 & \cdot\cdot & 0 & \alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ -x_m^1 & -x_m^2 & \cdot\cdot & -x_m^n & 0 & \cdot\cdot & 0 & \alpha_m \\ 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & -\alpha_1 & \cdot\cdot & -\alpha_m & 0 \end{vmatrix}$$

erhält, d. h. er wird eine $n + m + 1$ reihige schiefe Determinante, welche S heissen möge.

Es sei nun $m = 2p$. Dann sind bei *geradem* n im allgemeinen $p - 2$ reciproke Wurzelpaare vorhanden nebst der Doppelwurzel $\sigma = +1$, da S verschwindet. *Eigentliche Polygone aber treten erst auf, wenn entweder* J_2 *verschwindet und ein Paar reciproker Wurzeln in* -1 *coincidirt.* (Dieser Fall kann sich für $m = 4$ nicht mehr ereignen, da hier ohnehin $p - 2 = 0$ ist). *Oder es verschwindet* J_1, *und es existirt eine lineare Reihe von Polygonen erster Art.*

Bei ungeradem n verschwinden J_1 und J_2; es sind $p - 2$ reciproke Wurzelpaare und die Wurzeln $\sigma = \pm 1$ vorhanden. *Im allgemeinen kommt also nur ein Polygon zweiter Art zu Stande.*

Für $m = 2p + 1$, $p > 3$, sind bei ungeradem n $p - 2$ reciproke Paare, ausserdem $\sigma = -1$ einfach und $\sigma = +1$ zweifach vorhanden, es existirt ein eigentliches Polygon zweiter Art. Bei geradem n hat man im allgemeinen nur $p - 1$ reciproke Paare.

Es sei endlich bemerkt, dass auch das allgemeine Eingangs erwähnte projective Problem von n Ebenen und n in ihnen liegenden Punkten in derselben Weise auf eine Gleichung in σ zurückgeführt werden kann, doch hat dieselbe im allgemeinen weder rationale Wurzeln, noch treten die besonderen Determinanten auf, welche dem specielleren auf eine quadratische Form bezogenen trotz seines elementaren Charakters ein gewisses Interesse verleihen.

IV.

Fortsetzung und Discussion der Fälle $m = 3, 4, 6$.

Die beiden Invarianten J_2 und ΔJ_1 sind nur abhängig von den Ausdrücken (ik), d. h. von den auf die quadratische Form F bezogenen Polarenbildungen $a_{xi}\, a_{xk}$.*) Damit ergiebt sich eine metrische Deutung derselben. Wählt man als Ebene $x_m = 0$ die unendlich ferne, d. h. setzt man $x_m = 1$, und zieht man durch irgend einen festen Punkt P parallel zur Geraden $A_i A_k$ eine Gerade, welche der Fläche $F = 0$ in den Punkten Q_i, Q_k begegnet, bezeichnet man ferner den Werth von F für den Punkt P mit F_0, das Product der Abschnitte PQ_i und PQ_k mit $[ik]$, die Enfernung von A_i und A_k

$$\Big[\sum_{1}^{m-1}{}_{r,s}\, \alpha_{rs} (x_r^i - x_r^k)(x_s^i - x_s^k)\Big]^{\frac{1}{2}}$$

durch d_{ik}, wo die α_{rs} Constanten, so ist

$$(ik) = F_0 \frac{d_{ik}^2}{2[ik]};$$

*) Bei $J_1 \Delta$ erkennt man dies, wenn man J_1 nach den Determinanten aus den letzten m Vertical- und Horizontalreihen entwickelt.

mithin (ik) dem Quadrate der „parallel der Sehne $Q_i\,Q_k$ gemessenen Entfernung von A_i und A_k“ proportional;*) für den Fall

$$F = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{m-1}^2 - R^2 = 0$$

wird also, bei geeigneter Annahme von P, (ik) überhaupt proportional mit dem Quadrat der Entfernung d_{ik} selbst. *Damit sind die Bedingungen* $J_1 = 0$, $J_2 = 0$ *in metrische Relationen zwischen den Kanten und Diagonalen des Polygons* $A_1\,A_2 \ldots A_n$ *verwandelt.*

Bei der Untersuchung specieller Fälle wird es sich wesentlich um die Entwickelung der reciproken Gleichung handeln, von deren Wurzeln σ die Lösung der Frage abhängt. Für $n \leqq m$ ist diese aus der Gleichung $n - 1^{\text{ten}}$ Grades $\frac{\Omega}{\sigma} = 0$ (III, 4) zu entnehmen. Für $n \geqq m$ aber hat man vermöge ähnlicher Umformungen, wie früher

$$(1) \qquad \Omega = (\sigma - 1)^{n-m} \left(\frac{\sigma + 1}{2}\right)^m \Delta\, \mathsf{T},$$

wo T die in III, (11) rechts auftretende Determinante bedeutet, wodurch der $n - m$ fache Wurzelfactor $\sigma - 1$ aus Ω abgesondert wird. (Im folgenden werde ich n und m als gerade voraussetzen, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben.)

Alle Coefficienten der Gleichung $\mathsf{T} = 0$ *sind demzufolge lediglich von den* (ik) *abhängig*, und können in dieser Form aus den Coefficienten der Entwickelung von Ω,

$$(2) \quad \Omega = \sigma \left\{ A_{n-2}(\sigma^{n-2} + 1) + A_{n-3}(\sigma^{n-3} + \sigma) + A_{n-4}(\sigma^{n-4} + \sigma^2) + \cdots \right\}$$

erhalten werden, wobei insbesondere

$$A_{n-2} = (-1)^{n-1}\,(1\,2)\,(2\,3) \cdots (n\,1)$$

ist. Setzt man nämlich

$$\xi = 2\,\frac{\sigma - 1}{\sigma + 1},$$

also für

$$\sigma = 0, \quad \xi = -2, \quad \text{für} \quad \sigma = \infty, \quad \xi = 2,$$

so muss folgende Identität bestehen

$$(3) \qquad \mathsf{T} = (\xi^2 - 4)\,[B_{m-2}\,\xi^{m-2} + B_{m-4}\,\xi^{m-4} + \cdots + B_0],$$

wobei

$$B_{m-2} = \frac{J_2}{\Delta 2^n}, \qquad B_0 = -\frac{J_1}{4};$$

während die übrigen B noch zu bestimmen sind. Aus (1) findet man nun

---

*) Vgl. Baltzer, Determinanten. 4. Aufl. S. 233.

$$(4) \qquad \frac{2^{m-4}\Omega}{\Delta\sigma} = -\sum_{k=1}^{k=\frac{m}{2}} (\sigma-1)^{n-2k}(\sigma+1)^{2(k-1)}2^{m-2k}B_{m-2k}.$$

Entwickelt man beiderseits nach Potenzen von σ, so erhält man durch Vergleichung der Coefficienten die folgenden Gleichungen:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \frac{2^{m-4}}{\Delta}A_{n-2} &= -\sum_{k=1}^{k=\frac{m}{2}} B_{m-2k}2^{m-2k}, \\ \frac{2^{m-4}}{\Delta}A_{n-3} &= \sum_{k=1}^{k=\frac{m}{2}} B_{m-2k}2^{m-2k}(n-4k+2), \\ &\vdots \end{aligned}$$

welche zur Bestimmung der B mehr als hinreichend sind, und eine Reihe von Identitäten zwischen den A_h und den Invarianten J_1, J_2 liefern.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen wende ich mich zur Betrachtung der Fälle $m = 3, 4, 6$.

1) Für $m = 3$, $p = 1$ hat man einen Kegelschnitt in der Ebene; es existiren nur eigentliche Polygone, welche bei geradem n von erster, bei ungeradem n von zweiter Art sind. Vgl. S. 46.

2) Für $m = 4$, $p = 2$ hat man eine Fläche zweiten Grades. Bei geradem n sind im allgemeinen zwei uneigentliche Polygone vorhanden; bei ungeradem n stets ein eigentliches erster und zweiter Art. Nur wenn bei geradem n eine der beiden Invarianten J_1 und J_2 verschwindet, existirt eine lineare Reihe von eigentlichen Polygonen; man kann dann jede Gerade in der Tangentenebene von A_1 als Seite eines solchen ansehen, und die Construction erfolgt in übersichtlichster Weise durch einen gespannten Faden, der abwechselnd durch einen Punkt A_k und dann über die Polare von A_k, A_{k+1} geführt wird, wobei das Polygon sich jederzeit von selbst schliesst.

Die erste Gleichung (5) liefert (bei geradem n), da

$$B_2 = \frac{J_2}{\Delta 2^n}, \qquad B_0 = -\frac{J_1}{4},$$

die folgende merkwürdige Beziehung zwischen den (ik)

$$(6) \qquad \frac{J_2}{2^{n-4}} - \frac{J_1\Delta}{4} = (12)(23)\ldots(n1).$$

Dieselbe sagt aus, dass — solange nicht zwei auf einander folgende Punkte A derselben Erzeugenden angehören — J_1 und J_2 nie gleichzeitig verschwinden können (geometrisch ist dies allerdings selbstverständlich), sowie dass zur Existenz von ∞^1 Polygonen erster resp. zweiter

Art erforderlich ist, *dass entweder die schiefe Determinante der Entfernungsquadrate verschwindet oder gleich dem 2^{n-4} fachen Product der Quadrate der Seiten des Polygones $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ist.*

Bei vier Punkten, $n = 4$, muss entweder $J_1 = D^2$, wo D die Determinante der vier Punkte, verschwinden; d. h. dieselben liegen in einer Ebene.

*Es giebt also stets ∞^1 Polygone erster Art, deren Seiten die Fläche in vier (allgemein $2k$) in einer Ebene liegenden festen Punkten berühren.**)

Verschwindet dagegen J_2, d. h. ist

$$D^2 \Delta = -4(12)(23)(34)(41),$$

so existiren ∞^1 Polygone zweiter Art.**)

Andererseits hat man

$$J_2 = [(12)(34) - (13)(42) + (14)(23)]^2,$$

und die hieraus folgende lineare Bedingung für A_4 ist, wie oben bemerkt, erfüllt, wenn A_4 mit A_1 oder A_3 zusammenfällt; ausserdem aber für den Punkt, der den linearen Gleichungen

$$(14) = 0, \quad (24) = 0, \quad (34) = 0,$$

genügt, d. h. den Pol der Ebene von A_1, A_2, A_3.

*Es giebt also ebenfalls ∞^1 die Fläche berührende Vierseite, wenn einer der Berührpunkte sich in einer der drei Ebenen befindet, welche den Pol der drei anderen mit zweien derselben verbinden.****)

Bei beliebigem geradem n lautet die quadratische Gleichung für σ

$$J_2(\sigma - 1)^2 - J_1 \Delta 2^{n-4} (\sigma + 1)^2 = 0;$$

sie hat bei positivem Δ, wie es sein muss, reelle Wurzeln.

3) Für $m = 6$ bedeutet der Punkt der Mannigfaltigkeit zweiten Grades eine gerade Linie des Raumes, eine Erzeugende derselben ein ebenes Strahlbüschel; einem beliebigen Punkte der Mannigfaltigkeit von 5 Dimensionen entspricht ein linearer Complex; conjugirten Punkten entsprechen involutorische lineare Complexe, und einer Polygonseite mit ihren beiden Ecken entsprechen zwei lineare Complexe, die zur

---

*) Dieser Satz drückt eigentlich nur eine Eigenschaft des zu jener Ebene gehörigen Tangentenkegels aus und ist für einen geraden Kreiskegel geometrisch als selbstverständlich leicht zu erkennen.

**) Für vier Punkte mit dem Tetraederinhalt V auf einer Kugel vom Radius r muss also

$$12 Vr = d_{12}\, d_{23}\, d_{34}\, d_{41}$$

sein, d. h. gleich dem Product der vier Kanten.

***) Die hiermit ausgesprochene Construction der vier Punkte findet sich bei Herrn Bruno a. a. O.

Axe ihrer gemeinsamen speciellen Congruenz die dem Berührungspunkt jener Seite entsprechende Gerade haben. Die eigentlichen Polygone bilden daher ein System von linearen Complexen der eben bezeichneten Eigenschaft, dem eine unmittelbar geometrisch anschauliche Eigenschaft nicht zukommt; die uneigentlichen Polygone bilden dagegen eigenthümliche *Linienconfigurationen, ein eigentliches Polygon besteht nämlich bei n gegebenen Strahlen $g_1, g_2, \ldots, g_n$ aus den n Seiten eines Polygons $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ von der Eigenschaft, dass jederzeit $\gamma_k, g_{k+1}, \gamma_{k+1}$ zu einem ebenen Strahlbüschel gehören.* Ein solches mag kurz ein *Polygon* Γ heissen; die eigentlichen Polygone sollen durch das Symbol P bezeichnet werden.

Für $n = 3$ hat man eine Wursel $\sigma = -1$, d. h. ein Polygon P zweiter Art; der dreifachen Wurzel $\sigma = +1$ entsprechen ∞^2 Lösungen, zu denen insbesondere als specielle lineare Complexe die Geraden gehören, welche die drei gegebenen treffen.

Bei $n = 4$ hat man der Doppelwurzel $\sigma = +1$ entsprechend ∞^1 Lösungen, zu denen in speciellem Sinne die beiden gemeinsamen Transversalen gehören. Zwei reciproken Wurzeln entsprechen zwei Polygone Γ, gebildet aus den Diagonalen zwischen den beiden Transversalen und den 4 gegebenen Strahlen. Die Relation

$$0 = (12)(34) + (23)(14) - (13)(24)$$

bedingt das Auftreten von ∞^1 Polygonen P zweiter Art, unter denen sich wieder die beiden Polygone Γ befinden. Ist andererseits die Determinante J_4 (III, 9) gleich Null, so fallen, wie bekannt, die beiden Transversalen zusammen.

Bei $n = 5$ treten ausser einem Polygone P zweiter Art ($\sigma = -1$) zwei Polygone Γ im allgemeinen auf; jedes gehört mit allen seinen Seiten dem linearen zu $\sigma = +1$ gehörigen Complexe C an, den die fünf Geraden bestimmen; es ist nach Plücker's Bezeichnung ein Complexpolygon. Die Gleichung III, (4) für σ wird

$$(\sigma + 1)\left[\frac{\sigma J_5}{2} - (\sigma - 1)^2 H_5\right] = 0,$$

wo

$$H_5 = (12)(23)(34)(45)(51).$$

Verschwindet J_5, so ist der Complex C ein specieller, die beiden Polygone Γ degeneriren in die gemeinsame Transversale der fünf Geraden; ist andererseits $J_5 + 8H_5 = 0$, so werden alle Wurzeln gleich -1 und die beiden Polygone Γ gehen in ein einziges doppeltzählendes Complexpolygon über.

Für $n = 2k$, $k \geq 3$ giebt die Relation (5)

$$\frac{J_2 2^4}{\Delta 2^n} + B_2 2^2 - \frac{J_1}{4} = \frac{2^2}{\Delta}(12)(23)(34)(45)(56)(61) = \frac{4H_6}{\Delta};$$

mithin wird die Gleichung vierten Grades für σ

$$J_2 \frac{2^4}{2^n} \xi^4 + \xi^2 \left(4H_6 + J_1 \frac{\Delta}{4} - J_2 \frac{2^4}{2^n}\right) - J_1 \frac{\Delta}{4} = 0, \tag{7}$$

oder

$$4H_6(\sigma^2 - 1)^2 + \frac{J_2}{2^{n-6}} \sigma(\sigma - 1)^2 + J_1 \Delta \sigma(\sigma + 1)^2 = 0. \tag{8}$$

Den vier Wurzeln von (7) entsprechen im allgemeinen vier Polygone Γ; sie zerfallen in zwei Paare von je zwei n Seiten; die beiden n-Seite eines Paares gehören zu reciproken Wurzeln von (8). Da die Seiten jedes n-Seites des einen Paares mit den entsprechenden des anderen Paares in Involution liegen (S. III, 6), so bestimmen die vier n Seite auf jeder der Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_n$ nur zwei Eckpunkte; *d. h. je vier correspondirende Seiten der vier n-Seite bilden mit den beiden zugehörigen Geraden g Kanten eines Tetraeders.*

Die Discriminante von (7) ist

$$\left(4H_6 + J_1 \frac{\Delta}{4} - J_2 \frac{2^4}{2^n}\right)^2 + J_1 J_2 \Delta \frac{2^4}{2^n}.$$

Für ein System reeller Geraden, welches etwa auf die Plücker'sche quadratische Form

$$F = x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6 = 0,$$

bezogen ist, wird $\Delta = -1$; mithin sind entweder alle vier Wurzeln σ reell oder alle imaginär, wie übrigens aus der tetraedralen Anordnung folgt. Die Discriminante verschwindet, wenn

$$16 H_6 = \left(\sqrt{J_1} \pm \frac{8}{2^k} \sqrt{J_2}\right)^2.$$

Findet eine dieser beiden in Bezug auf die Liniencoordinaten jeder der n Geraden g *quadratischen* Gleichungen statt, so fallen die beiden reciproken Wurzelpaare in ein einziges zusammen; es existiren nur zwei Polygone Γ. Dadurch ist eine ganz eigenthümliche Degeneration der soeben beschriebenen Linienconfiguration bestimmt, bei welcher zwei aufeinander folgende Seiten des ersten Polygones mit den entsprechenden beiden Seiten des zweiten in abwechselnder Reihe entweder ein ebenes Vierseit, dessen Diagonale eine der gegebenen Geraden ist, oder zwei concentrische Strahlbüschel bilden, denen eine solche Gerade gleichzeitig angehört.

Die Bedeutung der noch specielleren Fälle

$$J_1 = 0,\ H_6 2^{n-2} = J_2;\quad J_2 = 0,\ 16 H_6 = J_1;\quad J_1 = 0,\ J_2 = 0,$$

sowie auch die Verhältnisse bei ungeradem n wird man ebenfalls leicht erkennen.

Von den Eigenschaften des Linienraumes kann man wieder in mehrfacher Weise zu Eigenschaften des Punktraumes durch Transformation übergehen. Nach Herrn Lie*) entspricht z. B. jeder Configuration von Geraden eine solche von Kugeln des gewönlichen Raumes, und so sei hier endlich auf die merkwürdigen Systeme von sich berührenden Kugeln hingewiesen, welche nach der Lie'schen Interpretation aus den Polygonen Γ entstehen.

V.

Anwendung der Liniengeometrie.

Eine besonders übersichtliche Behandlung lässt sich dem speciellen Problem für eine Fläche zweiten Grades durch Anwendung der Liniengeometrie geben. Obwohl mit Hülfe der von mir an einem anderen Orte ausgeführten Betrachtungen möglich ist, diese Untersuchung ganz allgemein zu führen, werde ich doch der Einfachheit halber die Gleichung der Fläche in der Form

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 = 0 \tag{1}$$

voraussetzen. Aus derselben folgt die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= \mu\lambda, \\ \varrho x_2 &= -1, \\ \varrho x_3 &= \mu, \\ \varrho x_4 &= \lambda; \end{aligned} \tag{2}$$

die Geraden $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const.}$ sind die beiden Systeme der Erzeugenden. Die Plücker'schen Coordinaten der Verbindungsgeraden irgend zweier Punkte mit den Coordinaten x, y

$$\begin{aligned} p_1 &= x_1 y_2 - x_2 y_1, \\ p_2 &= x_1 y_3 - x_3 y_1, \\ p_3 &= x_1 y_4 - x_4 y_1, \\ p_4 &= x_3 y_4 - x_4 y_3, \\ p_5 &= x_4 y_2 - x_2 y_4, \\ p_6 &= x_2 y_3 - x_3 y_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Hieraus ergeben sich die Coordinaten der Verbindungslinie irgend zweier den Parametern $\lambda_1 \mu_1$, $\lambda_2 \mu_2$ entsprechenden Punkte in der Form:

---

*) Lie, Ueber Complexe, Math. Ann. Bd. V, S. 170 ff.

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
p_1 &= \lambda_2\mu_2 - \lambda_1\mu_1,\\
p_2 &= \mu_1\mu_2(\lambda_1 - \lambda_2),\\
p_3 &= \lambda_2\lambda_1(\mu_1 - \mu_2),\\
p_4 &= \mu_1\lambda_2 - \lambda_1\mu_2,\\
p_5 &= \lambda_2 - \lambda_1,\\
p_6 &= \mu_1 - \mu_2;
\end{aligned}
$$

und aus (4) die der beiden Systeme von Erzeugenden

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
q_1' &= -\lambda, & q_1'' &= \mu,\\
q_2' &= 0, & q_2'' &= -\mu^2,\\
q_3' &= \lambda^2, & q_3'' &= 0,\\
q_4' &= \lambda, & q_4'' &= \mu,\\
q_5' &= 0, & q_5'' &= 1,\\
q_6' &= 1; & q_6'' &= 0,
\end{aligned}
$$

Eine beliebige Tangente der Fläche, welche zum Berührpunkt den Punkt $A_k(\lambda_k, \mu_k)$ hat, hat daher die Coordinaten

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
p_1 &= -\lambda_k + \varrho_k\mu_k,\\
p_2 &= - \varrho_k\mu_k^2,\\
p_3 &= \lambda_k^2,\\
p_4 &= \lambda_k + \varrho_k\mu_k,\\
p_5 &= \varrho_k,\\
p_6 &= 1,
\end{aligned}
$$

wo ϱ_k ein neuer Parameter, der die Lage der Tangenten zu den beiden Erzeugenden durch A_k bestimmt. Die Bedingung dafür, dass die Tangenten in den Punkten A_k und A_{k+1} sich schneiden, erhält die Form

$$
(7)\qquad \varrho_k\,\varrho_{k+1} = \left(\frac{\lambda_k - \lambda_{k+1}}{\mu_k - \mu_{k+1}}\right)^2,
$$

wie man unmittelbar durch Anwendung der bekannten Bedingung

$$
p_1q_4 + p_4q_1 + p_2q_5 + p_5q_2 + p_3q_6 + p_6q_3 = 0
$$

für die incidente Lage zweier Geraden p, q findet. Es seien nun die Punkte

$$
A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n
$$

mit den Parametern

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1\,\lambda_2\,\ldots\,\lambda_n,\\
&\mu_1\,\mu_2\,\ldots\,\mu_n,\\
&\varrho_1\,\varrho_2\,\ldots\,\varrho_n,
\end{aligned}
$$

gegeben. Bezeichnet man die rechte Seite von (7) zur Abkürzung

durch $(k\,k+1)^2$, $(k\,k+1) = (k+1\;k)$, so folgt bei *ungeradem* n aus dem System der Gleichungen (7) für $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$(8)\qquad \varrho_1{}^2 = \frac{(1\,2)^2\,(3\,4)^2\ldots(n\,1)^2}{(2\,3)^2\ldots(n-1\,n)^2},$$

$$\varrho_1 = \pm\frac{(1\,2)\,(3\,4)\ldots(n\,1)}{(2\,3)\ldots(n-1\,n)},$$

und aus ϱ_1 die eindeutige Bestimmung aller weiteren Parameter $\varrho_2\ldots\varrho_n$. Durch den Umstand, dass letztere mit ϱ_1 zugleich sämmtlich ihr Zeichen wechseln, ist die harmonische Lage der Seiten der beiden möglichen Polygone zu den beiden durch den gemeinsamen Berührpunkt gehenden Erzeugenden ausgedrückt (Vgl. S. 42). Die beiden Polygone sind offenbar verschiedener Art; besondere Specialfälle finden nicht statt.

Bei *geradem* n dagegen ergiebt sich, falls die ϱ endliche von Null verschiedene Werthe haben sollen, also ein *eigentliches* Polygon zu Stande kommen soll, die Relation:

$$(1\,2)^2\,(3\,4)^2\ldots(n-1\;n)^2 = (2\,3)^2\ldots(n\,1)^2,$$

oder:

$$(9)\qquad (1\,2)\,(3\,4)\ldots(n-1\;n) = \pm(2\,3)\ldots(n\,1).$$

Ist sie erfüllt, so kann ϱ_1 ganz willkürlich gewählt werden, es giebt eine ∞^1 Schaar von eigentlichen Polygonen. Da die Bedingung (9) in Bezug auf jedes der Parameterpaare λ, μ bilinear ist, so ist der Ort des Punktes A_n bei festen $A_1\,A_2\ldots A_{n-1}$ ein Kegelschnitt, dessen Ebene durch die beiden Punkte A_1 und A_{n-1} geht, wie schon früher gefunden wurde. Da die Determinante der durch (9) ausgedrückten projectiven Beziehung zwischen λ_n, μ_n

$$(\lambda_{n-1}-\lambda_1)\,(\mu_{n-1}-\mu_1)$$

ist, so kann dieselbe nicht verschwinden, d. h. auch hier finden keine weiteren speciellen Fälle statt.

Es ist noch übrig, festzustellen, zu welcher Art die Polygone gehören, je nachdem man in den Gleichungen (8), (9) das obere oder untere Vorzeichen wählt. Liegen sämmtliche Punkte in einer Ebene, so ist bei geradem n die Bedingung (9) für das obere Zeichen thatsächlich erfüllt. Da in diesem Falle, wie früher gezeigt worden, nur Polygone erster Art existiren, so ergiebt sich aus Gründen der Continuität, — und in ähnlicher Weise bei (8) — *dass das obere Zeichen immer Polygonen erster Art entspricht.*

Eine directe Untersuchung der Doppelverhältnissproducte, welche in § II betrachtet sind, führt indessen zu einigen anderen Relationen, die einen weiteren charakteristischen Unterschied zwischen den Poly-

gonen erster und zweiter Art bei geradem und ungeradem n begründen, und die ich im folgenden entwickeln werde.

Die Seite des Polygons auf welcher der Punkt A_k liegt, werde von der — übrigens durch eine willkürliche Ebene unmittelbar zu ersetzende — Ebene $x_2 = 0$ des Coordinatentetraeders im Punkte S_k, von den beiden anstossenden Seiten in Z_{k-1} und Z_{k+1} geschnitten. Alsdann handelt es sich um das Doppelverhältniss der vier Strahlen g_1, g_2, g_3, g_4, welche von der Ecke E_1 des Tetraeders*) nach den Punkten $S_k, A_k, Z_{k+1}, Z_{k-1}$ gehen. Nun sind, wie einfache Rechnungen zeigen, die Coordinaten von g_1 proportional mit

$$0,\ 1,\ -\varrho_k,\ 0,\ 0,\ 0,$$

die von g_2 mit

$$1,\ -\mu_k,\ -\lambda_k,\ 0,\ 0,\ 0.$$

Die Coordinaten von g_3 haben die Form

$$\tau,\ 1-\tau\mu_k,\ -(\varrho_k+\tau\lambda_k),\ 0,\ 0,\ 0,$$

wo

$$\tau = \frac{\varrho_k - \varrho_{k+1}}{\varrho_{k+1}(\mu_{k+1}-\mu_k)+\lambda_{k+1}-\lambda_k}$$

zu setzen ist; die von g_4 haben dieselbe Form, nur hat für τ der Werth

$$\tau_1 = \frac{\varrho_k - \varrho_{k-1}}{\varrho_{k-1}(\mu_{k-1}-\mu_k)+\lambda_{k-1}-\lambda_k}$$

einzutreten. Das Doppelverhältniss

$$D_k = \frac{\tau}{\tau_1}$$

erhält mit Hülfe von (7) die Form

$$D_k = \frac{\lambda_{k-1}-\lambda_k}{\mu_{k-1}-\mu_k}\,\frac{1}{\varrho_k}\,\frac{\varrho_k-\varrho_{k+1}}{\varrho_k-\varrho_{k-1}}\cdot\frac{\lambda_{k-1}-\lambda_k+\varrho_k(\mu_{k-1}-\mu_k)}{\lambda_{k+1}-\lambda_k+\varrho_{k+1}(\mu_{k+1}-\mu_k)}.$$

Demnach ist das Product P aller Doppelverhältnisse

$$(10) \qquad P = \frac{(1\,2)\,(2\,3)\ldots(n\,1)}{\varrho_1\,\varrho_2\ldots\varrho_n}.$$

Hierzu stellt sich eine dualistische Untersuchung.

Die Tangentialebene der Fläche im Punkte A_k schneidet die Coordinatenebene $x_2 = 0$ in einer Geraden h_2 welche der g_1 im Punkte S_k begegnet. Durch denselben Punkt gehen aber auch die beiden Ebenen, welche die Polygonseite durch A_k mit den anstossenden Seiten bestimmt; sie schneiden diese Coordinatenebene in den Strahlen h_3 und h_4. Das Doppelverhältniss der Strahlen

$$(g_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4)$$

*) Die Ecken haben gleiche Indices mit den gegenüberliegenden Tetraederebenen.

werde durch Δ_k bezeichnet. Man erhält die Coordinaten von g_1, h_2, h_3 proportional mit

$$0,\ 1,\ -\varrho_k,\ 0,\ 0,\ 0,$$
$$0,\ -\mu_k,\ +\lambda_k,\ 1,\ 0,\ 0,$$
$$0,\ 1-\tau\mu_k,\ -\varrho_k+\tau\lambda_k,\ \tau,\ 0,\ 0$$

wo

$$\tau = \frac{\varrho_{k+1}-\varrho_k}{\varrho_{k+1}(\mu_k-\mu_{k+1})-(\lambda_k-\lambda_{k+1})}$$

zu setzen ist. Daraus ergiebt sich nach ähnlicher Umformung wie vorhin

$$\Delta_k = (-1)\frac{\varrho_k-\varrho_{k+1}}{\varrho_k-\varrho_{k-1}}\ \frac{\lambda_k-\lambda_{k-1}}{\mu_k-\mu_{k-1}}\ \frac{1}{\varrho_k}\cdot\frac{\lambda_{k-1}-\lambda_k-\varrho_k(\mu_{k-1}-\mu_k)}{\lambda_{k+1}-\lambda_k-\varrho_{k+1}(\mu_{k+1}-\mu_k)}$$

also für das Product Π aller Doppelverhältnisse

$$(11)\qquad \Pi = (-1)^n\frac{(1\,2)\ldots(n\,1)}{\varrho_1\cdots\varrho_n};$$

P und Π sind *duale Doppelverhältnissproducte* in Bezug auf das betreffende Polygon. Ist nun *erstens* n eine *gerade* Zahl $2m$, so wird

$$\varrho_1\cdot\cdot,\varrho_n = (1\,2)^2\,(3\,4)^2\ldots(n\ n-1)^2,$$

also

$$P = \Pi = \pm 1,$$

je nachdem in (9) das obere oder untere Zeichen genommen wird. Es sind also stets alle ∞^1 Polygone von derselben Art, *zugleich haben sie die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass die beiden dualen Werthe* P *und* Π *unter einander gleich sind.*

Ist dagegen *zweitens* n *ungerade* $= 2m+1$, so wird

$$\varrho_1\,\varrho_2\ldots\varrho_n = \pm(1\,2)\ldots(n\,1),$$

je nachdem in (8) das obere oder untere Zeichen genommen wird und zugleich wird

$$P = -\Pi = \pm 1;$$

Die beiden möglichen Polygone sind also von verschiedener Art, *zugleich aber haben die beiden dualen Werthe* P *und* Π *für jedes derselben entgegengesetzte Zeichen.*

Der Bedingung (9) kann man verschiedene geometrische Bedeutungen geben, von denen ich zwei hervorhebe. Bezeichnet man das *Moment* zweier Erzeugenden derselben Art, welche durch λ_i, λ_k, resp. μ_i, μ_k gegeben sind, durch m'_{ik}, m''_{ik} so ist

$$m'_{ik} = (\lambda_i - \lambda_k)^2, \quad m''_{ik} = (\mu_i - \mu_k)^2$$

also

$$\frac{m'_{i,k}}{m''_{i,k}} = (ik)^2.$$

Dadurch verwandelt sich die Bedingung (9) in die folgende, die gegenseitige Lage der zu den $n = 2m$ Punkten gehörigen Erzeugenden charakterisirende:

$$\frac{m'_{1,2} \cdots m'_{n-1,n}}{m''_{1,2} \cdots m''_{n-1,n}} = \frac{m'_{2,3} \cdots m'_{n,1}}{m''_{2,3} \cdots m''_{n,1}}.$$

Man erhält ferner als *Momentenverhältniss* der Geraden (4) welche die Punkte A_1, A_2 verbindet, gegen das durch den willkürlichen Punkt λ_0, μ_0 gehende Paar von Erzeugenden:

$$(12) \qquad \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\mu_2 - \mu_1} \cdot \frac{\mu_0 - \mu_2}{\lambda_0 - \lambda_2} \cdot \frac{\mu_0 - \mu_1}{\lambda_0 - \lambda_1} = \frac{(1\,2)}{(0\,2)\,(0\,1)}.$$

Dieses Verhältniss möge durch $M^0_{1,2}$ bezeichnet werden. Für das Momentenverhältniss $\mathsf{M}^0_{1,2}$ der conjugirten Polare von $A_1 A_2$ gegen dieselben Erzeugenden findet man ebenso

$$\mathsf{M}^0_{1,2} = -\frac{(1\,2)}{(0\,2)\,(0\,1)} = -M^0_{1,2}.$$

Hieraus folgt zunächst: *Der Quotient der Momentenverhältnisse conjugirter Polaren gegen irgend zwei Erzeugende verschiedener Art einer Fläche zweiten Grades ist gleich* — 1. Die Bedingung (9) kann endlich nunmehr in den beiden Formen:

$$M^0_{1,2}\, M^0_{3,4} \cdots = \pm M^0_{2,3}\, M^0_{4,5} \cdots,$$

$$\mathsf{M}^0_{1,2}\, \mathsf{M}^0_{3,4} \cdots = \pm \mathsf{M}^0_{2,3}\, \mathsf{M}^0_{4,5} \cdots,$$

geschrieben werden. Hieraus folgt:

Damit durch eine Gruppe von $2m$ Punkten auf der Fläche eine ∞^1 Schaar eigentlicher Polygone gelegt werden kann, muss das Product der Momentenverhältnisse der Verbindungslinien geraden Ranges dieser Punkte in Bezug auf irgend ein (und damit auch für alle) Paare von Erzeugenden verschiedener Art absolut genommen gleich dem entsprechenden Product gebildet in Bezug auf die Verbindungslinien ungeraden Ranges sein, und umgekehrt.

VI.

Polygone, welche einer Kegelfläche zweiten Grades umschrieben sind.

In den vorhergehenden Betrachtungen wurde eine projectiv allgemeine Fläche zweiten Grades vorausgesetzt. Ist dieselbe ein Kegel, so gestaltet sich die liniengeometrische Behandlung etwas anders. Ich

gebe zunächst die *Tangentendarstellung des Kegels*. Die Coordinaten x_i eines Kegelschnittes im Raume seien gegeben durch die Gleichungen

$$(1) \qquad \sigma x_i = a_i + 2b_i\mu + c_i\mu^2, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

mit dem Parameter μ. Ein beliebiger Punkt P des Kegels mit der Spitze d_i, dessen Leitcurve der Kegelschnitt (1) ist, hat zu Coordinaten die

$$x_i + \lambda d_i$$

wo λ ein zweiter Parameter ist. Die Liniencoordinaten einer beliebigen Erzeugenden sind

$$\begin{aligned} p_1 &= d_1x_2 - d_2x_1, \\ p_2 &= d_1x_3 - d_3x_1, \\ p_3 &= d_1x_4 - d_4x_1, \\ p_4 &= d_3x_4 - d_4x_3, \\ p_5 &= d_4x_2 - d_2x_4, \\ p_6 &= d_2x_3 - d_3x_2; \end{aligned}$$

die Coordinaten einer bestimmten vom Punkte P auslaufenden Tangente haben dann die Form

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{dx_1}{d\mu}(x_2 + \lambda d_2) - \frac{dx_2}{d\mu}(x_1 + \lambda d_1), \\ q_2 &= \frac{dx_1}{d\mu}(x_3 + \lambda d_3) - \frac{dx_3}{d\mu}(x_1 + \lambda d_1), \text{ etc.} \end{aligned}$$

Mithin sind die Coordinaten q_k einer beliebigen Tangente des Kegels in der Form

$$q_k + \varrho p_k$$

(ϱ ein neuer Parameter) darstellbar. Hieraus geht aber die folgende Form hervor

$$(2) \quad \sigma q_k = q_k^1 + (\lambda + 2\mu\varrho) q_k^2 + \mu^2 q_k^3 + \mu(\lambda + \mu\varrho) q_k^4 + \mu q_k^5 + \varrho q_k^6,$$

in welcher die $q_k^1, q_k^2, \ldots, q_k^6$ jetzt die Liniencoordinaten der Kanten des Tetraeders mit den Eckpunkten a, b, c, d bedeuten, zugleich ist, falls Δ die Determinante jener vier Punkte bedeutet

$$\begin{aligned} q_1^1 q_4^4 + q_4^1 q_1^4 + q_2^1 q_5^4 + q_5^1 q_2^4 + \cdots &= \Delta, \\ q_1^2 q_4^5 + q_4^2 q_1^5 + q_2^2 q_5^5 + q_5^2 q_2^5 + \cdots &= -\Delta, \\ q_1^3 q_4^6 + q_4^3 q_1^6 \qquad\qquad\qquad + \cdots &= \Delta. \end{aligned}$$

Es seien nun wieder auf dem Kegel n Punkte, zu denen die Parameter $\lambda_1, \mu_1, \ldots, \lambda_n, \mu_n$ gehören, gegeben, und in ihnen die Tangenten durch je einen der Parameter $\varrho_1 \ldots \varrho_n$ festgelegt. Die Bedingung,

dass sich die Tangenten in zwei auf einander folgenden Punkten A_k, A_{k+1} schneiden sollen, nimmt hier die einfache Form an

$$(3) \qquad \varrho_k + \varrho_{k+1} = -\frac{\lambda_k - \lambda_{k+1}}{\mu_k - \mu_{k+1}} = -(k\,k+1).$$

Hieraus geht wieder hervor: Ist n ungerade, so erhält man

$$2\varrho_1 = -(1\,2) + (2\,3) - (3\,4) \cdots - (1\,n),$$

und damit ein vollständig bestimmtes eigentliches Polygon. Ist dagegen n gerade, so muss die Gleichung

$$(4) \qquad (1\,2) + (3\,4) + \cdots + (n-1\;n) = (2\,3) + \cdots + (n\,1)$$

bestehen; sie ermöglicht dann ∞^1 eigentliche Polygone. Die in jedem der Paare λ, μ bilineare Gleichung (4) sagt wiederum aus, dass sich der Punkt A_n in einem durch A_1 und A_{n-1} gehenden Kegelschnitt befinden muss. Bei geradem n sind die Polygone stets erster, bei ungeradem stets zweiter Art, wie unmittelbar aus dem früher für Kegelschnitte bewiesenen Satze folgt.

Dresden, im April 1884.

Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine continuirliche, endliche Gruppe gestatten.

Von

Sophus Lie in Christiania.

Die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

deren Integralflächen dadurch charakterisirt sind, dass ihre Haupttangenten des einen Systems ein Tetraeder nach constantem Doppelverhältnisse schneiden, wurde, wenn ich nicht irre, zuerst von mir (1869) integrirt. Die hierbei angewandte Methode gründete sich darauf, dass die Gleichung $F = 0$ alle ∞^3 linearen und *vertauschbaren* Transformationen gestattet, welche das betreffende Tetraeder invariant lassen. Meine Methode leistete gleichzeitig die Integration einer jeden anderen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung $\Phi(x, y, z, p, q) = 0$ mit derselben Gruppe von Transformationen.

Klein, dem ich damals diese und einige verwandte Integrationstheorien in wiederholten Gesprächen auseinandersetzte, machte mir die schöne Bemerkung, dass meine Integrationstheorie mit Abels Behandlung derjenigen algebraischen Gleichungen, die seinen Namen tragen, eine auffallende Analogie darbiete. In unserer gemeinsamen Arbeit (Math. Annalen t. 4): *Ueber solche ebene Curven, die unendlich viele lineare Transformationen zulassen*, gaben wir in einem Schlussparagraphen eine Integrationsmethode aller Gleichungen:

$$f\left(x, y \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

mit einer gegebenen infinitesimalen Transformation:

$$\delta x = \xi(x, y) \,.\, \delta t, \quad \delta y = \eta(x, y) \,.\, \delta t.$$

Wir fügten jedoch die specielle Voraussetzung hinzu, dass die *Hülfsgleichung* $\xi \,.\, dy - \eta \,.\, dx = 0$, welche die Bahncurven der bekannten infinitesimalen Transformation bestimmte, sich integriren liesse.

Bei meinen Untersuchungen über Linien- und Kugelgeometrie in den Jahren 1870—71 wurden mehrfach ähnliche Integrations-

methoden auf specielle geometrische Probleme mit einigem Erfolge angewandt.*)

Bald erhielten indess diese Untersuchungen eine ganz andere Tragweite. Ich fand, dass die von Lagrange, Pfaff, Cauchy, Jacobi und ihren Nachfolgern begründete Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung sich naturgemäss als eine Transformationstheorie dieser Gleichungen auffassen liess. Jede infinitesimale Berührungstransformation einer solchen Gleichung (oder eines solchen Gleichungssystems) liess sich auffassen als ein gewisses Integral des bekannten simultanen Systems der Charakteristiken, ja sie war mit einem solchen äquivalent. Jede bekannte Gruppe von Transformationen, die eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung in sich überführten, lieferte, ihren infinitesimalen Transformationen entsprechend, eine gewisse Anzahl Integrale $u_1 \dots u_r$ des besprochenen simultanen Systems, welche paarweise Relationen von der Form

$$(u_i, u_k) = f_{ik}(u_1, u_2, \dots u_r)$$

erfüllen. Ich bezeichnete daher eine solche Schaar von Integralen als eine (homogene) Gruppe.**)

---

*) Die im Texte citirten speciellen Integrationsmethoden beruhen auf einer allgemeinen Theorie, die sich folgendermassen resumiren lässt: Gestattet ein System von partiellen Differentialgleichungen in den Variabeln $(z, x_1 \dots x_n)$ q bekannte infinitesimale Berührungstransformationen $P_1 \dots P_q$, die paarweise vertauschbar sind und somit die Relationen $(P_i, P_k) = 0$ erfüllen, und kennt man dabei ein vollständiges Integral des Involutionssystems $P_k = a_k$, (oder was auf dasselbe hinauskommt, kennt man die zugehörigen endlichen Transformationen), so ist es, wenn $P_1 \dots P_q$ unabhängige Functionen sind, möglich die Bedingungsgleichung

$$p\,dz - p_1\,dx_1 - \cdots - p_n\,dx_n = P\,dX - P_1\,dX_1 - \cdots - P_n\,dX_n$$

zu befriedigen. Führt man sodann $X, X_1 \dots X_n$ als neue Variabeln ein, so verschwinden q Grössen X aus den vorgelegten partiellen Differentialgleichungen (Ges. d. W. zu Christiania 1872 und 1873).

Ist z. B. $n = q = 2$; und sind P_1 und P_2 gegebene infinitesimale und vertauschbare *Punkt*transformationen:

$$P_1 = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} = A_1 f,$$

$$P_2 = \eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \zeta_1 \frac{\partial f}{\partial z} = A_2 f,$$

so lassen sich, wenn $A_1 f = 0$, $A_2 f = 0$ unabhängige Gleichungen sind, X_1, X_2 und X als Functionen von x, y, z *allein* wählen. Sie erfüllen die Relationen

$$A_1 X = 0, \quad A_2 X = 0, \quad A_1 X_2 = 0, \quad A_2 X_2 = 1, \quad A_1 X_1 = 1, \quad A_2 X_1 = 0.$$

**) Es verhält sich jedoch nicht so, dass die Anzahl der unabhängigen infinitesimalen Transformationen der gegebenen Transformationsgruppe mit der Anzahl der unabhängigen Integrale der Schaar $u_1 \dots u_r$ zusammenzufallen braucht.

Das Poisson-Jacobi'sche Theorem war für diese Auffassung ein specieller Fall des allgemeinen Theorems, dass jede continuirliche Gruppe, welche die beiden infinitesimalen Transformationen $B_1 f$ und $B_2 f$ enthält, ebenfalls die Transformation $B_1(B_2(f)) - B_2(B_1(f))$ umfasst.

Ich beschäftigte mich ferner eingehend mit *linearen* partiellen Differentialgleichungen und entwickelte eine allgemeine rationelle Integrationstheorie von vollständigen Systemen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, welche mit der Galois'schen Behandlung*) der algebraischen Gleichungen viele Berührungspunkte darbot. Die Grundzüge dieser Theorie wurden im Nov. 1874 in den Abhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania (siehe auch die Verh. von 1872, p. 132) publicirt und ohne wesentliche Aenderung in den Math. Ann. Bd. XI, p. 487 reproducirt. Es wurde als wahrscheinlich angegeben, dass die entwickelten Principien in jedem einzelnen Falle den grösstmöglichen Vortheil aus den gegebenen Transformationen zu ziehen erlaubten. Gleichzeitig wurden indess fortgesetzte Untersuchungen über diesen Gegenstand angekündigt. U. A. wurde hervorgehoben, dass eine Weiterentwickelung meiner Theorie der Transformationsgruppen gleichzeitig eine detaillirte Ausführung meiner Integrationstheorie geben würde.

Indem ich jetzt wiederum einen Abschnitt meiner Untersuchungen auf diesem Gebiete einem grösseren Publicum vorlege, halte ich es für zweckmässig zuerst in § 1 meine alte Integrationstheorie in grösster Kürze zu resumiren. Sodann gebe ich in § 2 eine Discussion der Tragweite dieser Theorie, das heisst, ich zeige, auf welche Weise man in jedem einzelnen Falle a priori ohne Integration, durch algebraische Operationen, entscheidet, wie viel meine allgemeinen Principien leisten, also wie viele und wie hohe Hülfsgleichungen man integriren muss, um das betreffende Problem zu erledigen.

In den Paragraphen 3—9 gebe ich eine einigermassen ausführliche Darstellung mehrerer Theorien, die ich schon früher in norwegischen Zeitschriften, theilweise in gedrängter Form, entwickelt habe. Dieselben finden im Laufe dieser Arbeit nützliche Anwendung und *besitzen ausserdem an und für sich eine fundamentale Wichtigkeit.* Nach diesen Vorbereitungen wende ich mich wieder zu dem Integrationsprobleme eines vollständigen Systems mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Dabei nehme ich zunächst in § 10 meine ursprüngliche Voraussetzung,

---

Die erste Zahl ist in der That unter Umständen grösser als die letzte. Man sehe z. B. Archiv for Math. og Naturv. Bd. I, p. 184, 1876.)

*) Vergl. Camille Jordan's traité des substitutions et des équations algébriques (Paris 1870).

aus den Jahren 1870—72, dass nicht allein die *infinitesimalen* sondern zugleich die *endlichen Transformationen einer Gruppe* bekannt sind, wieder auf und führe die Invarianten einer solchen Gruppe als Variable ein. Dass sich in dieser Weise formelle Vereinfachungen erhalten lassen, war mir längst bekannt und hatte ich u. A. schon im Jahre 1872*), allerdings in nicht ganz klarer Form angegeben. Doch sah ich damals den betreffenden Vortheil nur darin, dass bei einigen Hülfsgleichungen auf diese Weise gewisse Parameter vermieden würden.

1882 bemerkte ich, dass sich ein noch grösserer Vortheil erreichen liess. Ich fand nämlich, dass irreductible Hülfssgleichungen erster Ordnung sich auf Riccatische Gleichungen zurückführen lassen und erkannte auch bei Hülfsgleichungen höherer Ordnung gewisse wesentliche Eigenthümlichkeiten. So z. B. fand ich, dass die Integration einer irreductiblen Hülfsgleichung zweiter Ordnung immer geleistet werden könnte, wenn *ein* Integral erster Ordnung derselben gefunden war.**)

Als meine Untersuchungen auf diesem Punkte standen, hielt ich am 3. Nov. 1882 in der *société mathématique de France* einen kurzen Vortrag über meine Integrationstheorien von 1874, um hierdurch, wenn möglich die Aufmerksamkeit auf diese *alten Untersuchungen* zu lenken. Halphen (damals Präsident der Gesellschaft) knüpfte hieran einige Bemerkungen über die Beziehungen zwischen seinen Arbeiten über Differentialinvarianten der allgemeinen *projectivischen Gruppe* und meinen Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine *beliebige continuirliche Gruppe gestatten.* Er erwähnte noch, dass die Integration einer Differentialgleichung achter Ordnung zwischen x und y, welche die allgemeine projectivische Gruppe der Cartesischen xy-Ebene gestattet, auf die Erledigung einer *linearen* Differentialgleichung dritter Ordnung reducirt werden kann. Ich antwortete ihm, dass *die von mir im Jahre* 1874 *entwickelten Principien nach meiner Auffassung in jedem einzelnen Falle die Reduction auf die niedrigsten Hülfsgleichungen leisteten.* Es war mir übrigens an und für sich nicht neu, dass man durch Einführung von gewissen Invarianten als Variabeln eine *formelle* Vereinfachung erreichen könnte.

Einige Tage später schickte ich der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania eine inhaltreiche, wenn auch kurz gefasste Note

---

*) Ges. d. W. zu Christiania 1872: Zur Theorie der Differentialprobleme. Im Anfange des Jahres 1878 benutzte ich, soviel ich mich erinnere, zum ersten Male die Invarianten einer ganz *beliebigen* endlichen Gruppe bei der *expliciten* Behandlung eines Integrationsproblems (Archiv for Math. og Naturv. Bd. 3. Theorie der Transformationsgruppen 3, p. 118).

**) Man sehe die Abhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania von 1882. Nr. 10 und Nr. 21.

(1882, Nr. 22), die u. A. das allgemeine Theorem XI des folgenden Paragraphen 10 enthielt. Nach der Publication dieser Note erschien Halphens 1880 eingelieferte und 1881 von der Pariser Academie gekrönte Preisschrift „Memoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables.“ Dieselbe enthielt, wie ich fand, nicht allein seinen oben besprochenen Satz sondern gleichzeitig auch einige ähnliche Sätze, zusammen mit vielen anderen wichtigen Theorien.

Es mag hervorgehoben werden, dass nur ein verhältnissmässig einfacher Fall meines soeben citirten Theorems XI sich in Halphens Arbeit aufgestellt findet. Es ist andererseits wohl zu bemerken, dass auch meine Theoreme, welche *canonische Formen für gewisse in meiner alten Integrationstheorie auftretende irreductible Hülfsgleichungen liefern*, diese Theorie noch nicht zum Abschluss bringen.

Ein tieferes Eindringen in die Theorie der Transformationsgruppen wird entsprechende neue Resultate für die Integralrechnung liefern. Wie die Theorie der algebraischen Gleichungen nicht mit den Abel-Galois'schen allgemeinen Untersuchungeen abgeschlossen war, sondern nunmehr successive Gleichungen von immer höherem Grade eingehend studirt wurden, so müssen ganz ebenso die verschiedenen Hülfsgleichungen (oder simultanen Systeme von Hülfsgleichungen), die in meinen Untersuchungen auftreten, successiv in erschöpfender Weise discutirt werden. Ich behalte mir vor, die hiermit angedeutete Untersuchungsrichtung wieder aufzunehmen.

In § 11 betrachte ich wiederum vollständige Systeme mit *bekannten infinitesimalen Transformationen*, die eine Gruppe bilden, und setze jetzt dabei voraus, dass ihre *endlichen Transformationen unbekannt* sind. Es gelingt mir dieses Problem auf das in dem vorangehenden Paragraphen behandelte Problem zurückzuführen, wobei allerdings gewisse Parameter eingeführt werden.

Endlich in § 12 skizzire ich noch eine allgemeine Integrationstheorie derjenigen Differentialgleichungen, welche überhaupt eine continuirliche Gruppe von Transformationen bestimmen.

Es mag noch ausdrücklich hervorgehoben werden, dass die in dieser Abhandlung entwickelten Theorien nach vielen Richtungen hin weiter verfolgt werden können.

Um nicht später die fortlaufende Darstellung unterbrechen zu müssen, schicke ich schon hier einige Bemerkungen über meine gewöhnliche *Terminologie* voraus.

In allen Untersuchungen über Transformationsgruppen ist, wie ich immer hervorhebe, der Satz fundamental, dass die unabhängigen infinitesimalen Transformationen

$$B_1 f \cdots B_r f$$

einer Gruppe paarweise Relationen von der Form

$$(B_i B_k) = B_i(B_k(f)) - B_k(B_i(f)) = \sum c_{iks} B_s f$$

mit constanten Coefficienten c_{iks} erfüllen. (Gött. Nachr. 1874, Math. Ann. Bd. XVI, p. 462). Den umgekehrten Satz, dass r unabhängige infinitesimale Transformationen $B_1 f \dots B_r f$, welche derartige Relationen erfüllen, immer eine Gruppe mit r Parametern erzeugen, benutze ich in dieser Arbeit ebenfalls gelegentlich, obgleich ich den Beweis desselben (Archiv for Math og Naturv. Bd. III, p. 100) noch nicht in diesen Annalen publicirt habe. Dabei muss indess hervorgehoben werden, dass meine jetzigen Anwendungen dieses Satzes gewissermassen als unwesentlich anzusehen sind. Man kann nämlich, wenn man es vorzieht, folgende formale Definition aufstellen:

Definition. Wenn r Ausdrücke $B_1 f \dots B_r f$ paarweise Relationen von der Form $(B_i, B_k) = \Sigma c_{iks} B_s f$ erfüllen und es unmöglich ist, r solche Constanten c_k zu wählen, dass der Ausdruck $\Sigma c_k B_k f$ identisch verschwindet, so sage ich, dass alle infinitesimalen Transformationen $\Sigma c_k B_k f$ eine r-gliedrige Gruppe bilden.

Habe ich nun unter den infinitesimalen Transformationen

$$c_1 B_1 + \cdots + c_r B_r$$

einer Gruppe einige, z. B. $B_1 f$, $B_2 f \dots B_{r-\varrho}$, die selbst wiederum eine Gruppe bilden, so nenne ich diese neue Gruppe *eine Untergruppe der ursprünglichen.* Es liegt, wie ich im Archiv for Math. og Naturv. Bd. 1, p. 178, 1876 näher entwickelt habe, in der Natur der Sache, dass *die Bestimmung aller Untergruppen einer vorgelegten Gruppe durch eine algebraische Discussion geleistet werden kann.*

Enthält die Gruppe $B_1 f \dots, B_r f$ eine Untergruppe

$$C_k f = d_{k,1} B_1 f + \cdots + d_{k,r} B_r f$$
$$(k = 1, 2 \dots r - \varrho)$$

und bestehen Relationen von der Form:

$$(C_k, B_i) = \sum d_{kis} C_s f,$$

so sage ich, dass diese Untergruppe sich in der grossen Gruppe *invariant* verhält. Ich sage dementsprechend, dass die $C_k f$ eine *invariante Untergruppe* bilden.

Durch blosse algebraische Discussion kann man selbstverständlich alle in einer vorgelegten Gruppe enthaltenen invarianten Untergruppen bestimmen. (Ges. d. W. zu Christiania: Verallgemeinerung und neue Verwerthung der Jacobi'schen Multiplicatortheorie p. 272).

Eine Gruppe heisst *einfach*, wenn sie keine invariante Untergruppe

enthält. Dagegen heisst sie *zusammengesetzt*, wenn sie eine oder mehrere invariante Untergruppen umfasst.

Diese Begriffsbildung ist, wie ich im Archiv for Math. og Naturv. Bd. 3, p. 104, 1878 näher nachgewiesen habe, nicht allein analog sondern vollständig identisch mit derjenigen der Substitutionstheorie.*) Hierauf brauche ich indess an dieser Stelle nicht näher einzugehen (siehe § 3, Nr. 10).

Zwei Gruppen heissen *gleichzusammengesetzt* (semblable), wenn es möglich ist ihre infinitesimalen Transformationen $B_k f$ und $B'_k f$ in solcher Weise zu wählen, dass in den Relationen

$$(B_i, B_k) = \sum c_{iks} B_s f, \quad (B'_i, B'_k) = \sum c'_{iks} B_s$$

jedesmal c_{iks} gleich c'_{iks} ist.

Zwei r-gliedrige Gruppen $B_k f$ und $B'_k f$ heissen *ähnlich*, wenn es möglich ist, in den $B_k f$ solche neue unabhängige Variabeln einzuführen, dass Relationen von der Form

$$B_k f = \sum^i c_{ki} B'_i f$$

mit constanten Coefficienten bestehen, anders ausgesprochen, wenn sich die eine Gruppe durch Einführung neuer Variabeln in die andere transformiren lässt.

Aus der evidenten von mir übrigens längst (vergl. z. B. Math. Ann. Bd. VIII, p. 234, Bd. IX, p. 247) ausdrücklich hervorgehobenen Bemerkung, dass der Ausdruck (B_1, B_2) sich bei Ausführung einer beliebigen Transformation als *Invariante* verhält, folgt unmittelbar, dass zwei ähnliche Gruppen von Transformationen immer gleichzusammengesetzt sind. Der umgekehrte Satz gilt nicht. Es stellt sich daher die wichtige Frage ein, nach den einfachsten nothwendigen und hinreichenden Kriterien für die Aehnlichkeit zweier Gruppen. Dieselbe ist schon früher von mir behandelt worden und soll im Folgenden wieder aufgenommen werden. —

*) In der Galois'schen Gleichungstheorie spielen die invarianten Untergruppen der discontinuirlichen Gruppen eine fundamentale Rolle. Genau so ist es bei meinen Integrationstheorien mit den *invarianten Untergruppen* der continuirlichen Gruppen. Um das Verständniss zu erleichtern, vermied ich indess lange, explicite mit diesem Begriffe zu operiren. Soviel ich mich erinnere, benutzte ich den Ausdruck invariante Untergruppe zum ersten Male im Archiv for Math. og Naturv. Bd. 3, p. 457, 1878. Wenn Klein und seine Schüler, den Ausdruck *ausgezeichnete* Untergruppe, den sie in derselben Bedeutung benutzen, mit meinem Namen in Verbindung bringen, so beruht das auf einem Missverständniss. Ich theile die von Herrn König (Math. Ann. Bd. XXI, p. 431) ausgesprochene Auffassung, dass der Ausdruck „invariant" besser ist als „ausgezeichnet". Dagegen möchte ich vorschlagen, eine infinitesimale Transformation dann ausgezeichnet zu nennen, wenn sie mit allen Transformationen der Gruppe vertauschbar ist. (Siehe Math. Ann. Bd. VIII, p. 252).

§ 1.

Résumé meiner alten Integrationstheorie eines vollständigen Systems mit bekannten infinitesimalen Transformationen.

1. In diesem Paragraphen gebe ich ein kurzes Résumé meiner 1872 angekündigten und 1874 publicirten Integrationstheorie eines vollständigen Systems $A_1 f = 0 \ldots A_r f = 0$ mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Ich reproducire ohne Beweis die nothwendigen Sätze und Entwickelungen aus dem zweiten Abschnitte meiner Abhandlung im Bd. XI dieser Annalen. (Man sehe auch Verh. d. G. d. W. zu Chr. 1874, und Archiv for Math. og Naturv. Bd. 1, 1876).

A) *Definition.* Das vollständige System $A_k f = 0$ $(k = 1, 2 \ldots r)$ zwischen den Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_n$ gestattet die infinitesimale Transformation Bf, wenn durch diese Transformation jede Lösung des Systems wiederum in eine solche übergeführt wird, wenn also $B\Pi$ gleichzeitig mit Π eine Lösung des vollständigen Systems darstellt.

B) Gestattet das vorgelegte vollständige System die infinitesimale Transformation Bf, so gestattet es gleichzeitig jede infinitesimale Transformation von der Form $Bf + \alpha_1 A_1 f + \cdots + \alpha_r A_r f$, welche Functionen von den x die Grössen α_i auch bezeichnen mögen.*) Zwei infinitesimale Transformationen $B_1 f$ und $B_2 f$ des vollständigen Systems $A_k f = 0$ sind daher nur dann als wesentlich verschieden zu betrachten, wenn sie untereinander durch keine lineare Relation

$$c_1 B_1 f + c_2 B_2 f + \sum \alpha_k A_k f = 0$$

mit den beiden Constanten c_1, c_2 verknüpft sind.

C) Soll das vollständige System $A_1 f = 0 \ldots A_r f = 0$ die infinitesimale Transformation Bf gestatten, so ist hierzu nothwendig und hinreichend, dass r Relationen von der Form:

$$A_i(B(f)) - B(A_i(f)) = \sum^k \alpha_{i,k} A_k f$$

stattfinden, in denen die α_{ik} Functionen der x sind.

D) Gestattet unser vollständiges System die beiden infinitesimalen Transformationen $B_1 f$ und $B_2 f$, so gestattet es zugleich auch die infinitesimale Transformation, deren Symbol

$$B_1(B_2(f)) - B_2(B_1(f))$$

oder (B_1, B_2) ist.

E) Gestattet unser vollständiges System die infinitesimalen Transformationen $B_1 f \ldots B_q f$, und bestehen ausserdem μ lineare Relationen:

$$\sum^k \beta_k B_k f + \sum^i \alpha_i A_i f = 0,$$

---

*) In dieser Arbeit bedeuten α, β, γ im Allgemeinen variable Grössen, a, b, c dagegen Constanten.

so lassen dieselben sich immer nach μ von den Grössen $B_k f$ auflösen, indem die $A_k f$ durch keine lineare Relation verknüpft sein dürfen. Erhält man hierdurch die μ Gleichungen:

$$B_i f = \beta_{i,\mu+1} B_{\mu+1} f + \cdots + \beta_{i,q} B_q f + \sum^k \alpha_{i,k} A_k f,$$

so sind alle Coefficienten $\beta_{i,k}$ Lösungen des vollständigen Systems.

F) Gestattet ein vorgelegtes $(n-1)$ gliedriges vollständiges System $A_1 f = 0 \ldots A_{n-1} f = 0$ mit n Variabeln $x_1 \ldots x_n$ eine bekannte infinitesimale Transformation Bf, so liefert eine *Quadratur* die gemeinsame Lösung der Gleichungen $A_k f = 0$.

Ich setze nun voraus, dass man durch successive Anwendung der angegebenen Operationen ν Lösungen $\Pi_1 \ldots \Pi_\nu$ und q' infinitesimale Transformationen $B_1 f \ldots B_{q'} f$ bestimmt hat, aber keine weiteren finden kann. Ich verstehe diess so, dass alle weiteren $B_{q'+k}$ und alle (B_i, B_k) sich auf die Form

$$\sum_{k=1}^{k=q'} \psi_k (\Pi_1 \ldots \Pi_\nu) B_k f + \sum_{i=1}^{i=r} \alpha_i A_i f$$

bringen lassen, während keine lineare Relation zwischen den $A_i f$ und $B_1 f \ldots B_{q'} f$ bestehen darf, und dass überdies alle $B_i \Pi_k$ sich als Functionen von $\Pi_1 \ldots \Pi_\nu$ darstellen lassen.

Ist nun die Zahl ν der gefundenen Lösungen gleich $n - r$, so ist das Integrationsgeschäft eo ipso erledigt, insofern ein r-gliedriges vollständiges System zwischen n Variabeln eben nur $n - r$ Lösungen besitzt. Wir haben daher nur den Fall

$$\nu < n - r$$

zu betrachten.

Wir führen neue unabhängige Variable ein, nämlich $\Pi_1 \ldots \Pi_\nu$ zusammen mit $n - \nu$ anderen Grössen, die $x_1' \ldots x_{n-\nu}'$ heissen mögen. Da die Π Lösungen sind, nimmt unser vollständiges System hierdurch die Form an:

$$A_i' f = X_{i,1}' \frac{\partial f}{\partial x_1'} + \cdots + X_{i,n-\nu}' \frac{\partial f}{\partial x_{n-\nu}'} = 0,$$

während seine infinitesimalen Transformationen sich in gewisse Ausdrücke verwandeln:

$$B_k' f = \xi_{k1}' \frac{\partial f}{\partial x_1'} + \cdots + \xi_{k,n-\nu}' \frac{\partial f}{\partial x_{n-\nu}'} + \sum^i B_k (\Pi_i) \frac{\partial f}{\partial \Pi_i},$$

in denen die $B_k \Pi_i$ Functionen der Π allein sind.

Da nun jede Lösung des ursprünglichen Systems $A_i f = 0$ durch Einführung der neuen Variabeln in eine Lösung des neuen Systems $A_i' f = 0$ übergeht, so ist mit φ zugleich immer auch $B_k' \varphi$ eine Lösung des letzteren Systems.

Verstehen wir unter $\psi_1 \dots \psi_{q'}$ beliebige Functionen von $\Pi_1 \dots \Pi_\nu$, so gilt dasselbe auch von dem Ausdrucke:

$$B''\varphi = \psi_1 B_1'\varphi + \dots + \psi_{q'} B_{q'}'\varphi$$

und somit besitzt jede infinitesimale Transformation $B''f$ die Eigenschaft das vollständige System $A_i'f = 0$ in sich überzuführen.

2. Ist es nun im Besonderen, wie ich von jetzt ab annehmen will, möglich, die Multiplicatoren ψ_k so zu wählen, dass die Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial \Pi_i}$ in $B''f$ nicht mehr vorkommen, so erhalten wir hierdurch eine oder mehrere etwa q'' infinitesimale Transformationen

$$B_k''f = \xi_{k,1}'' \frac{\partial f}{\partial x_1'} + \dots + \xi_{k,n-\nu}'' \frac{\partial f}{\partial x_{n-\nu}'},$$

deren analytische Ausdrücke keine anderen Differentialquotienten als die Gleichungen des transformirten Systems enthalten. Wir nehmen im Folgenden nur auf diese infinitesimalen Transformationen $B_k''f$ Rücksicht.

Hiermit ist das vorgelegte Integrationsproblem darauf zurückgeführt, das r-gliedrige vollständige System $A_i'f = 0$ mit $n - \nu = n'$ unabhängigen Variabeln $x_1' \dots x_{n'}'$ und mit q'' bekannten infinitesimalen Transformationen $B_1''f \dots B_{q''}''f$ zu integriren. Jedes (B_i'', B_k'') drückt sich folgendermassen aus:

$$(B_i'', B_k'') = \sum_{h=1}^{h=q''} \psi_h^{ik} B_h''f + \sum_\varrho \varphi_\varrho^{ik} A_\varrho'f,$$

wo die ψ_h^{ik} Functionen der Π und als solche nunmehr als Constanten aufzufassen sind, indem die Π_k sowohl in den $A_i'f$ wie in den $B_h''f$ nur als Constanten auftreten.

Die Zahl $r + q''$ kann nun höchstens gleich n' sein, da sonst lineare Relationen zwischen den $A_i'f$ und $B_k''f$ stattfinden würden, was nach dem Vorangehenden ausgeschlossen ist. Den Fall, dass $r + q'' = n'$ ist, behandeln wir in der nächstfolgenden Nummer. Den Fall $r + q'' < n'$ reduciren wir durch Integration auf $r + q'' = n'$.

Zu diesem Zwecke bestimmen wir nach den von Mayer und mir gegebenen Regeln*) die $n' - r - q''$ gemeinsamen Lösungen $\Pi_1', \Pi_2' \dots$ des vollständigen Systems:

$$A_1'f = 0 \dots A_r'f = 0, \quad B_1''f = 0 \dots B_{q''}''f = 0,$$

und führen sodann neue unabhängige Variabeln

*) Das vollständige System im Texte reducirt sich auf eine einzige gewöhnliche Differentialgleichung $(n' - n - q'')^{\text{ter}}$ Ordnung. Diese Hülfsgleichung ist keiner weiteren Reduction oder Vereinfachung fähig.

$$\Pi_1' \ldots \Pi'_{n'-r-q''}, \quad x_1'' \ldots x''_{r+q''}$$

ein, wodurch die Ausdrücke $A_i'f$ und $B_h''f$ in $A_i''f$ und $B_k'''f$ übergehen mögen. Schliesslich erhalten wir hierdurch ein vollständiges System:

$$A_1''f = 0 \ldots A_r''f = 0$$

mit $r + q''$ unabhängigen Variabeln und mit q'' bekannten infinitesimalen Transformationen $B_1'''f \ldots B_{q''}'''f$, zwischen denen keine lineare Relation von der Form

$$\sum^i \alpha_i A_i''f + \sum^k \gamma_k B_k'''f = 0$$

besteht, während jedes (B_i''', B_k''') sich linear durch die $B_k'''f$ und $A_i''f$ ausdrückt. In diesen Ausdrücken

(B) $$(B_i''', B_k''') = \sum c_h' B_h'''f + \sum \alpha_\varrho' A_\varrho''f$$

sind die c_h' Constanten.

Hiermit ist die angekündigte Reduction geleistet.

3. Ehe ich jetzt in der Darstellung meiner alten Integrationstheorie weiter gehe, führe ich, um die Sprache ein wenig zu erleichtern, eine *formelle* Vereinfachung ein, die ich übrigens schon 1874 angedeutet habe.

Wir wollen annehmen, dass mein q-gliedriges vollständiges System:

$$A_kf = X_{k,1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_{k,q}\frac{\partial f}{\partial x_q} + \cdots + X_{k,n}\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

gewisse infinitesimale Transformationen

$$B_if = \xi_{i1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_{in}\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

die keine lineare Relation

$$\sum \alpha_k A_kf + \sum \beta_i B_if = 0$$

erfüllen, gestattet. Dann lösen wir zunächst mit Mayer die Gleichungen $A_kf = 0$ nach q von den Differentialquotienten auf:

$$A_k'f = \frac{\partial f}{\partial x_k} + X'_{k,q+1}\frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \cdots + X'_{k,n}\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

und bemerken dabei, dass die $A_k'f$ paarweise in der Beziehung $(A_i', A_k') = 0$ stehen. Setzen wir sodann

$$B_i'f = B_if - \xi_{i1}A_1'f - \cdots - \xi_{iq}A_q'f$$
$$= \eta_{i,q+1}\frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \cdots + \eta_{i,n}\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

so gestattet das vollständige System $A_k'f = 0$ die infinitesimalen Transformationen B_if, und es bestehen offenbar Relationen von der

einfachen Form $(A_k', B_i') = 0$. Setzen wir endlich voraus, dass die $B_i f$ durch die Gleichungen

$$(B_i, B_k) = \sum_s c_{iks} B_s f + \sum_s \alpha_{iks} A_s f$$

verknüpft sind, und dass die c_{iks} Constante sind, so müssen die B_i', wie man leicht übersieht, die einfacheren Gleichungen

$$(B_i', B_k') = \sum_s c_{iks} B_s' f$$

mit den alten Constanten c_{iks} erfüllen. *Hierdurch ist erreicht worden, dass die $B_i' f$ eine Gruppe bilden**).

4. Das in der zweiten Nummer besprochene Integrationsproblem nimmt mit Berücksichtigung der Entwickelungen der dritten Nummer die folgende einfache Form an:

Vorgelegt zur Integration ist ein q-gliedriges vollständiges System

$$A_k f = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_k} + X_{k,q+1} \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \cdots + X_{kn} \frac{\partial f}{\partial x_n}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, q)$$

zwischen n Variabeln $x_1 \ldots x_n$ und mit $n - q$ bekannten infinitesimalen Transformationen:

$$B_i f = \xi_{i,q+1} \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \cdots + \xi_{i,n} \frac{\partial f}{\partial x_n},$$
$$(i = q + 1 \ldots n)$$

die eine Gruppe bilden. Es giebt keinen identisch verschwindenden Ausdruck

$$\sum \beta_i B_i f + \sum \alpha_i A_i f$$

und also bestehen Relationen von der einfachen Form

$$(A_i, A_k) = 0, \quad (A_k, B_i) = 0, \quad (B_i, B_k) = \sum c_{iks} B_s f.$$

Man muss nun zunächst die Zusammensetzung der Gruppe $B_i f$ untersuchen, das heisst, man muss ihre Untergruppen und die zwischen denselben bestehenden Beziehungen aufstellen. Besitzt die $(n - q)$-gliedrige Gruppe $B_{q+1} \ldots B_n$ eine oder mehrere invariante $(n - q - 1)$-

*) Bilden schon die $B_i f$ eine Gruppe, deren endliche Transformationen überdiess bekannt sind, so bilden die $B_i' f$ allerdings wiederum eine Gruppe, deren endliche Transformationen jedoch im Allgemeinen unbekannt sind. Dieser Uebelstand lässt sich dadurch vermeiden, dass man die gemeinsamen Lösungen $J_1 J_2 \ldots$ des vollständigen Systems $B_k f = 0$ zunächst berechnet, und darnach zusammen mit gewissen weiteren Grössen als neue Variabeln einführt, endlich aber die Gleichungen $A_k f = 0$ nach q von den Grössen $\frac{\partial f}{\partial J_k}$ auflöst.

gliedrige Untergruppen, so wählt man eine solche, etwa $B_{q+1} \dots B_{n-1}$ und bildet das vollständige System:

$$A_1 f = 0 \dots A_q f = 0, \; B_{q+1} f = 0 \dots B_{n-1} f = 0,$$

das jetzt die infinitesimale Transformation $B_n f$ gestattet. Jetzt liefert eine Quadratur die einzige Lösung unseres vollständigen Systems. Hiermit reducirt sich unser Integrationsproblem auf ein einfacheres, indem n um eine Einheit erniedrigt wird.

Enthält unsere $(n-q)$-gliedrige Gruppe $B_{q+1} \dots B_n$ allerdings $(n-q-1)$-gliedrige Untergruppen, darunter jedoch keine invariante, so wählt man eine solche Untergruppe, etwa $B_{q+1} \dots B_{n-1}$, bildet das vollständige System:

$$\text{(A)} \qquad A_1 f = 0 \dots A_q f = 0, \; B_{q+1} f = 0 \dots B_{n-1} f = 0$$

und bestimmt seine Lösung φ nach einer von Du-Bois-Reymond herrührenden Bemerkung durch Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei Variabeln. Jetzt ist $B_n \varphi$ keine Function von φ allein, da unser vollständiges System (A) die infinitesimale Transformation $B_n f$ nicht gestattet. Aber andererseits ist $B_n \varphi$ eine Lösung aller $A_k f = 0$. In dieser Weise findet man durch mehrmalige Ausführung der Operationen $B_k f$ gewisse neue Lösungen und reducirt somit unser Problem auf ein analoges, für welches die Zahl n kleiner ist.

Enthält die $(n-q)$-gliedrige Gruppe $B_{q+1} f \dots B_n f$ keine $(n-q-1)$-gliedrige Untergruppe, so nimmt man eine Untergruppe, die möglichst viele infinitesimale Transformationen enthält. Ist $B_{q+1} \dots B_{n-s}$ eine solche Untergruppe, so bildet man das vollständige System:

$$A_1 f = 0 \dots A_q f = 0, \; B_{q+1} f = 0 \dots B_{n-s} f = 0$$

und bestimmt seine s Lösungen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s$ nach einem von Mayer und mir herrührenden Satze durch die Integration einer einzigen Gleichung $Af = 0$ mit $s + 1$ Variabeln. Hernach findet man immer durch Differentiation neue Lösungen des vollständigen Systems $A_k f = 0$ und erhält schliesslich eine Reduction des ursprünglichen Problems auf ein niedrigeres, das in entsprechender Weise behandelt wird.

§ 2.

Discussion meiner alten Integrationstheorie vollständiger Systeme mit bekannten infinitesimalen Transformationen.

5. Es sei

$$A_1 f = 0, \; A_2 f = 0 \dots A_q f = 0 \quad (x_1, x_2 \dots x_n)$$

ein vorgelegtes vollständiges System mit den Lösungen $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_{n-q}$. Wählen wir nun eine ganz beliebige infinitesimale Transformation Bf

und bilden die Grössen $B\varphi_1 \ldots B\varphi_{n-q}$, so können wir nach *allen* Gleichungen $A'f=0$ fragen, die sowohl von den φ_k wie von allen Grössen $B\varphi_k$ befriedigt werden.

Die gesuchten Ausdrücke $A'f$ sind jedenfalls lineare Functionen der $A_k f$ multiplicirt mit gewissen, von den x abhängenden Grössen α_k, sodass wir

$$A'f = \alpha_1 A_1 f + \alpha_2 A_2 f + \cdots + \alpha_q A_q f$$

setzen können. Zur näheren Bestimmung der α_k bilden wir den Jacobi'schen Ausdruck:

$$A'(B(f)) - B(A'(f)) = Df,$$

der bekanntlich nur Differentialquotienten *erster* Ordnung von f enthält, und geben hernach der Grösse f successiv die Werthe $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{n-q}$, wobei die linke Seite nach unseren Voraussetzungen jedesmal verschwindet. Also ist Df gleich einer Summe

$$\beta_1 A_1 f + \beta_2 A_2 f + \cdots + \beta_q A_q f,$$

deren Coefficienten β_k gewisse Functionen von den x bezeichnen. Es ist andererseits unmittelbar evident, dass jede Gleichung

$$A'f = 0 = \sum \alpha_k A_k f,$$

welche eine Relation von der Form:

(1) $$A'Bf - BA'f = \beta_1 A_1 f + \cdots + \beta_q A_q f$$

erfüllt, nicht allein von den φ_k sondern zugleich von allen $B\varphi_k$ befriedigt wird.

Dass alle unabhängigen Gleichungen $A'f=0$, etwa:

$$A_1'f = 0,\ A_2'f = 0 \ldots A_{q'}'f = 0,$$

die nach der soeben gefundenen Regel berechnet werden können, ein q'-gliedriges vollständiges System bilden, ist an sich evident und kann überdiess in folgender Weise analytisch verificirt werden.

Erfüllen $A_1'f$ und $A_2'f$ Relationen von der Form (1), so zeigt die Jacobi'sche Identität

$$((A_1', A_2'), B) + ((A_2', B), A_1')) + ((B, A_1'), A_2')) = 0$$

dass diess ebenfalls mit (A_1', A_2') der Fall ist. Da aber einerseits (A_1', A_2') die Form $\sum \gamma_k A_k f$ besitzt, andererseits jeder Ausdruck

$$A'f = \sum \gamma_k A_k f,$$

der eine Relation von der Form (1) erfüllt, sich als Summe von $A_1'f,\ A_2'f \ldots A_{q'}'f$ multiplicirt mit gewissen Functionen der x ausdrückt, so besteht eine Relation:

$$(A_1', A_2') = \delta_1 A_1'f + \cdots + \delta_{q'} A_{q'}'f,$$

welche eben aussagt, dass die $A_k'f$ ein vollständiges System bilden. Diess giebt:

Satz 1. *Besitzt das vollständige System:*

$$A_1 f = 0 \ldots A_q f = 0, \qquad (x_1 \ldots x_n)$$

die Lösungen $\varphi_1 \ldots \varphi_{n-q}$, *so findet man alle linearen Differentialgleichungen*

$$A'f = \alpha_1 A_1 f + \cdots + \alpha_q A_q f = 0,$$

die nicht allein von den φ_k *sondern zugleich von allen Grössen* $B\varphi_k$ *erfüllt werden, indem man die* α_k *in allgemeinster Weise als solche Functionen der* x_i *berechnet, dass die Gleichung*

$$A'Bf - BA'f = \beta_1 A_1 f + \cdots + \beta_q A_q f$$

identisch befriedigt wird. Die Gleichungen $A'f = 0$ *bilden dann ein vollständiges System.*

Dieser Satz lässt sich nach verschiedenen Seiten hin verallgemeinern. Eine erste Verallgemeinerung erhält man durch zweimalige (resp. mehrmalige) Anwendung desselben in dem folgenden Satze:

Satz 2. *Behält man die Bezeichnungen des vorangehenden Satzes bei, so findet man das allgemeinste vollständige System* $A''f = 0$ *mit den Lösungen* φ_k, $B\varphi_k$, $BB\varphi_k$, *indem man den allgemeinsten Ausdruck*

$$A''f = \alpha_1' A_1' f + \cdots + \alpha_{q'} A'_{q'} f$$

bildet, welcher die Relation

$$A''Bf - BA''f = \beta_1' A_1' f + \cdots + \beta'_{q'} A'_{q'} f$$

erfüllt. — In entsprechender Weise bildet man überhaupt das allgemeinste vollständige System $A^{(k)}f = 0$ *mit den Lösungen*

$$\varphi_i,\ B\varphi_i,\ BB\varphi_i = B^2\varphi_i, \ldots, B^k\varphi_i,$$

indem man den allgemeinsten Ausdruck

$$A^{(k)}f = \sum \alpha_j^{(k-1)} A_j^{(k-1)} f$$

bildet, welcher eine Relation von der Form

$$A^{(k)}(B(f)) - B(A^{(k)}(f)) = \sum \beta_i^{(k-1)} A_i^{(k-1)} f$$

erfüllt.

Indem man in dieser Weise verfährt, findet man successiv eine Reihe vollständiger Systeme $Af = 0$, $A'f = 0$, $A''f = 0$, $A'''f = 0 \ldots$ Jedes System $A^{(j)}f = 0$ enthält entweder weniger Gleichungen als das vorangehende $A^{(j-1)}f = 0$ oder auch ebensoviele; und zwar in diesem Falle identisch dieselben Gleichungen wie das System $A^{(j-1)}f = 0$. Man kommt daher unter allen Umständen, da die Anzahl der unabhängigen Gleichungen eines vollständigen Systems eine positive ganze Zahl oder Null sein muss, *zuletzt zu einem System* $A^{(k)}f = 0$, *das mit*

dem nächstfolgenden Systeme $A^{(k+1)}f$ und gleichzeitig mit allen folgenden Systemen zusammenfällt; hierbei ist es selbstverständlich denkbar, dass unser vollständiges System $A^{(k)}f = 0$ gar keine Gleichung enthält.

Das besprochene erste System $A^{(k)}f = 0$ welches mit dem Systeme $A^{(k+1)}f = 0$ zusammenfällt, wird charakterisirt durch Relationen von der Form

$$A^{(k)}(B(f)) - B(A^{(k)}(f)) = \beta_1^{(k)} A_1^{(k)} f + \cdots + \beta_{q^{(k)}}^{(k} A_{q^{(k)}}^{(k)} f.$$

Es lässt sich, behaupte ich, zugleich definiren als das allgemeinste vollständige System

$$C_i f = \gamma_{i1} A_1 f + \cdots + \gamma_{iq} A_q f,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

welches die Relation

$$C_i(B(f)) - B(C_i(f)) = \delta_{i1} C_1 f + \cdots + \delta_{i\varrho} C_\varrho f$$

erfüllt. Diese Relationen zeigen nämlich erstens, dass die Gleichungen $C_i f = 0$ nicht allein von den φ_i sondern zugleich von allen $B\varphi_i$ befriedigt werden, zweitens dass sie von allen $BB\varphi_i$ erfüllt werden und endlich überhaupt dass sie von allen $B^s\varphi_i$ befriedigt werden. Das giebt:

Satz 3. *Bildet man successiv die im vorangehenden Satze besprochenen vollständigen Systeme $A'f = 0$, $A''f = 0$ etc., so ist das erste System $A^{(k)}f = 0$, welches mit dem nächstfolgenden Systeme $A^{(k+1)}f = 0$ zusammenfällt, gleichzeitig das allgemeinste vollständige System von der Form*

$$C_i f = 0 = \sum^k \gamma_{ik} A_k f,$$

welches Relationen von der Form:

$$C_i(B(f)) - B(C_i(f)) = \delta_{i1} C_1 f + \cdots + \delta_{i\varrho} C_\varrho f$$

erfüllt.

6. Es ist indess möglich, unseren Satz 1 noch weit mehr zu verallgemeinern, indem man nämlich nicht bloss einen Ausdruck Bf sondern gleichzeitig mehrere solche, etwa $B_1 f, B_2 f, \ldots, B_m f$ betrachtet. Sind in der That wiederum $\varphi_1 \ldots \varphi_{n-q}$ die Lösungen des vollständigen Systems $A_1 f = 0 \ldots A_q f = 0$, so können wir alle Gleichungen

$$\mathsf{A}'f = 0 = \sum \alpha_k A_k f$$

suchen, welche nicht allein von den φ_k sondern zugleich von allen Grössen $B_1\varphi_k, B_2\varphi_k, \ldots B_m\varphi_k$ erfüllt werden. Indem man ganz wie bei dem Beweise des Satzes 1 verfährt, erhält man die folgenden Sätze:

Satz 4. *Man findet das allgemeinste vollständige System*

$$\mathsf{A}'f = 0 = \sum \alpha_k A_k f,$$

das sowohl von den φ_k wie von allen Grössen $B_1\varphi_k \dots B_m\varphi_k$ erfüllt wird, indem man den allgemeinsten Ausdruck

$$\mathsf{A}'f = \alpha_1 A_1 f + \cdots + \alpha_q A_q f$$

aufsucht, der m Relationen von der Form

$$\mathsf{A}'(B(f)) - B(\mathsf{A}'(f)) = \beta_{k1} A_1 f + \cdots + \beta_{kq} A_q f = (\mathsf{A}'B)$$

befriedigt.

Satz 5. *Man findet das allgemeinste vollständige System $\mathsf{A}''f = 0$ mit den Lösungen φ_k, $B_i\varphi_k$, $B_iB_j\varphi_k$, indem man den allgemeinsten Ausdruck $\mathsf{A}''f = \sum \alpha'_k \mathsf{A}'f$ aufsucht, der m Relationen von der Form*

$$\mathsf{A}''(B_k(f)) - B_k(\mathsf{A}''(f)) = \beta'_{k1}\mathsf{A}_1'f + \cdots + \beta'_{kq'}\mathsf{A}'_{q'}f$$

befriedigt. In entsprechender Weise bildet man das allgemeinste vollständige System $\mathsf{A}'''f = 0$ mit den Lösungen φ_k, $B_i\varphi_k$, $B_iB_j\varphi_k$, $B_iB_jB_h\varphi_k$, darnach das vollständige System $\mathsf{A}^{4}f = 0$ u. s. w.

Satz 6. *Das erste vollständige System $\mathsf{A}^{(k)}f = 0$, welches mit dem nächstfolgenden System $\mathsf{A}^{(k+1)}f = 0$ zusammenfällt, ist gleichzeitig das allgemeinste vollständige System*

$$C_i f = \gamma_{i1} A_1 f + \cdots + \gamma_{iq} A_q f$$
$$(i = 1, 2, \dots \sigma),$$

welches $\sigma \,.\, m$ Relationen von der Form

$$C_i(B_k(f)) - B_k(C_i(f)) = \delta_{ik1} C_1 f + \cdots + \delta_{ik\sigma} C_\sigma f$$

erfüllt.

Wir machen nunmehr folgende Voraussetzungen: erstens, dass die $q + m$ Ausdrücke $A_1 f \dots A_q f$, $D_1 f \dots D_m f$ durch keine lineare Relation $\sum \alpha_k A_k f + \sum \delta_k D_k f$ verknüpft sind, zweitens, dass eine jede unter den Grössen (A_i, A_k), (A_i, D_k) sich folgendermassen ausdrückt:

$$(A_i A_k) = \sum c_{iks} A_s f, \quad (A_i, D_k) = \sum a_{iks} A_s f + \sum d_{iks} D_s f,$$

und dass dabei die *Coefficienten a_{iks}, d_{iks}, c_{iks} sämmtlich Constanten sind.*

Wir betrachten die vereinigten Ausdrücke $A_k f$ und $D_k f$ als die früher mit $B_k f$ bezeichneten Grössen, und combiniren die hiermit definirten Ausdrücke $B_k f$ mit dem vollständigen System $A_k f = 0$. Führt man sodann die Berechnung der Grössen

$$\mathsf{A}'f = \sum \alpha_k A_k f$$

aus, so erkennt man zunächst, dass die Coefficienten α_k als *Constanten* gewählt werden können; zugleich aber, dass Relationen von der Form:

$$(\mathsf{A}'_i, \mathsf{A}'_k) = \sum c'_{iks} \mathsf{A}'_s f, \quad (\mathsf{A}'_i, B_k) = \sum a'_{iks} A_s f$$

mit *constanten* Coefficienten a'_{iks}, c'_{iks} bestehen. Berechnet man hernach die Grössen $\mathsf{A}''f = \sum \alpha'_k \mathsf{A}'f$, so findet man, dass auch die α'_k als *Constanten* gewählt werden können und dass Relationen von der Form:

$$(\mathsf{A}'_i, \mathsf{A}''_k) = \sum c''_{iks} \mathsf{A}''_s f, \quad (\mathsf{A}''_i, B_k) = \sum a''_{iks} \mathsf{A}'_s f$$

mit *constanten* Coefficienten bestehen u. s. w. Indem man in dieser Weise fortfährt, erkennt man, *dass der Satz* (6) *unter den jetzt eingeführten Voraussetzungen fortwährend gültig bleibt, wenn wir in ihm die Grössen γ_{ik} und δ_{iks} Constanten bezeichnen lassen. Nehmen wir noch an, dass die $A_i f$ und $D_k f$ eine Transformationsgruppe bestimmen, so bilden die $C_i f$ die grösste invariante Untergruppe von der Form $\sum c_k A_k f$.*

7. Jetzt sei vorgelegt das vollständige System

$$A_1 f = 0, \; A_2 f = 0 \ldots A_r f = 0$$

mit den $n - r$ bekannten infinitesimalen Transformationen:

$$B_{r+1} f \ldots B_{q'} f \ldots B_{q''} f \ldots B_n f,$$

die eine Gruppe bilden mögen. Ich setze dabei vorläufig wie früher voraus, dass Relationen von der einfachen Form

$$(A_i, A_k) = 0, \quad (A_i, B_k) = 0, \quad (B_i, B_k) = \sum c_{iks} B_s$$

bestehen. Ich setze ferner voraus, dass sowohl $B_{r+1} \ldots B_{q'} \ldots B_{q''}$ als $B_{r+1} \ldots B_{q'}$ je eine Untergruppe bilden. Kenne ich nun die Lösungen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{n-q''}$ des vollständigen Systems:

$$A_k f = 0, \; B_{r+1} f = 0 \ldots B_{q''} f = 0,$$

so finde ich durch Bildung aller Ausdrücke $B_i \varphi_k$, $B_i B_j \varphi_k \ldots$ u. s. w. im Allgemeinen neue Lösungen von $A_k f = 0$. Ferner gestatten die vorangehenden Entwickelungen zu entscheiden, wie viele Lösungen durch Wiederholung der angegebenen Operationen gefunden werden können. *Ist in der That $B_{r+1} \ldots B_{q'}$ die grösste in $B_{r+1} \ldots B_{q''}$ enthaltene invariante Untergruppe, welche sich zugleich in der grossen Gruppe $B_{r+1} \ldots B_n$ invariant verhält, so lehren die vorangehenden Entwickelungen, dass durch die angegebenen Differentiationsoperationen von den Lösungen des Systems $A_k f = 0$ alle gefunden werden, welche gleichzeitig das vollständige System*

$$A_k f = 0, \; B_{r+1} f = 0 \ldots B_{q'} f = 0$$

befriedigen.

Aus den vorangehenden Betrachtungen, die für eine synthetische Betrachtung sich einfacher gestalten, kann man übrigens ohne Schwierigkeit erkennen, wie viele Differentiationen man auszuführen braucht, um alle Lösungen, die sich überhaupt in dieser Weise finden lassen, zu berechnen. Hierauf gehe ich jedoch hier nicht ein. Dagegen

bemerke ich ausdrücklich, dass die vorangehenden Entwickelungen im Wesentlichen ungeändert bleiben, auch wenn die $A_k f$ und $B_k f$ durch die allgemeinen Relationen (B) der Nummer 2 verknüpft sind.

Setzen wir insbesondere voraus, dass die Gruppe $B_{r+1} \dots B_{q''} \dots B_n$ einfach ist und dass dabei die infinitesimalen Transformationen $B_{r+1} \dots B_{q''}$ eine beliebige Untergruppe bilden, so genügt unter allen Umständen die Integration des vollständigen Systems

$$A_k f = 0, \ B_{q+1} f = 0 \dots B_{q''} f = 0$$

zur vollständigen Bestimmung aller Lösungen des Gleichungssystems $A_k f = 0$ durch blosse Differentiation. Man erhält daher in diesem Falle die vortheilhafteste Erledigung unseres Integrationsproblems, indem man eine Untergruppe $B_{q+1} \dots B_{q''}$ wählt, die soviele infinitesimale Transformationen als möglich enthält.

Ist die Gruppe $B_{q+1} \dots B_{q'} \dots B_{q''} \dots B_n$ zusammengesetzt, so können meine allgemeinen Theorien in vielen Fällen in verschiedener Weise verwerthet werden. Unter allen Umständen genügt indess offenbar eine algebraische Discussion zur Bestimmung der Ordnung der erforderlichen niedrigsten Hülfsgleichungen. Man nimmt jedenfalls zuerst eine Untergruppe $B_{r+1} \dots B_{q''}$, die in keiner grösseren Untergruppe enthalten ist, integrirt das vollständige System

$$A_k f = 0, \ B_{r+1} f = 0 \dots B_{q''} f = 0$$

und findet sodann durch Differentiation alle Lösungen des früher besprochenen Gleichungssystems:

$$A_k f = 0, \ B_{r+1} f = 0 \dots B_{q'} f = 0.$$

Um jetzt weiter zu gehen, *können* wir eine in der Gruppe $B_{r+1} \dots B_{q'}$ enthaltene Untergruppe $B_{r+1} \dots B_{k'} \dots B_{k''}$ auswählen, die in keiner grösseren Untergruppe enthalten ist. Wir integriren das vollständige System:

$$A_k f = 0, \ B_{r+1} f = 0 \dots B_{k'} f = 0 \dots B_{k''} f = 0$$

und bestimmen darnach durch Differentiation alle Lösungen des vollständigen Systems:

$$A_k f = 0, \ B_{r+1} f = 0 \dots B_{k'} f = 0.$$

Vorausgesetzt wird dabei, dass $B_{r+1} f \dots B_{k'} f$ die grösste invariante Untergruppe der Gruppe $B_{r+1} \dots B_{k''}$ darstellt, welche sich auch in der ursprünglichen Gruppe $B_{r+1} \dots B_n$ invariant verhält u. s. w.

§ 3.

Jede Gruppe von Transformationen ist gleichzusammengesetzt mit einer linearen Gruppe.

8. Eine Transformation zwischen den Variabeln $x_1 \ldots x_n$, $p_1 \ldots p_n$ und den entsprechenden accentuirten Grössen x_k', p_k' heisst eine homogene Berührungstransformation, wenn die Relation:

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = p_1' dx_1' + \cdots + p_n' dx_n'$$

vermöge der Transformationsgleichungen identisch besteht. Die allgemeinste infinitesimale und homogene Berührungstransformation wird definirt durch die Formeln:

$$\delta x_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \cdot \delta t, \qquad \delta p_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k} \cdot \delta t,$$

in denen H eine beliebige Function von der Form

$$H = p_n W\left(x_1 \cdots x_n \frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}\right)$$

bezeichnet. (Math. Ann. Bd. VIII, p. 239, 240.) Das Symbol einer solchen infinitesimalen Transformation wird hiernach:

$$B_k f = \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial f}{\partial x_n} - \frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial p_1} - \cdots - \frac{\partial H}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial p_n}$$

oder mit Anwendung der Poisson-Jacobi'schen Klammerausdrucks:

$$B_k f = (H, f).$$

Sind mehrere infinitesimale Berührungstransformationen z. B. $(H_1 f) \ldots (H_r f)$ vorgelegt, so sind dieselben unabhängig, wenn keine Relation von der Form:

$$c_1(H_1, f) + c_2(H_2, f) + \cdots + c_r(H_r, f) = 0$$

mit constanten Coefficienten identisch besteht. Da jedoch eine solche Relation sich in die $2n$ Gleichungen:

$$\sum\nolimits^i c_i \frac{\partial H_i}{\partial p_k} = 0, \qquad \sum\nolimits^i c_i \frac{\partial H_i}{\partial x_k} = 0$$

zerlegt, so schliessen wir wegen der Homogeneität der H_i, dass unsere r infinitesimalen Transformationen unabhängig sind, wenn keine Relation von der Form:

$$c_1 H_1 + c_2 H_2 + \cdots + c_r H_r = 0$$

mit constanten Coefficienten besteht.

Der allgemeine Satz, dass r unabhängige infinitesimale Transformationen $B_1 f \ldots B_r f$ eine r-gliedrige Gruppe bilden, wenn Relationen von der Form:

$$B_i(B_k(f)) - B_k(B_i(f)) = \sum{}^s c_{iks} B_s f$$

bestehen, zeigt, dass r infinitesimale Berührungstransformationen $(H_1, f) \ldots (H_r, f)$ eine Gruppe bilden, wenn Relationen von der Form

$$(H_i, (H_k, f)) - (H_k, (H_i, f)) = \sum{}^s c_{iks} (H_s, f)$$

bestehen. Diese lassen sich mit Berücksichtigung der bekannten Jacobi'schen Identität, durch die äquivalenten Gleichungen:

$$((H_i, H_k) f) = \sum{}^s c_{iks} (H_s, f)$$

ersetzen. Eine jede von diesen letzten Relationen zerlegt sich in die $2n$ folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial (H_i, H_k)}{\partial p_j} = \sum{}^s c_{iks} \frac{\partial H_s}{\partial p_j}, \qquad \frac{\partial (H_i, H_k)}{\partial x_j} = \sum{}^s c_{iks} \frac{\partial H_s}{\partial x_j}.$$

Diese aber ziehen sich wiederum, wenn man sich erinnert, dass (H_i, H_k) hinsichtlich der p homogen von der ersten Ordnung ist, durch Integration in die einzige Relation

$$(H_i, H_k) = \sum{}^s c_{iks} H_s$$

zusammen.

Bezeichnen wir die infinitesimale Berührungstransformation (H, f) kurzweg mit H, so können wir die vorangehenden Entwickelungen folgendermassen resumiren:

Satz 7. *Die infinitesimalen Berührungstransformationen $H_1, H_2 \ldots H_r$ sind unabhängig, wenn sie durch keine lineare Relation:*

$$c_1 H_1 + c_2 H_2 + \cdots + c_r H_r = 0$$

mit constanten Coefficienten verknüpft sind. Sie bilden überdiess eine r-gliedrige Gruppe, wenn sie paarweise Relationen von der Form:

$$(H_i, H_k) = \sum{}^s c_{iks} H_s$$

befriedigen.

Dieser Satz, den ich aus meiner zweiten Abhandlung über Transformationsgruppen in meinem Archiv (Bd. I, p. 183; 1876) entnehme, dehnt sich offenbar ohne wesentliche Aenderung auf nicht homogene Gruppen von Berührungstransformationen aus.

In der citirten Abhandlung habe ich noch gezeigt, dass die Frage, ob eine vorgelegte Gruppe von Berührungstransformationen $H_1, H_2 \ldots H_r$ durch eine zweckmässige analytische Umformung in eine andere gegebene Gruppe $H_1' \ldots H_r'$ übergeführt werden kann, sich unmittelbar vermöge meiner in den Math. Ann. Bd VIII, p. 297—298 entwickelten Theorien erledigen lässt.

9. Jede discontinuirliche Gruppe von Substitutionen $S_1 \ldots S_r$ der Grössen $x_1, x_2 \ldots x_n$ lässt bekanntlich verschiedene Auffassungen

zu. Einerseits werden nämlich die Grössen x_k durch jede Substitution unter einander permutirt. Andererseits aber werden gleichzeitig auch die Substitutionen selbst unter sich permutirt. Bei Ausführung der Substitution S_k gehen nämlich die Substitutionen

$$S_1\, S_2 \dots S_r$$

der Reihe nach über in:

$$S_k\, S_1\, S_k^{-1} \quad S_k\, S_2\, S_k^{-1} \dots S_k\, S_r\, S_k^{-1}.$$

Diese Betrachtungen dehnen sich nun unmittelbar auf continuirliche Gruppen aus, wie hier gezeigt werden soll.

Es seien

$$Bf = \sum_1^n {}^k X_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

und

$$Cf = \sum_1^n {}^k \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

zwei beliebige infinitesimale Transformationen. Führe ich in Bf die neuen Variabeln

$$x_k' = x_k + \xi_k \delta t$$

ein, so wird:

$$Bf = \sum_1^n {}^k B(x_k + \xi_k\, \delta t)\, \frac{\partial f}{\partial x_k'} = \sum_1^n {}^k X_k \frac{\partial f}{\partial x_k'} + \delta t \sum_1^n {}^k B\xi_k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k'}\cdot$$

Nun aber ist, wenn von infinitesimalen Grössen zweiter Ordnung abgesehen wird:

$$X_k(x_1 \dots x_n) = X_k(x_1' \dots x_n') - \delta t\,.\,C X_k,$$

woraus

$$Bf = \sum_1^n {}^k X_k(x_1' \dots x_n')\, \frac{\partial f}{\partial x_k'} + \delta t \cdot \sum {}^k (B\xi_k - C X_k) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k'}$$

oder

$$Bf = \sum_1^n {}^k X_k(x_1' \dots x_n')\, \frac{\partial f}{\partial x_k'} + \delta t \left\{ B(C(f)) - C(B(f)) \right\}.$$

Wir können daher sagen, *dass die infinitesimale Transformation Bf sich durch Ausführung der infinitesimalen Transformation Cf in die unendlich benachbarte Transformation $Bf + \delta t\,(B, C)$ umwandelt.*

Man betrachte jetzt alle infinitesimalen Transformationen:

$$\alpha_1 B_1 f + \alpha_2 B_2 f + \dots + \alpha_r B_r f = \sum \alpha_i B_i f$$

einer r-gliedrigen Gruppe und führe auf sie die infinitesimale Transformation $B_k f$ aus. Dabei geht jede Transformation $\sum^i \alpha_i\,.\,B_i f$ über in die unendlich benachbarte Transformation:

$$\sum^i \alpha_i \{B_i + \delta t (B_i, B_k)\} \, .$$

Mit Benutzung der Formeln

(2) $$(B_i, B_k) = \sum^s c_{iks} B_s f$$

bekommen wir:

$$\sum^i \alpha_i B_i f + \delta t \sum^i \sum^s c_{iks} \alpha_i B_s f,$$

das heisst:

$$\sum^i \left(\alpha_i + \delta t \sum^j c_{jki} \alpha_j\right) B_i f \, .$$

Bringen wir diesen Ausdruck auf die Form

$$\sum^i (\alpha_i + \delta \alpha_i) B_i f,$$

so erhalten wir für die Incremente $\delta \alpha_i$ die Werthe

$$\delta \alpha_i = \delta t \sum^j c_{jki} \alpha_j .$$

Durch Ausführung der infinitesimalen Transformation $B_k f$ werden daher alle infinitesimalen Transformationen $\sum \alpha_i B_i f$ unter sich permutirt, und zwar erhalten die α_i die soeben bestimmten Incremente $\delta \alpha_i$. Für diese Auffassung ist es naturgemäss, die infinitesimale Transformation $B_k f$ mit dem Symbole

$$B_k' f = \sum^i \frac{\delta \alpha_i}{\delta t} \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \sum^i \left(\sum^j c_{j,k,i} \alpha_j\right) \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}$$

zu bezeichnen. Es ist dabei an sich klar, dass die Ausdrücke

$$B_1' f \ldots B_r' f,$$

wenn sie *unabhängige* infinitesimale Transformationen darstellen, eine mit der Gruppe $B_1 f \ldots B_r f$ gleichzusammengesetzte Gruppe bilden, dass also die Relationen

(3) $$(B_q', B_k') = \sum c_{qks} B_s' f$$

bestehen müssen. Diess lässt sich im Uebrigen folgendermassen direct verificiren.

Es ist:

$$B_q' f = \sum^s \sum^j c_{jqs} \alpha_j \frac{\partial f}{\partial \alpha_s},$$

$$B_k' f = \sum^\sigma \sum^j c_{jk\sigma} \alpha_j \frac{\partial f}{\partial \alpha_\sigma},$$

also wird:

$$(B_q', B_k') = \sum^\sigma \frac{\partial f}{\partial \alpha_\sigma} \cdot \sum^s \sum^j (c_{jqs} \cdot c_{sk\sigma} - c_{jks} \cdot c_{sq\sigma}) \alpha_j .$$

Wir behaupten, dass dieser Ausdruck die Form

$$\sum^{\sigma} \frac{\partial f}{\partial a_\sigma} \sum^{s} \sum^{j} c_{qks}\, c_{js\sigma}\, \alpha_j$$

erhalten kann, oder was auf dasselbe hinauskommt, dass die Summe

$$\sum^{s} (c_{jqs}\, c_{sk\sigma} - c_{jks}\, c_{sq\sigma} - c_{qks}\, c_{js\sigma})$$

identisch verschwindet. Dass diess wirklich eintrifft, verificirt man unmittelbar, indem man die Jacobi'sche Identität

$$((B_j, B_q) B_k) + ((B_q, B_k) B_j) + ((B_k, B_j) B_q) = 0$$

bildet und mit Benutzung der Formeln (2) ausführt. Damit ist also die Richtigkeit der Formeln (3) nachgewiesen.

Es bleibt die Frage übrig, ob die r infinitesimalen Transformationen $B'_k f$ unabhängig sind.

Wir bemerken, dass ein Ausdruck $B'_q f$ nur in dem speciellen Falle identisch verschwinden kann, wenn alle c_{jqi} gleich Null sind, anders ausgesprochen, wenn alle (B_j, B_q) gleich Null sind. Daraus erkennen wir, dass die $B'_k f$ unabhängig sind, ausgenommen, wenn es eine infinitesimale Transformation $\sum \alpha_k B_k f$ giebt, welche mit allen infinitesimalen Transformationen $B_i f$ vertauschbar ist. Diess giebt zunächst:

Satz 8. *Bilden $B_1 f \ldots B_r f$ eine r-gliedrige Gruppe, die keine ausgezeichnete (das heisst keine mit allen Transformationen vertauschbare) infinitesimale Transformation enthält und bestehen die Relationen:*

$$(B_i, B_k) = \sum c_{iks} B_s,$$

so bilden die linearen infinitesimalen Transformationen

$$B'_k f = \sum^{i} \left(\sum^{j} c_{jki}\, \alpha_j \right) \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}$$

*wiederum eine r-gliedrige Gruppe, die mit der ursprünglichen gleichzusammengesetzt ist.**)

Satz 9. *Ist eine ganz beliebige r-gliedrige Gruppe vorgelegt, so ist es immer möglich eine gleichzusammengesetzte lineare Gruppe aufzustellen.*

*) Es mag hier ausdrücklich hervorgehoben werden, dass die Entwickelungen des Textes, die ich zum ersten Male in meinem Archiv (Bd. I, p. 191; 1876 und Bd. III, p. 101 fg., siehe auch Gött. Nachr. 1874) publicirt habe, darauf hinauskommen, dass ich den Inbegriff aller infinitesimalen Transformationen einer Gruppe als *eine homogene projectivische Mannigfaltigkeit*, die durch eine *lineare* Gruppe transformirt wird, betrachte. Diese Auffassung ist eigentlich in allen meinen Arbeiten auf diesem Gebiete fundamental. Sie lässt sich verallgemeinern, indem man auch die endlichen Transformationen als Individuen betrachtet. (Siehe Stephanos Abhandl. in den Math. Ann. Bd. XXII, p. 331, 1883). Man kann $\Sigma c_i A_i f$ auch als Symbol einer *endlichen* Transformation der Gruppe betrachten.

Enthält nämlich die Gruppe $B_1 f \dots B_r f$ gewisse, etwa ϱ ausgezeichnete infinitesimale Transformationen, so brauchen wir nur zu der linearen $(r - \varrho)$-gliedrigen Gruppe $B'_k f$ in den Variabeln $\alpha_1 \dots \alpha_r$, die weiteren infinitesimalen Transformationen

$$\alpha_{r+1} \frac{\partial f}{\partial \alpha_{r+1}}, \quad \alpha_{r+2} \frac{\partial f}{\partial \alpha_{r+2}}, \quad \alpha_{r+\varrho} \frac{\partial f}{\partial \alpha_{r+\varrho}}$$

hinzuzufügen. Hierdurch erhalten wir wirklich eine mit der Gruppe $B_k f$ gleichzusammengesetzte, lineare Gruppe in $r + \varrho$ Variabeln

$$\alpha_1 \dots \alpha_r \dots \alpha_{r+\varrho}.$$

10. Es sei jetzt vorgelegt eine beliebige Gruppe:

$$B_k f = \sum \xi_{ki}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

ferner eine beliebige weitere infinitesimale Transformation:

$$Cf = \eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \eta_n \frac{\partial f}{\partial x_n};$$

endlich mögen r Relationen von der Form bestehen:

$$(B_k, C) = c_{k1} B_1 + c_{k2} B_2 + \dots + c_{kr} B_r.$$

Setze ich nun:

$$x'_k = x_k + \eta_k \delta t,$$

so bleibt die Gruppe $B_k f$ nach dem Obenstehenden invariant bei Einführung der Variabeln x'_k, während ihre infinitesimalen Transformationen im Allgemeinen unter einander vertauscht werden. Erinnern wir uns daher, dass durch unendlichmalige Wiederholung der infinitesimalen Transformation Cf eine eingliedrige Gruppe:

$$y_k = F_k(x_1 \dots x_n a)$$

erzeugt wird, so erkennen wir, dass die Gruppe $B_k f$ ebenfalls invariant bleibt, wenn die Grössen y_k als unabhängige Variable eingeführt werden. Hieraus ergeben sich nun ohne weiteres die beiden folgenden Sätze:

Satz 10. *Stehen zwei Gruppen $B_k f$ und $C_i f$ in solcher gegenseitigen Beziehung, dass jedes (B_k, C_i) sich als Summe der $B_k f$ multiplicirt mit Constanten ausdrückt, und sind $y_k = F_k(x_1 \dots c_1 \dots)$ die endlichen Gleichungen der Gruppe $C_i f$, so behält die Gruppe $B_k f$ ihre Form, wenn die Grössen y_k als neue Variable eingeführt werden.*

Satz 11. *Bilden die infinitesimalen Transformationen $B_1 \dots B_q \dots B_r$ eine Gruppe mit der Untergruppe $B_1 \dots B_q$ und bestehen dabei q Relationen von der Form:*

$$(B_i, B_k) = c_{ik1} B_1 + \dots + c_{ikq} B_q \quad (i = 1, 2, \dots, q),$$

so lässt jede endliche Transformation der r-gliedrigen Gruppe die q-gliedrige Untergruppe invariant.

Vergl. hierzu die dritte Abhandlung über Transformationsgruppen in meinem Archive Bd. 3, p. 104, 1878.

§ 4.

Criterien für die Aehnlichkeit zweier Transformationsgruppen.

Die Frage, ob eine vorgelegte Gruppe von *Berührungstransformationen* $(H_1 f) \dots (H_r f)$ mit den Variabeln $x_1 \dots x_n$, $p_1 \dots p_n$ durch eine zweckmässige *Berührungstransformation* in eine gewisse andere Gruppe $(H_1' f) \dots (H_r' f)$ in den Variabeln $x_1' \dots x_n'$, $p_1' \dots p_n'$ übergeführt werden kann, lässt sich, wie ich in Nummer 8. angegeben habe, ziemlich leicht erledigen.

Viel schwieriger zu beantworten ist die Frage, ob eine gegebene Gruppe von Punkttransformationen $B_1 f \dots B_r f$ mit den Variabeln $y_1 \dots y_\nu$ durch eine *Punkttransformation*, das heisst durch Einführung neuer Variabeln

$$y_k' = F_k(y_1 \dots y_\nu)$$

in eine andere Gruppe $B_k' f$ übergeführt werden kann, ob also r Relationen:

$$B_k f = \sum{}^i c_{ki} B_i' f$$

mit gewissen Constanten c_{ki} befriedigt werden können. Die von mir schon im Anfange des Jahres 1878 (Archiv for Math. Bd. 3, p. 116) gegebene Behandlung dieses Problems soll in diesem Paragraphen mit einer 1879 angegebenen Verbesserung reproducirt werden.

11. Es seien also vorgelegt zwei r-gliedrige *gleichzusammengesetzte* Gruppen von Punkttransformationen:

$$B_1 f,\ B_2 f, \dots, B_r f, \qquad (y_1, y_2, \dots, y_\nu),$$
$$B_1' f,\ B_2' f, \dots, B_r' f, \qquad (y_1', y_2', \dots, y_\nu').$$

Ich setze voraus, dass die $B_k' f$ in allgemeinster Weise derart gewählt worden sind, dass in den Relationen:

$$(B_i, B_k) = \sum c_{iks} B_s f, \quad (B_i', B_k') = \sum c_{iks}' B_s'$$

jedesmal c_{iks} gleich c_{iks}' ist. Es handelt sich nun um die einfachsten Criterien, vermöge deren sich entscheiden lässt, ob solche Relationen

$$y_k' = F_k(y_1, y_2 \dots y_\nu)$$

zwischen den y_k' und den y_k herstellbar sind, dass jede Grösse $B_k f$ in den Variabeln y_i' die Form $B_k' f$ erhält.

Wir nehmen an, dass $B_1 f \dots B_n f$ durch keine lineare Relation

$\sum \beta_k B_k f = 0$ verknüpft sind, während dagegen Gleichungen von der Form

$$B_{n+k} = \varphi_{k1} B_1 f + \cdots + \varphi_{kn} B_n f \quad (k = 1 \ldots r - n)$$

bestehen. Soll dann die verlangte Transformation möglich sein, so darf zunächst keine Relation $\beta_1' B_1' + \cdots + \beta_n' B_n' = 0$ bestehen, während dagegen Gleichungen von der Form

$$B_{n+k}' = \varphi_{k1}' B_1' + \cdots + \varphi_{kn}' B_n'$$

stattfinden müssen. Die Annahme $B_i = B_i'$ führt daher auf die Relationen:

$$(\varphi_{k1} - \varphi_{k1}') B_1 + \cdots + (\varphi_{kn} - \varphi_{kn}') B_n = 0,$$

welche sich in die $(r - n)n$ Gleichungen

$$\varphi_{k1} = \varphi_{k1}' \ldots \varphi_{kn} = \varphi_{kn}'$$

zerlegen. Ein nothwendiges Criterium ist daher, dass die soeben geschriebenen Gleichungen nicht contradictorisch sind. Ist diess wirklich nicht der Fall, dann behaupte ich, ist die verlangte Transformation immer möglich.

12. Zunächst soll der allerdings einfache, aber besonders wichtige Fall: $\nu = r = n$ erledigt werden.

Ich betrachte also zwei n-gliedrige, gleichzusammengesetzte Gruppen:

$$B_1 f \ldots B_n f, \quad (y_1 \ldots y_n),$$
$$B_1' f \ldots B_n' f, \quad (y_1' \ldots y_n'),$$

in welchen weder die $B_k f$ noch die $B_k' f$ durch lineare Relationen verknüpft sind. Die $B_k' f$ mögen wie oben in allgemeinster Weise so gewählt sein, dass in den Relationen

$$(B_i, B_k) = \sum c_{iks} B_s, \quad (B_i', B_k') = \sum c_{iks}' B_s$$

immer $c_{iks} = c_{iks}'$ ist. Alsdann giebt es, behaupte ich, immer eine Transformation $y_k' = F_k(y_1 \ldots y_n, a_1 \ldots a_n)$, welche überdiess n arbiträre Constanten a_k enthält, vermöge deren jede Grösse $B_k f$ die Form $B_k' f$ annimmt.

Um diess in einfacher Weise nachzuweisen, bemerken wir, dass wegen $c_{iks} = c_{iks}'$ die Gleichungen

$$B_k f + B_k' f = \mathsf{B}_k f \quad (y_1 \ldots y_n, y_1' \ldots y_n')$$

ein vollständiges System mit n Lösungen $\Omega_1 \ldots \Omega_n$ bilden. Dabei können die Gleichungen:

$$\Omega_k (y_1 \ldots y_n, y_1' \ldots y_n') = a_k$$

nach den y_k' (wie auch nach den y_k) aufgelöst werden, weil sich die Gleichungen $B_k f + B_k' f = 0$ nach den Differentialquotienten:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial y_n}$$

auflösen lassen. Ich behaupte, dass die in dieser Weise erhaltenen Relationen:

$$y_k' = F_k(y_1 \dots y_n, a_1 \dots a_n)$$

als Transformationsgleichungen aufgefasst, jede Grösse $B_k f$ auf die Form $B_k' f$ bringen. Man führe in der That auf $y_i' - F_i$ die Operationen B_k aus, dann verschwinden die hervorgehenden Ausdrücke $\mathsf{B}_k(y_i' - F_i)$ vermöge der Relationen $y_i' - F_i = 0$. Dies giebt die Gleichungen:

$$B_k' y_i' = B_k F_i = B_k y_i'$$

und durch Multiplication mit $\frac{\partial f}{\partial y_i'}$ und Summation wird:

$$\sum_i B_k' y_i' \cdot \frac{\partial f}{\partial y_i'} = \sum_i B_k y_i' \cdot \frac{\partial f}{\partial y_i'}$$

oder was auf dasselbe hinauskommt

$$B_k' f = B_k f,$$

womit die verlangte Transformation geleistet ist.

Nenne ich eine n-gliedrige Gruppe $B_1 f \dots B_n f$ in n Variabeln $y_1 \dots y_n$ *einfach transitiv*, wenn keine lineare Relation $\sum \beta_i B_i f = 0$ besteht, anders ausgesprochen, wenn jedes Werthsystem y_k durch *eine* infinitesimale Transformation der Gruppe, und zwar *nur* in *einer* Weise, in *jedes* (benachbarte) Werthsystem $y_k + \Delta y_k$ übergeführt werden kann, so lassen sich die Resultate dieser Nummer folgendermassen zusammenfassen:

Satz 12. *Zwei einfach transitive, gleichzusammengesetzte Gruppen $B_k f$ und $B_k' f$, die gleichviele und zwar n Variabeln y_k und y_k' enthalten, sind immer ähnlich. Wünscht man die eine Gruppe in allgemeinster Weise in die andere überzuführen, so wählt man zunächst die $B_k' f$ möglichst allgemein derart, dass in den Relationen*

$$(B_i, B_k) = \sum c_{iks} B_s, \qquad (B_i', B_k') = \sum c_{iks}' B_s'$$

immer $c_{iks} = c_{iks}'$ ist. Darnach bildet man das vollständige System $B_k f + B_k' f = 0$ und löst dessen Integralgleichungen:

$$\Omega_k(y_1 \dots y_n, y_1' \dots y_n') = a_k = \text{Const.}$$

nach den y_k' auf. Die hierdurch erhaltenen Relationen sind die allgemeinsten Gleichungen, welche die verlangte Transformation leisten.

Somit ist unser Transformationsproblem zurückgeführt auf die Integration des vollständigen Systems $B_k f + B_k' f = 0$. Setzen wir insbesondere voraus, dass wir die *endlichen* Transformationen einer jeden der beiden Gruppen kennen, so kann, wie wir jetzt zeigen wollen, diese Integration immer geleistet werden. Die endlichen Transformationen der Gruppe $B_k f$ werden ja nach unseren früheren Ent-

wickelungen (siehe z. B. Math. Ann. Bd. XVI, p. 464) bestimmt durch die Integration der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \lambda_1 B_1 f + \lambda_2 B_2 f + \cdots + \lambda_n B_n f = 0$$

mit den arbiträren Parametern λ_k. Kennen wir daher die endlichen Transformationen der Gruppe $B_k f$, so ist es ohne weiteres möglich, jede einzelne unter den Gleichungen $B_k f = 0$ zu integriren. Kennen wir nun gleichzeitig die endlichen Transformationen der Gruppe $B_k' f$, so sind auch die Integralgleichungen einer beliebigen Gleichung $B_k' f = 0$ aufstellbar. Hiernach finden wir die Integralgleichungen einer jeden einzelnen Gleichung

$$B_k f + B_k' f = 0$$

durch Quadraturen, die überdies erspart werden können. Nun aber kann die Integration eines vollständigen Systems immer ohne weiteres geleistet werden, wenn jede einzelne Gleichung des Systems integrirt ist.

Kennen wir daher die endlichen Gleichungen der beiden im vorangehenden Satze definirten Gruppen $B_k f$ und $B_k' f$, so können diejenigen Transformationsgleichungen, welche die eine Gruppe in die andere überführen, immer ohne Integrationen aufgestellt werden.

Die vorangehenden Entwickelungen geben insbesondere die allgemeinste Transformation, welche eine vorgelegte einfach-transitive Gruppe $B_1 f \ldots B_n f$ zwischen n Variabeln in sich überführt. Mit diesem speciellen Probleme beschäftigen wir uns eingehend im nächsten Paragraphen.

Ich werde nicht unterlassen den Satz 12. durch ein schönes Beispiel aus der Geometrie des Raumes zu illustriren. Alle projectivischen Transformationen des Raumes, die eine doppeltgekrümmte Curve dritter Ordnung invariant lassen, erzeugen eine einfach transitive Gruppe, deren drei infinitesimale Transformationen $B_1 f$, $B_2 f$, $B_3 f$ derart gewählt werden können, dass die Relationen

$$(B_1, B_2) = B_1, \quad (B_1, B_3) = 2B_2, \quad (B_2, B_3) = B_3$$

bestehen. Eine gleichzusammengesetzte und ebenfalls einfach transitive Gruppe bilden alle projectivischen Transformationen des Raumes, welche sämmtliche Gerade des einen Systems einer Fläche zweiten Grades invariant lassen. Daher sind die beiden besprochenen Gruppen ähnlich; selbstverständlich geschieht die Ueberführung der einen Gruppe in die zweite nicht durch eine projectivische Transformation*). Hierauf gründet sich ein merkwürdiger Zusammenhang zwischen der Theorie

*) Diejenige algebraische Transformation, welche die eine Gruppe in die zweite umwandelt, führt alle geraden Linien in Curven dritter Ordnung über, die eine feste Curve 3. O. zweimal osculiren.

einer Fläche zweiten Grades und der Theorie einer Raumcurve dritter Ordnung.

13. Wir wenden uns jetzt zur Behandlung des allgemeinen Problems. Es seien also $B_1 f \ldots B_r f$ und $B_1' f \ldots B_r' f$ zwei gleichzusammengesetzte Gruppen in den Variabeln $y_1 \ldots y_\nu$ und $y_1' \ldots y_\nu'$. Dabei bestehen einerseits Relationen:

$$(B_i, B_k) = \sum c_{iks} B_s, \quad (B_i', B_k') = \sum c_{iks} B_s',$$

welche paarweise dieselbe Form besitzen, andererseits gewisse Gleichungen:

$$B_{n+k} = \sum_{i=1}^{i=n} \varphi_{ki} B_i, \qquad B_{n+k}' = \sum_{i=1}^{i=n} \varphi_{ki}' B_i' \quad (k = 1 \ldots r-n),$$

während weder $B_1 \ldots B_n$ noch $B_1' \ldots B_n'$ durch lineare Relationen verknüpft sind.

Soll es nun möglich sein, jeden Ausdruck $B_k f$ durch Einführung von zweckmässigen neuen Variabeln auf die Form $B_k' f$ zu bringen, so ist es, sahen wir, zunächst nothwendig, dass die Grössen y_k und y_k' durch die Relationen $\varphi_{ki} = \varphi_{ki}'$, welche somit nicht contradictorisch sein dürfen, verknüpft sind. Ist die Forderung, dass alle Gleichungen $\varphi_{ki} = \varphi_{ki}'$ gleichzeitig bestehen können, erfüllt, so ist die verlangte Transformation möglich, wie jetzt gezeigt werden soll.

Zunächst bilden wir die Gleichungen:

$$(B_i, B_{n+k}) = \left(B_i, \sum_1^n {}_j\, \varphi_{kj} B_j\right) = \sum_1^n {}_j\, B_i \varphi_{kj} . B_j + \sum_1^n {}_j\, \varphi_{kj} (B_i, B_j).$$

Führen wir hier sowohl links als rechts die obenstehenden Werthe der Grössen (B_i, B_q) ein und erinnern uns dabei, dass $B_1 \ldots B_n$ durch keine lineare Relation verknüpft sind, so erhalten wir die Grössen $B_i \varphi_{kj}$ ausgedrückt als Functionen der φ_{ki} und der c_{iks}:

(Ω) $$B_i \varphi_{kj} = \Omega_{ikj} (\varphi_{11}, \varphi_{12} \ldots c_{121} \ldots).$$

Eine ganz analoge Ueberlegung giebt die genau ebenso gestalteten Gleichungen:

(Ω') $$B_i' \varphi_{kj}' = \Omega_{ikj} (\varphi_{11}', \varphi_{12}' \ldots c_{121} \ldots)$$

und also ziehen die Relationen $\varphi_{kj} = \varphi_{kj}'$ die folgenden nach sich:

$$B_i \varphi_{kj} = B_i' \varphi_{kj}'.$$

Unter den Grössen φ_{ki} giebt es einige unabhängige, welche $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_\mu$ heissen mögen; durch diese lassen sich die übrigen φ_{ki} etwa folgendermassen ausdrücken:

(W) $$\varphi_{ki} = W_{ki} (\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_\mu).$$

Dementsprechend giebt es genau ebensoviele unabhängige Grössen φ_{ki}': $\varphi_1', \varphi_2' \ldots \varphi_\mu'$, während die übrigen φ_{ki}' die Form

(W') $\qquad \varphi'_{ki} = W_{ki}(\varphi_1', \varphi_2' \ldots \varphi_\mu')$

besitzen.

Die n Gleichungen

$$B_1 f = 0, \quad B_2 f = 0 \ldots B_n f = 0$$

bilden ein vollständiges System mit $\nu - n$ Lösungen, welche ich mit $x_{n+1}\, x_{n+2} \ldots x_p \ldots x_\nu$ bezeichnen werde. Unter ihnen giebt es eine gewisse Anzahl, etwa $\nu - p$, die nur von $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_\mu$ abhängen; es seien diess:

$$x_{p+k} = f_{p+k}(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_\mu), \quad (k = 1 \ldots \nu - p).$$

Ebenso hat auch das vollständige System

$$B_1' f = 0, \quad B_2 f = 0 \ldots B_n' f = 0$$

$\nu - n$ Lösungen, nämlich $x'_{n+1}, x'_{n+2} \ldots x_p' \ldots x_\nu'$, unter denen $\nu - p$, nämlich $x'_{p+1} \ldots x_\nu'$:

$$x'_{p+k} = f_{p+k}(\varphi_1' \ldots \varphi_\mu')$$

nur von den φ_k' abhängen.

Im Allgemeinen ist die Zahl μ grösser als $\nu - p$; jedenfalls können wir daher $\mu - \nu + p = m$ von $x_{p+1} \ldots x_\nu$ unabhängige Functionen der φ_k wählen, die wir mit $x_1, x_2 \ldots x_m$

$$x_k = f_k(\varphi_1 \ldots \varphi_\mu), \quad (k = 1, 2 \ldots m)$$

bezeichnen. Entsprechend setzen wir:

$$x_k' = f_k(\varphi_1' \ldots \varphi_\mu'), \quad (k = 1, 2 \ldots m).$$

Es lässt sich nun leicht einsehen, dass eine Relation von der Form

$$\Pi(x_1 \ldots x_m, x_{n+1} \ldots x_\nu) = 0$$

nicht stattfinden kann. Im entgegengesetzten Fall käme nämlich:

$$B_k x_1 \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} + B_k x_2 \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} + \cdots + B_k x_m \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial x_m} = 0$$

und es wäre dabei immer möglich m solche Werthe $k_1 \ldots k_m$ der Zahl k anzugeben, dass die entsprechende Determinante:

$$(B_{k_1} x_1, B_{k_2} x_2 \ldots B_{k_m} x_m)$$

nicht verschwände, weil sonst die Gleichungen $B_k f = 0$ eine gemeinsame Lösung von der Form $w(x_1 \ldots x_m, x_{p+1} \ldots x_\nu)$ besässen, die nicht von $x_1 \ldots x_m$ frei wäre. Also würde folgen:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = 0, \ \cdots, \ \frac{\partial \Pi}{\partial x_m} = 0;$$

und da die Grössen $x_{n+1} \ldots x_\nu$ als unabhängige Lösungen des vollständigen Systems $B_k f = 0$ nicht durch eine Relation $\Pi(x_{n+1} \ldots x_\nu) = 0$ verknüpft sein können, so ist hiermit nachgewiesen, dass zwischen den Grössen $x_1 \ldots x_m, x_{n+1} \ldots x_\nu$ keine Relation besteht.

Wir führen jetzt $x_1 \ldots x_m, x_{n+1} \ldots x_\nu$ zusammen mit $n - m$

weiteren beliebigen Functionen der y_k, welche $x_{m+1} \dots x_n$ heissen mögen, als neue Variabeln statt der y_k ein. Entsprechend ersetzen wir die y_k' durch die Grössen $x_1' \dots x_m', x_{n+1}' \dots x_p' \dots x_\nu'$ zusammen mit $n-m$ beliebigen Functionen $x_{m+1}' \dots x_n'$ der y_k'.

In den Variabeln x_i erhalten die B_kf, da $x_{n+1} \dots x_\nu$ gemeinsame Lösungen der Gleichungen $B_kf = 0$ sind, die Form:

$$B_kf = \sum_1^m {}^i X_{ki}(x_1 \dots x_m,\ x_{p+1} \dots x_\nu) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$
$$+ \sum_{m+1}^n {}^j X_{kj}(x_1 \dots x_m \dots x_n \dots x_p \dots x_\nu) \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Entsprechend erhalten die $B_k'f$ die analoge Form:

$$B_k'f = \sum_1^m {}^i X_{ki}'(x_1' \dots x_m',\ x_{p+1}' \dots x_\nu') \frac{\partial f}{\partial x_i'}$$
$$+ \sum_{m+1}^n {}^j Y_{kj}(x_1' \dots x_m' \dots x_n' \dots x_p' \dots x_\nu') \frac{\partial f}{\partial x_j'}.$$

Dabei zeigen die Formeln (Ω), (Ω'), (W), (W') einerseits, dass $X_{k1} \dots X_{km}$ nur von $x_1 \dots x_m,\ x_{p+1} \dots x_\nu$ und $X_{k1}' \dots X_{km}'$ nur von $x_1' \dots x_m',\ x_{p+1}' \dots x_\nu'$ abhängen, andererseits dass X_{ki} und X_{ki}' ein und dieselben Functionen sind, wenn auch mit verschiedenen Argumenten, dass also

$$X_{ki}'(x_1' \dots x_m',\ x_{p+1}' \dots x_\nu') = X_{ki}(x_1' \dots x_m',\ x_{p+1}' \dots x_\nu')$$
$$(i = 1, 2 \dots m)$$

ist. Wir können daher

$$B_k'f = \sum_1^m {}^i X_{ki}(x_1' \dots x_m',\ x_{p+1}' \dots x_\nu') \frac{\partial f}{\partial x_i'}$$
$$+ \sum_{m+1}^n {}^j Y_{kj}(x_1' \dots x_m' \dots x_n' \dots x_p' \dots x_\nu') \frac{\partial f}{\partial x_j'}$$

setzen.

Nach diesen Vorbereitungen bilden wir die Ausdrücke:

$$\mathsf{B}_kf = \sum_1^m {}^i X_{ki}(x_1 \dots x_m,\ x_{p+1} \dots x_\nu) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$
$$+ \sum_{m+1}^n {}^j X_{kj}(x_1 \dots x_m \dots x_n \dots x_p \dots x_\nu) \frac{\partial f}{\partial x_j}$$
$$+ \sum_{m+1}^n {}^j Y_{kj}(x_1 \dots x_m,\ x_{m+1}' \dots x_n',\ x_{n+1} \dots x_p \dots x_\nu) \frac{\partial f}{\partial x_j'},$$

in denen die Grössen $x_1 \dots x_m \dots x_n,\ x'_{m+1} \dots x'_n$ als Variabeln auftreten, und erkennen unter Berücksichtigung der Relationen:

$$(B_i, B_k) = \sum c_{iks} B_s, \qquad (B'_i, B'_k) = \sum c_{iks} B'_s,$$

$$B_{n+k} = \sum_1^n {}^i \varphi_{ki} B_i, \qquad B'_{n+k} = \sum_1^n {}^i \varphi'_{ki} B'_i$$

ohne Schwierigkeit, dass auch die analogen Relationen

$$(\mathsf{B}_i, \mathsf{B}_k) = \sum c_{iks} \mathsf{B}_s f, \qquad \mathsf{B}_{n+k} = \sum_{i=1}^{i=n} \varphi_{ki} \mathsf{B}_i$$

bestehen. Die Gleichungen

$$\mathsf{B}_1 f = 0, \quad \mathsf{B}_2 f = 0 \dots \mathsf{B}_n f = 0$$

bilden somit ein vollständiges System, das sich sowohl nach:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_m} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

als nach:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_m}, \quad \frac{\partial f}{\partial x'_{m+1}} \dots \frac{\partial f}{\partial x'_n}$$

auflösen lässt. Daher können die $n - m$ zugehörigen Integralgleichungen:

$$\Omega_k(x_1 \dots x_m \dots x_n \dots x_p \dots x_\nu,\ x'_{m+1} \dots x'_n) = a_k,$$
$$(k = 1, 2 \dots n - m)$$

nach $x'_{m+1} \dots x'_n$ (sowie auch nach $x_{m+1} \dots x_n$) aufgelöst werden, was ergiebt:

$$x'_{m+i} = F_{m+i}(x_1 \dots x_m \dots x_n \dots x_\nu,\ a_1 a_2 \dots a_{n-m}),$$
$$(m+1,\ m+2 \dots n).$$

Die Ausdrücke $\mathsf{B}_k(x'_{m+i} - F_{m+i})$ verschwinden jetzt sämmtlich vermöge der Relationen $x'_{m+i} = F_{m+i}$. Daher wird:

$$Y_{k,m+i}(x_1 \dots x_m,\ x'_{m+1} \dots x'_n,\ x_{n+1} \dots x_\nu) = B_k F_{m+i} = B_k x'_{m+i}$$

und

$$\sum_{m+1}^n {}^j Y_{k,j} \frac{\partial f}{\partial x'_j} = \sum_{m+1}^n B_k x'_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x'_j}.$$

Durch Addition von $\sum_1^m X_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i}$ links und rechts kommt noch:

$$\sum_1^m {}^i X_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{m+1}^n {}^j Y_{k,j} \frac{\partial f}{\partial x'_j} = \sum_1^m {}^i X_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{m+1}^n B_k x'_j \frac{\partial f}{\partial x'_j}:$$

Die linke Seite der letzten Gleichung geht in $B_k'f$ über, wenn die Grössen $x_1 \dots x_m, x_{n+1} \dots x_\nu$ resp. mit $x_1' \dots x_m', x_{n+1}' \dots x_\nu'$ vertauscht werden. Die rechte Seite derselben Gleichung entsteht, wenn in B_kf die Grössen

$$x_1 \dots x_m, \quad x_{m+1}' = F_{m+1} \dots x_n' = F_n, \quad x_{n+1} \dots x_\nu$$

als Variabeln eingeführt werden. Also lehrt uns die letzte Gleichung, dass jeder Ausdruck B_kf durch Einführung neuer Variabeln x_k' mit Hülfe der Gleichungen:

$$x_1' = x_1 \dots x_m' = x_m, \quad x_{m+1}' = F_{m+1} \dots x_n' = F_n,$$
$$x_{n+1}' = x_{n+1} \dots x_\nu' = x_\nu$$

in den entsprechenden Ausdruck $B_k'f$ übergeführt wird. *Es ist uns also wirklich gelungen die Gruppe B_kf in die Gruppe $B_k'f$ zu transformiren.*

Die gefundene Transformation enthält eine gewisse Anzahl arbiträrer Functionen, nämlich $x_{n+1}, x_{n+2} \dots x_p$, welche willkürlich wählbare, jedoch von $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_\mu$ unabhängige Lösungen des vollständigen Systems $B_kf = 0$ bezeichnen. Sie enthält ferner gewisse arbiträre Constanten, nämlich erstens $a_1, a_2 \dots a_{n-m}$, zweitens im Allgemeinen gewisse weitere Constanten, welche davon herrühren, dass man die früher besprochenen Relationen $c_{iks} = c_{iks}'$ immer auf mehrfache Weise herstellen kann. Hier mag noch ausdrücklich hervorgehoben werden, dass man durch Combination zweier endlicher Transformationen, von denen die eine der Gruppe B_kf angehört und somit diese Gruppe in sich transformirt, während die zweite die Gruppe B_kf in $B_k'f$ überführt, jedesmal eine neue Transformation erhält, welche ebenfalls die Gruppe B_kf auf die Form $B_k'f$ transformirt.

Wir resumiren die wichtigsten erhaltenen Resultate in folgendem Satze:

Theorem I. Sollen zwei r-gliedrige Gruppen zwischen ν Variabeln:

$$B_1f \dots B_rf, \qquad (y_1 \dots y_\nu),$$
$$B_1'f \dots B_r'f, \qquad (y_1' \dots y_\nu'),$$

vermöge einer Punkttransformation $y_k' = F_k(y_1 \dots y_\nu)$ ähnlich sein, so ist zunächst nothwendig, dass beide Gruppen gleichzusammengesetzt sind, dass man also die $B_k'f$ in solcher Weise wählen kann, dass gleichzeitig

$$(B_i, B_k) = \sum c_{iks} B_s \quad \text{und} \quad (B_i', B_k') = \sum c_{iks} B_s'$$

wird. Ist diese Forderung erfüllt, und bestehen ferner die Relationen:

$$B_{n+k} = \varphi_{k1} \cdot B_1 + \varphi_{k2} \cdot B_2 + \cdots + \varphi_{kn} \cdot B_n,$$
$$(k = 1 \ldots r - n),$$

während $B_1, B_2 \ldots B_n$ nicht durch eine lineare Relation verknüpft sind, so müssen analoge Relationen:

$$B'_{n+k} = \varphi'_{k1} B_1' + \varphi'_{k2} B_2' + \cdots + \varphi'_{kn} B'_n$$

stattfinden, während auch $B_1' \ldots B'_n$ keine lineare Gleichung befriedigen. Endlich dürfen die $n(r-n)$ Gleichungen $\varphi_{ki} = \varphi'_{ki}$ nicht contradictorisch sein. Diese nothwendigen Criterien sind gleichzeitig hinreichend.

14. Der eben ausgesprochene Satz besitzt eine fundamentale Bedeutung. Man kann ihn zum Ausgangspunkt für weitergehende Untersuchungen wählen, wie hier an einem bekannten Beispiel erläutert werden soll.

Es sei die Gruppe vorgelegt B_1, B_2, B_3 und es mögen die Relationen bestehen:

$$(B_1, B_2) = B_1, \quad (B_1, B_3) = 2B_2, \quad (B_2, B_3) = B_3,$$
$$B_3 = \varphi_1 B_1 + \varphi_2 B_2.$$

φ_1 und φ_2 bezeichnen gewisse Functionen der Variabeln $x_1 \ldots x_n$; B_1 und B_2 genügen keiner linearen Relation. Es sind nun zwei Fälle denkbar: φ_1 und φ_2 sind entweder von einander unabhängig oder sie sind durch eine Relation verknüpft. *Nehmen wir an, dass $\varphi_2 = \Omega(\varphi_1)$ ist, so ist die Function Ω vollständig bestimmt.* Wir erhalten nämlich die Gleichungen:

$$(B_1, B_3) = B_1\varphi_1 \cdot B_1 + B_1\varphi_2 \cdot B_2 + \varphi_2 B_1 = 2B_2,$$
$$(B_2, B_3) = B_2\varphi_1 \cdot B_1 + B_2\varphi_2 \cdot B_2 - \varphi_1 B_1 = B_3 = \varphi_1 B_1 + \varphi_2 B_2,$$

aus denen folgt:

$$B_1\varphi_1 + \varphi_2 = 0, \quad B_1\varphi_2 = 2, \quad B_2\varphi_1 = 2\varphi_1, \quad B_2\varphi_2 = \varphi_2,$$

oder wenn wir $\varphi_2 = \Omega(\varphi_1)$ einsetzen und $B_1\varphi_1$, $B_2\varphi_1$ wegschaffen:

$$-\Omega\Omega' = 2, \quad 2\varphi_1\Omega' = \Omega.$$

Also hat Ω die Form:

$$\Omega = \sqrt{-4\varphi_1} = \varphi_2.$$

Hieraus folgt, wie ich nicht näher auszuführen brauche, dass alle dreigliedrige Gruppen eines n-fach ausgedehnten Raumes, welche den oben gemachten Voraussetzungen genügen, ähnlich sind.

Für beliebige Gruppen von Punkttransformationen gelten analoge Sätze, auf die ich bei einer anderen Gelegenheit zurückzukommen gedenke.

Hier möge noch die folgende Bemerkung ihren Platz finden. Kann die vorgelegte Gruppe $B_k f$ durch eine allerdings unbekannte

Transformation auf die Form $B_k f$ gebracht werden, und *sind gleichzeitig die* **endlichen** *Transformationen unserer beiden Gruppen gegeben, so verlangt die allgemeinste Ueberführung der Gruppe $B_k f$ in die Form $B_k' f$ nur ausführbare Operationen.* Die Integration einer jeden einzelnen Gleichung $B_k f = 0$ kann nämlich geleistet werden, wenn die beiden Gleichungen $B_k f = 0$ und $B_k' f = 0$ integrirt sind, das heisst, wenn man die endlichen Transformationen unserer beiden Gruppen kennt. Unter denselben Voraussetzungen können auch die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen $B_k f = 0$, wie auch der Gleichungen $B_k' f = 0$ aufgestellt werden.

15. Wir gehen jetzt dazu über, wenigstens andeutungsweise die allgemeinere Frage zu behandeln, ob r gegebene Ausdrücke $B_1 f \dots B_r f$, *die keine Gruppe bilden*, sich durch Einführung von neuen Variabeln in gewisse andere gegebene Ausdrücke $B_1' f \dots B_r' f$ transformiren lassen. Indem wir uns daran erinnern, dass das Jacobi'sche Symbol $B_i(B_k(f)) - B_k(B_i(f))$ sich gegenüber allen Punkttransformationen als Invariante verhält, reduciren wir unser Problem leicht auf den Fall, dass Relationen von der Form:

$$(B_i, B_k) = \sum_1^n {}_s\, \alpha_{iks} B_s, \qquad (B_i', B_k') = \sum_1^n {}_s\, \alpha_{iks}' B_s',$$

$$B_{n+k} = \varphi_{k1} B_1 + \dots + \varphi_{kn} B_n, \quad B_{n+k}' = \varphi_{k1}' B_1' + \dots + \varphi_{kn}' B_n'$$

bestehen, während weder $B_1 \dots B_n$ noch $B_1' \dots B_n'$ durch lineare Gleichungen verknüpft sind. Die α_{iks}, α_{iks}', φ_{ki}, φ_{ki}' hängen dabei bezüglich von $y_1 \dots y_n$ und $y_1' \dots y_n'$ ab.

Soll die verlangte Transformation möglich sein, so dürfen zunächst die Gleichungen $\alpha_{iks} = \alpha_{iks}'$, $\varphi_{ki} = \varphi_{ki}'$ nicht contradictorisch sein. Ist diese Forderung erfüllt, so liefern die genannten Gleichungen eine gewisse Anzahl unabhängiger Relationen zwischen den y_k und den y_k':

$$W_k(y_1 \dots y_r) = W_k'(y_1' \dots y_r'),$$
$$(k = 1, 2 \dots q),$$

zu denen die weiteren Gleichungen:

$$B_i W_k = B_i' W_k', \quad B_j B_i W_k' = B_j' B_i' W_k' \quad \text{etc.}$$

gefügt werden müssen. Verfährt man in dieser Weise, so findet man im Allgemeinen zuletzt contradictorische Gleichungen. Tritt dieser Umstand niemals ein, wie oft man auch die angegebenen Operationen wiederholt, so ist die verlangte Transformation möglich. Es ergiebt sich das durch Betrachtungen, welche den früher angestellten vollständig analog sind. Ich behalte mir vor, die angedeuteten Theorien bei einer anderen Gelegenheit genauer auszuführen und gleichzeitig schärfer zu begrenzen.

Die in dieser Nummer skizzirte Theorie steht im Uebrigen offenbar in genauester Beziehung zu der Frage nach allen Invarianten von ϱ gegebenen Ausdrücken $B_1f \dots B_\varrho f$ gegenüber allen Punkttransformationen.

Noch allgemeinere Probleme erhält man, wenn man annimmt, dass die gegebenen Ausdrücke B_kf gewisse arbiträre Bestandtheile enthalten.

§ 5.

Einfach transitive Gruppen, die in reciproker Beziehung stehen.

In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns mit *einfach transitiven* Gruppen der Variabeln $x_1 \dots x_n$, das heisst mit n-gliedrigen Gruppen, deren inf. Transformationen

$$B_kf = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_{ki}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (k = 1, 2 \dots n),$$

keiner linearen Relation von der Form $\sum \beta_i B_i f = 0$ genügen. Neben jede derartige Gruppe stellt sich, werden wir zeigen, eine ganz bestimmte, ebenfalls einfach transitive Gruppe, deren Transformationen:

$$C_kf = \sum_{i=1}^{i=n} \eta_{ki}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (k = 1, 2 \dots n)$$

durch die Relationen $(B_i, C_k) = 0$ vollständig definirt sind. Jede Transformation der einen Gruppe ist demnach mit jeder Transformation der anderen *vertauschbar*.

16. In B_kf ersetzen wir jedes x_i durch x_i' und erhalten:

$$B_k'f = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_{ki}(x_1' \dots x_n') \frac{\partial f}{\partial x_i'}.$$

Um die *allgemeinste* Transformation $x_i = F_i(x_1' \dots x_n')$, vermöge deren jeder Ausdruck B_kf in $B_k'f$ übergeführt wird, zu bestimmen, bilden wir nach den Entwicklungen des vorangehenden Paragraphen das vollständige System:

$$B_kf + B_k'f = 0, \quad (k = 1, 2 \dots n)$$

und lösen seine Integralgleichungen:

$$\Omega_k(x_1 \dots x_n, \; x_1' \dots x_n') = a_k$$

nach den x_k auf. Die hervorgehenden Relationen

$$x_k = F_k(x_1' \dots x_n', \; a_1 \dots a_n)$$

bilden die allgemeinste Transformation der verlangten Art. Geben wir den Parametern a_k alle möglichen Werthe, so entsteht eine Schaar

Transformationen von der Eigenschaft, dass *auch die Succession zweier derartiger Transformationen* die Form eines jeden $B_k f$ invariant lässt und folglich *mit einer einzigen Transformation der Schaar äquivalent ist.* Alle Transformationen unserer Schaar bilden somit eine Gruppe. Da sie von n wesentlichen, continuirlichen Parametern a_k abhängen, so giebt es unter ihnen gewisse, und zwar n unabhängige infinitesimale Transformationen*), welche $C_1 f$, $C_2 f \dots C_n f$ heissen mögen.

Wir werden zeigen, dass die Gruppe $C_k f$ einfach transitiv ist, das heisst, dass der Ausdruck $\sum \gamma_k C_k$ nie identisch verschwindet, welche Functionen der x auch die γ_k bezeichnen mögen. Man setze in der That:

$$\sum^i \frac{\partial F_i}{\partial a_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} = D_k f;$$

alsdann bestehen nach meinen früheren Untersuchungen (siehe z. B. Math. Ann. Bd. XVI, p. 461) Relationen von der Form:

$$D_k f = \sum^i \psi_{ki}(a_1, a_2 \dots a_n)\, C_i f,$$

wo die ψ_{ki} nur von den Parametern a_j abhängen. Bestände nun eine Gleichung $\sum^i \gamma_i C_i f = 0$, so erhielte man eine analoge Gleichung $\sum^i \delta_i D_i f = 0$, so dass die Functionaldeterminante

$$\left(\begin{matrix} F_1 F_2 \dots F_n \\ a_1\, a_2 \dots a_n \end{matrix} \right)$$

gleich Null wäre. Diess ist aber unmöglich, da sich die Gleichungen $x_k = F_k$ nach den a_k auflösen lassen. Relationen von der Form $\sum^i \gamma_i C_i f = 0$ bestehen daher nicht, und *die n-gliedrige Gruppe $C_i f$ ist also wirklich einfach transitiv.*

Jede inf. Transformation der Gruppe $C_i f$, etwa:

$$Cf = \eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \eta_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

lässt sich auch folgendermassen schreiben:

$$x_1' = x_1 + \delta t \cdot \eta_1, \dots, x_n' = x_n + \delta t \cdot \eta_n.$$

---

*) Vgl. hierzu z. B. Math. Ann. Bd. XVI, p. 457. Dass eine continuirliche Schaar von Transformationen mit n Parametern, welche dadurch definirt ist, dass sie gewisse analytische Gebilde invariant lässt, eine Gruppe mit einer identischen Transformation und also mit *infinitesimalen* Transformationen bestimmt, habe ich schon bei verschiedenen Gelegenheiten hervorgehoben.

Führen wir in $B_k f$ die hierdurch definirten Variabeln x_i' ein, so erhalten wir, ähnlich wie in Nummer 9, die Gleichung:

$$B_k f = \sum^i \xi_{ki}(x_1' \ldots x_n') \frac{\partial f}{\partial x_i'} + \delta t \sum^i (B_k \eta_i - C\xi_{ki}) \frac{\partial f}{\partial x_i'},$$

oder die äquivalente:

$$B_k f = B_k' f + \delta t (B, C).$$

Soll daher jede einzelne inf. Transformation $B_k f$ bei Ersetzung der Variabeln x_i durch die unendlich wenig verschiedenen $x_i' = x_i + \eta_i \delta t$ in $B_k' f$ übergehen und also ihre Form behalten, so muss jedes (B_k, C) gleich Null sein. Also ist wirklich *jede Transformation der Gruppe* $C_k f$ *mit einer jeden Transformation der Gruppe* $B_k f$ *vertauschbar.*

Wir kennen hiermit n unabhängige infinitesimale Transformationen

$$Cf = \sum \eta_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

welche die Forderung $(B_k, C) = 0$ erfüllen und stellen nunmehr die Frage nach *allen* inf. Transformationen

$$Cf = \sum \eta_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

welche die n Relationen $(B_k, C) = 0$ erfüllen. Zur Bestimmung der n Grössen η_k erhalten wir folgende n^2 Gleichungen

$$B_1 \eta_i = C\xi_{1i}, \ldots, B_n \eta_i = C\xi_{ni}.$$

Aus denselben bestimmen sich sämmtliche n^2 Differentialquotienten der η_i nach den x_k als lineare Functionen der η_j, multiplicirt mit gewissen Functionen der x_i. Folglich enthalten die endlichen Ausdrücke der η_i nicht mehr als n arbiträre Constanten und es sind *die n infinitesimalen Transformationen $C_k f$ der Gruppe $x_k = F_k$ durch die Relationen $(B_i, C_k) = 0$ vollständig bestimmt.* Denkt man sich auf der anderen Seite die Gruppe $C_k f$ als gegeben, so sind die inf. Transformationen $B_i f$ vollständig bestimmt durch die Gleichungen $(B_i, C_k) = 0$. Es besteht daher ein gewisses Reciprocitätsverhältniss zwischen den beiden Gruppen $B_i f$ und $C_k f$.

Aeusserst bemerkenswerth ist dabei, dass diese Gruppen *ähnlich* sind. Um diess zu beweisen, denken wir uns in den Ausdrücken

$$B_i f = \sum^k \xi_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad \text{und} \quad C_j f = \sum^q \eta_{jq} \frac{\partial f}{\partial x_q}$$

die Grössen ξ_{ik} und η_{jq} nach Potenzen der x entwickelt (wobei vorausgesetzt wird, dass das Werthsystem $x_k = 0$ kein singuläres ist) und berücksichtigen dabei nur die Potenzen nullter und erster Ordnung. Die $B_i f$ können, wie man leicht sieht, derart gewählt werden, dass ihre Reihenentwicklungen die einfache Form:

$$B_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum^k a_{ik} x_k \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum^k b_{ik} x_k \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots$$
$$+ \sum^k l_{ik} x_k \frac{\partial f}{\partial x_n} + \cdots$$

erhalten. Entsprechend wählen wir die $C_j f$ auf solche Weise, dass ihre Ausdrücke die Form:

$$C_j f = -\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum^q \alpha_{jq} x_q \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum^q \beta_{jq} x_q \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots$$
$$+ \sum^q \lambda_{jq} x_q \frac{\partial f}{\partial x_n} + \cdots$$

annehmen. Jetzt liefert die Bedingung $(B_i, C_j) = 0$ die Relation:

$$0 = (\alpha_{ji} + a_{ij}) \frac{\partial f}{\partial x_1} + (\beta_{ji} + b_{ij}) \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + (\lambda_{ji} + l_{ij}) \frac{\partial f}{\partial x_n} + \cdots,$$

woraus folgt:

$$\alpha_{ji} = -a_{ij}, \quad \beta_{ji} = -b_{ij}, \; \cdots, \; \lambda_{ji} = -l_{ij}.$$

Analoge Rechnungen ergeben:

$$(B_i, B_j) = (a_{ji} - a_{ij}) \frac{\partial f}{\partial x_1} + (b_{ji} - b_{ij}) \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots$$
$$+ (l_{ji} - l_{ij}) \frac{\partial f}{\partial x_n} + \cdots$$

$$(C_i, C_j) = (-\alpha_{ji} + \alpha_{ij}) \frac{\partial f}{\partial x_1} + (-\beta_{ji} + \beta_{ij}) \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots$$
$$+ (-\lambda_{ji} + \lambda_{ij}) \frac{\partial f}{\partial x_n} + \cdots$$
$$= (a_{ij} - a_{ji}) \frac{\partial f}{\partial x_1} + (b_{ij} - b_{ji}) \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots$$
$$+ (l_{ij} - l_{ji}) \frac{\partial f}{\partial x_n} + \cdots$$

Tragen wir diese Werthe in die Gleichungen

$$(B_i, B_j) = \sum^s c_{ijs} B_s, \quad (C_i, C_j) = \sum^s c'_{ijs} C_s$$

ein und setzen dann $x_k = 0$, so erhalten wir Bestimmungsgleichungen für die Constanten c_{ijs}, c'_{ijs}. Schliesslich finden wir die Formeln:

$$(B_i, B_j) = (a_{ji} - a_{ij}) B_1 f + (b_{ji} - b_{ij}) B_2 f + \cdots + (l_{ji} - l_{ij}) B_n f,$$
$$(C_i, C_j) = (a_{ji} - a_{ij}) C_1 f + (b_{ji} - b_{ij}) B_2 f + \cdots + (l_{ji} - l_{ij}) C_n f,$$

welche zeigen, dass unsere beiden Gruppen *gleichzusammengesetzt* sind. Da sie überdiess beide einfach transitiv sind, so müssen sie auch ähnlich sein. Also:

Theorem II. Sind $B_1 f\, B_2 f \ldots B_n f$ unabhängige infinitesimale Transformationen einer einfach transitiven

Gruppe mit den Variabeln $x_1 \ldots x_n$, so wird durch die Relationen $(B_i, C_k) = 0$ eine vollständig bestimmte, mit der Gruppe $B_i f$ ähnliche Gruppe $C_k f$ definirt*).

Ich nenne zuweilen die beiden Gruppen $B_i f$ und $C_k f$ reciproke Transformationsgruppen.

Enthält die Gruppe $B_i f$ ausgezeichnete inf. Transformationen (d. h. Transformationen, welche mit allen $B_i f$ vertauschbar sind), so gehören diese Transformationen gleichzeitig auch der reciproken Gruppe an. Die gemeinsamen inf. Transformationen zweier einfach transitiven und reciproken Gruppen sind also zugleich die ausgezeichneten Transformationen einer jeden der beiden Gruppen.

Die vorangehenden Entwickelungen dieses Paragraphen sind einer gewissen Verallgemeinerung fähig; man kann nämlich die Beschränkung, dass die Gruppe $B_i f$ einfach transitiv sein soll, fallen lassen. Wie sich die Theorie hierdurch modificirt, werde ich bei einer anderen Gelegenheit näher auseinandersetzen. Ich verweise im Uebrigen auf meine alten, z. B. in den Math. Ann. Bd. VIII entwickelten Untersuchungen über Functionen

$$u_1 \ldots u_r, \quad v_1 \ldots v_{2n-r} \quad \text{von} \quad x_1 \ldots x_n, \quad p_1 \ldots p_n,$$

welche Relationen von der Form:

$$(u_i, u_k) = f_{ik}(u_1 \ldots u_r), \quad (v_i, v_k) = \varphi_{ik}(v_1 v_2 \ldots v_r), \quad (u_i, v_k) = 0$$

erfüllen.

Die projectivische Geometrie des Raumes liefert eine einfache Illustration des Theorems II. Alle projectivischen Transformationen des Raumes, die sämmtliche Erzeugende des einen Systems einer Fläche zweiten Grades invariant lassen, bilden nämlich eine einfach transitive Gruppe. Die reciproke Gruppe besteht aus allen projectivischen Transformationen, welche die Erzeugenden des zweiten Systems invariant lassen. Dass diese beiden Gruppen ähnlich sind, zeigt sich darin, dass es eine projectivische Gruppe giebt, welche die beiden Systeme von Erzeugenden unserer Fläche vertauscht.

17. Es sei jetzt zur Integration vorgelegt ein q-gliedriges Involutionssystem:

$$A_i f = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{q+1}^{n} X_{i,k} \frac{\partial f}{\partial x_k}, \qquad (A_i, A_k) = 0,$$
$$(i = 1, 2 \ldots q).$$

Dasselbe gestatte $n - q$ bekannte infinitesimale Transformationen:

---

*) Ich theilte der Ges. d. W. zu Christiania diesen Satz im Novbr. 1882 mit.

$$B_k f = \sum_{q+1}^{n} {}^i\, \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad (A_i, B_k) = 0$$
$$(k = q+1, \ldots n),$$

die eine Transformationsgruppe erzeugen, aber keine Relation

$$\sum \alpha_i A_i f + \sum \beta_k B_k f = 0$$

befriedigen. Es giebt dann, behaupte ich, eine ganz bestimmte Gruppe $C_{q+1} f \ldots C_n f$:

$$C_k f = \sum_{q+1}^{n} {}^i\, \eta_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = q+1 \ldots n),$$

welche durch die Relationen:

$$(A_i, C_k) = 0, \quad (B_j, C_k) = 0$$

definirt wird.

Wir bezeichnen mit $y_{q+1} \ldots y_n$ $n-q$ unabhängige Lösungen des vollständigen Systems $A_i f = 0$ und führen $x_1 \ldots x_q$, $y_{q+1} \ldots y_n$ als neue unabhängige Variable ein. Dabei erhalten $A_i f$ und $B_k f$ die Form:

$$A_i' f = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad B_k' f = \sum_{q+1}^{n} {}^i\, Y_{ki} \frac{\partial f}{\partial y_i},$$

und zwar kommen in den Coefficienten Y_{ki} nur $y_{q+1} \ldots y_n$ vor, weil mit $f = y_i$ auch $f = B_k'(y_i)$ eine Lösung des Involutionssystems ist. Die $B_k' f$ bilden eine einfach transitive Gruppe mit den Variabeln y_i und folglich giebt es $n - q$ infinitesimale Transformationen:

$$C_k' f = \sum_{q+1}^{n} {}^i\, U_{ki}(y_{q+1} \ldots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_i}, \quad (k = q+1 \ldots n),$$

welche ebenfalls eine transitive Gruppe bilden und den Relationen $(B_i', C_k') = 0$ genügen. Die Form der Ausdrücke $C_k' f$ zeigt unmittelbar, dass alle (A_i', C_k') gleich Null sind. Kehren wir daher zu den ursprünglichen Variabeln x_i zurück, so erhalten wir $n - q$ infinitesimale Transformationen

$$C_k f = \sum_{q+1}^{n} {}^i\, \eta_{ki}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

welche durch die Relationen $(A_i, C_k) = 0$, $(B_i, C_k) = 0$ vollständig bestimmt sind und keine lineare Relation $\sum \gamma_k C_k f = 0$ befriedigen.

Die allgemeinste infinitesimale Transformation von der allgemeineren Form:

$$Df = \zeta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \zeta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \zeta_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

welche die Relationen $(A_i, D) = 0$, $(B_k, D) = 0$ erfüllt, enthält nach den Entwickelungen der vorangehenden Nummer n Parameter und besitzt daher die Form:

$$\sum a_i\, A_i f + \sum c_k C_k f,$$

wo die a_i und c_k arbiträre Constanten bezeichnen.

Ich werde nun zeigen, dass die Integration des Involutionssystems $A_i f = 0$ mit den bekannten infinitesimalen Transformationen $B_k f$ als geleistet gelten kann, wenn es gelingt die Gruppe $C_k f$ zu bestimmen. Dies beruht auf einem Satze aus meiner Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, welchen ich zunächst aufstellen werde.

Hülfssatz. *Ist $X_1 = a_1 \ldots X_q = a_q$ ein vorgelegtes Involutionssystem mit den Variabeln $x_1 \ldots x_n$, $p_1 \ldots p_n$ und kennt man unter den Lösungen des vollständigen Systems:*

$$(X_1, \Phi) = 0, \; (X_2, \Phi) = 0, \; \ldots, \; (X_q, \Phi) = 0$$

eine gewisse Anzahl, etwa:

$$(4) \qquad X_1 \ldots X_q \ldots X_{q'} \ldots X_{q''}, \; P_{q+1} \ldots P_{q'},$$

die eine Gruppe bilden, kennt man ferner alle Lösungen des vollständigen Systems:

$$(5) \quad (X_1, F) = 0 \ldots (X_{q''}, F) = 0 \; (P_{q+1}, F) = 0 \ldots (P_{q'}, F) = 0,$$

so ist die Integration des vorgelegten Involutionssystems als geleistet zu betrachten.

Benütze ich meine in den Math. Ann. Bd. VIII angewandte Terminologie, so kann der Beweis dieses Satzes folgendermassen geführt werden: Bilden die Grössen (4) eine canonische Gruppe, so bilden die Lösungen F der Gleichungen (5) die zugehörige Polargruppe mit der canonischen Form:

$$(6) \qquad X_1 \ldots X_q, \; X_{q'+1} \ldots X_{q''} \ldots X_n, \; P_{q''+1} \ldots P_n$$

und dabei befriedigen alle Grössen (4) und (6) die Gleichungen

$$(X_1, \Phi) = 0 \ldots (X_q, \Phi) = 0.$$

Die Integration des Involutionssystems $X_1 = a_1 \ldots X_q = a_q$ ist somit nach einem früheren Satze (Math. Ann. Bd. XI, p. 469, Satz 4) wirklich ausgeführt. (Siehe auch Math. Ann. Bd. VIII, p. 281).

Den hiermit aufgestellten Hülfssatz wende ich nun auf das Involutionssystem:

$$A_i f = p_i + X_{i\,q+1} p_{q+1} + \cdots + X_{in} p_{in} = 0, \quad (i = 1, 2 \ldots q),$$

an, indem ich die $n - q$ bekannten Lösungen $B_{q+1} \ldots B_n$ des voll-

ständigen Systems $(A_i, \Phi) = 0$ verwerthe und $C_{q+1} \ldots C_n$ als bestimmt voraussetze. Ich bemerke noch, dass die n Grössen A_i und B_k unabhängige Functionen der x_i, p_k sind, weil die Gleichungen $A_i f = 0$, $B_k f = 0$ sich nach $p_1 \ldots p_n$ auflösen lassen. Da nun das neue vollständige System:

$$(A_1, F) = 0 \ldots (A_q, F) = 0, \ (B_{q+1}, F) = 0 \ldots (B_n, F) = 0$$

nur n unabhängige Lösungen besitzt und wir schon soviele kennen, nämlich $A_1 \ldots A_q$, $C_{q+1} \ldots C_n$, so ist wirklich die Integration des Involutionssystems $A_i f = 0$ als geleistet zu betrachten. — Wir resumiren die Entwickelungen dieser Nummer in folgendem Satze:

Satz 13. *Zur Integration des Involutionssystems:*

$$A_k f = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{q+1}^{n} {}^i X_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \ldots q)$$

mit den $n - q$ bekannten infinitesimalen Transformationen:

$$B_k f = \sum_{q+1}^{n} {}^i \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = q+1 \ldots n),$$

die eine Gruppe bilden und keine Relationen von der Form

$$\sum \alpha_i A_i f + \sum \beta_k B_k f = 0$$

befriedigen, genügt die Bestimmung derjenigen $n - q$ infinitesimalen Transformationen:

$$C_k f = \sum_{q+1}^{n} {}^i \eta_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (k = q+1 \ldots n)$$

welche durch die Relationen $(A_i, C_k) = 0$, $(B_i, C_k) = 0$ definirt sind.

Es ist möglich das Integrationsproblem des Involutionssystems $A_i f = 0$ noch in anderer Weise zu formuliren. In den ξ_{ki}, die von $x_1 \ldots x_n$ abhängen, gebe ich $x_1 \ldots x_q$ die constanten Werthe $\alpha_1 \ldots \alpha_q$ und behaupte zunächst, dass die Ausdrücke $A_i f$, $B_k f$ durch eine allerdings unbekannte Transformation die Form:

$$A_i' f = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad B_k' f = \sum_{q+1}^{n} {}^i \xi_{ki} (\alpha_1 \ldots \alpha_q, y_{q+1} \ldots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_i}$$
$$(i = 1 \ldots q), \quad (k = q+1 \ldots n)$$

erhalten können. Diess tritt nämlich insbesondere ein, wenn die neuen Variabeln $y_{q+1} \ldots y_n$ diejenigen gemeinsamen Lösungen der $A_i f = 0$ bezeichnen, welche bei der Substitution $x_1 = \alpha_1 \ldots x_q = \alpha_q$ in $x_{q+1} \ldots x_n$ übergehen. *Zur Integration des Involutionssystems $A_i f = 0$*

genügt die Reduction der Grössen $A_i f$, $B_k f$ *auf die bekannte Form* $A_i' f$, $B_k' f$, *indem* $y_{q+1} \dots y_n$, durch deren Einführung als Variabeln diese Reduction geleistet wird, jedenfalls Lösungen des vollständigen Systems $A_i f = 0$ darstellen.

Diese letzte Bemerkung besitzt eine fundamentale Wichtigkeit, wie in § 11 nachgewiesen werden soll.

§ 6.

Partielle Differentialgleichungen beliebiger Ordnung mit einer bekannten endlichen Gruppe.

Meine Integrationstheorie linearer partieller Differentialgleichungen $A_k f = 0$ mit bekannten infinitesimalen Transformationen dehnt sich ohne weiteres auf simultane partielle Differentialgleichungen beliebiger Ordnung aus, vorausgesetzt, dass in ihren allgemeinsten Integralgleichungen nicht arbiträre Functionen sondern nur arbiträre Constanten enthalten sind und dass sie eine bekannte Gruppe von Transformationen gestatten.

18. Ich nehme an, dass m Grössen $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \dots$ als Functionen von p unabhängigen Variabeln $x, y, z, \dots$ durch gewisse partielle Differentialgleichungen beliebiger Ordnung:

$$\Omega_k\left(x, y, z \cdots \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial x} \cdots\right) = 0$$

definirt sind. Ferner sollen diese Gleichungen gewisse bekannte infinitesimale Transformationen:

$$B_i f = \xi_i \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_i \frac{\partial f}{\partial z} + \cdots + X_i \frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}} + Y_i \frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}} + Z_i \frac{\partial f}{\partial \mathrm{z}} + \cdots$$

gestatten, deren Coefficienten $\xi_i \eta_i \dots X_i \dots$ nur von den $m + p$ Grössen $x\, y\, z \dots \mathrm{x}\, \mathrm{y}\, \mathrm{z} \dots$ abhängen. Ich setze ferner voraus, dass die allgemeinsten Ausdrücke von $\mathrm{x}\, \mathrm{y}\, \mathrm{z} \dots$ keine arbiträren Functionen sondern nur arbiträre Constanten enthalten. Unter diesen Voraussetzungen giebt es immer eine ganze Zahl s von der Beschaffenheit, dass die Differentialquotienten $(s + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung von $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \dots$ nach $x, y, z \dots$ sich als Functionen von $x, y, z \dots \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \dots$ und den Differentialquotienten erster, zweiter $\dots s^{\text{ter}}$ Ordnung, also von:

$$\text{(L)} \qquad x, y, z \cdots \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \cdots \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial x} \cdots \frac{\partial^s \mathrm{x}}{\partial x^s} \cdots$$

ausdrücken lassen. Daher ist das Gleichungssystem $\Omega_k = 0$ äquivalent mit einem p-gliedrigen vollständigen Systeme in den Variabeln (L). Dieses vollständige System gestattet nach unserer Voraussetzung die bekannten infinitesimalen Transformationen $B_i f$, deren analytische

Ausdrücke in den Variabeln (L) in bekannter Weise (siehe Nummer 9 meiner Abhandlung im vorangehenden Bande) berechnet werden. Daher finden meine allgemeinen Theorien hier eine directe Anwendung.

19. Wir beschäftigen uns mit einem äusserst wichtigen, wenn auch anscheinend speciellen Falle etwas näher. Wir setzen nämlich voraus, dass die allgemeinsten, r Integrationsconstanten enthaltenden Lösungen $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \ldots$ der Gleichungen $\Omega_k = 0$ aus einem beliebigen speciellen Systeme von Lösungen $\mathrm{x}', \mathrm{y}', \mathrm{z}' \ldots$ durch die (bekannten) Substitutionen:

$$(7) \qquad \begin{cases} \mathrm{x} = M(\mathrm{x}', \mathrm{y}', \mathrm{z}' \ldots x, y, z \ldots a_1\, a_2 \ldots a_r), \\ \mathrm{y} = N(\ldots), \quad \mathrm{z} = P(\ldots) \ldots, \end{cases}$$

welche eine Transformationsgruppe mit r Parametern $a_1 \ldots a_r$ bilden, hervorgehen. *Da die unabhängigen Variabeln $x, y, z \ldots$ bei dieser Gruppe invariant bleiben*, so sind ihre Incremente $\xi_i \delta t$, $\eta_i \delta t$, $\zeta_i \delta t \ldots$ Null. Folglich haben die r bekannten infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe die Form:

$$B_i f = X_i \frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}} + Y_i \frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}} + Z_i \frac{\partial f}{\partial \mathrm{z}} + \cdots;$$

wobei X_i, Y_i, Z_i von $x, y, z \ldots \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \ldots$ abhängen.

Ehe ich nun weiter gehe, erinnere ich an einige alte Untersuchungen von A. Mayer und mir, die in einer von P. du Bois-Reymond herrührenden Idee ihren Ursprung nehmen. Sind $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \ldots$, wie früher angenommen, als Functionen von $x, y, z \ldots$ durch ein p-gliedriges vollständiges System definirt, so ist es möglich, das Integrationsproblem darauf zurückzuführen, die Grössen $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \ldots$ als Functionen einer *einzigen* unabhängigen Variablen zu bestimmen. Nehmen wir nämlich an, dass unser vollständiges System sich in der Umgebung des Werthsystems $x = 0$, $y = 0$, $z = 0 \ldots$ regulär verhält, so können wir als neue unabhängige Variabeln die Grössen:

$$x, \; \alpha = \frac{y}{x}, \quad \beta = \frac{z}{x} \cdots$$

einführen. Thun wir dies und setzen:

$$\frac{d\mathrm{x}}{dx} = \mathrm{x}_1, \quad \frac{d\mathrm{x}_1}{dx} = \mathrm{x}_2 \cdots \frac{d\mathrm{x}_q}{dx} = \mathrm{x}_{q+1},$$

$$\frac{d\mathrm{y}}{dx} = \mathrm{y}_1, \quad \frac{d\mathrm{y}_1}{dx} = \mathrm{y}_2 \cdots \frac{d\mathrm{y}_k}{dx} = \mathrm{y}_{k+1},$$

$$\frac{d\mathrm{z}}{dx} = \mathrm{z}_1, \quad \frac{d\mathrm{z}_1}{dx} = \mathrm{z}_2 \cdots \frac{d\mathrm{z}_j}{dx} = \mathrm{z}_{j+1} \cdots,$$

so ist es immer möglich die Zahlen $q, k, j \ldots$ derart zu wählen, dass sich aus den Gleichungen $\Omega_k = 0$ keine Relation zwischen den Grössen:

(G) $\quad x, \alpha, \beta \ldots \mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \ldots \mathfrak{x}_q, \; \mathfrak{y}, \mathfrak{y}_1 \ldots \mathfrak{y}_k, \; \mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1 \ldots \mathfrak{z}_j$

herleiten lässt*), während $\mathfrak{x}_{q+1}\; \mathfrak{y}_{k+1}\; \mathfrak{z}_{j+1} \ldots$ bestimmte Functionen derselben sind:

$$(8) \quad \begin{cases} \mathfrak{x}_{q+1} = A(x\,\alpha\,\beta \ldots \mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_q\;\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}_1 \ldots \mathfrak{y}_k\;\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}_1 \ldots \mathfrak{z}_j), \\ \mathfrak{y}_{k+1} = B(\ldots), \quad \mathfrak{z}_{j+1} = C(\ldots) \text{ etc.} \end{cases}$$

Diese Gleichungen oder die mit ihnen äquivalente lineare partielle Differentialgleichung:

$$Af = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \mathfrak{x}_1 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \cdots + \mathfrak{x}_q \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{q-1}} + A \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_q}$$
$$+ \mathfrak{y}_1 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + \cdots + B \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_k} + \mathfrak{z}_1 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}} + \cdots + C \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}_j} + \cdots$$

bestimmen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \ldots$ als Functionen von x. Ist diese Bestimmung durchgeführt, so können die in den gefundenen Ausdrücken für $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \ldots$ eingehenden Integrationsconstanten, welche arbiträre Functionen von $\alpha, \beta \ldots$ darstellen, im Allgemeinen in solcher Weise gewählt werden, dass wir die allgemeinsten Lösungen der Gleichungen $\Omega_k = 0$ erhalten.

Es handelt sich also nur um die Integration von $Af = 0$. In den infinitesimalen Transformationen $B_i f$ führen wir dazu die neuen unabhängigen Variabeln $x\,\alpha\,\beta \ldots$ ein und suchen dann in gewöhnlicher Weise den analytischen Ausdruck von $B_i f$, aufgefasst als Transformation der Grössen (G). Treten bei dieser Berechnung solche Differentialquotienten wie $\mathfrak{x}_{q+i}, \mathfrak{y}_{k+i}, \mathfrak{z}_{j+i} \ldots$ auf, so schaffen wir dieselben mit Hülfe der Formeln (8) weg. Die gefundenen infinitesimalen Transformationen:

$$B_i' f = X_i \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + Y_i \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + \cdots + \left(\frac{\partial X_i}{\partial x} + \frac{\partial X_i}{\partial \mathfrak{x}}\mathfrak{x}_1 + \frac{\partial X_i}{\partial \mathfrak{y}}\mathfrak{y}_1 + \frac{\partial X_i}{\partial \mathfrak{z}}\mathfrak{z}_1\right)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_1} + \cdots$$
$$(i = 1, 2 \ldots r)$$

lassen selbstverständlich die Gleichung $Af = 0$ invariant und die Ausdrücke (A, B_i') verschwinden offenbar. Bemerken wir nun, dass die Integration von $Af = 0$ $(q+1) + (k+1) + (j+1) + \cdots$ Constanten einführt, und dass in Folge dessen die Ausdrücke der $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \ldots$ genau ebenso viele Constanten enthalten müssen, so erhalten wir, indem wir uns erinnern, dass in den Formeln (7) r wesentliche Constanten auftreten, die Relation:

$$r = (q+1) + (k+1) + (j+1) + \cdots.$$

Unsere Gleichung $Af = 0$ mit $r + 1$ Variabeln gestattet daher r be-

*) Bestehen eine oder mehrere *endliche* Relationen zwischen $x, \alpha, \beta \ldots \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \ldots$ so müssen die Entwickelungen des Textes ein wenig modificirt werden. Man fängt dann mit der Wegschaffung einiger von den Grössen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \ldots$ an, und fährt sodann weiter fort wie im Texte.

kannte infinitesimale Transformationen $B_i'f$. Es lässt sich weiter nachweisen, dass diese infinitesimalen Transformationen, die nach unseren früheren Voraussetzungen eine Gruppe bilden, keine Relation von der Form $\alpha Af + \sum \beta_i B_i' f = 0$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, keine Relation von der Form $\sum \beta_i B_i' f = 0$ befriedigen.

Man bilde in der That durch wiederholte Differentiation der Gleichungen (7):

$$\mathrm{x} = M(\mathrm{x}', \mathrm{y}', \mathrm{z}' \dots x, \alpha, \beta \dots a_1, a_2 \dots a_r), \ \mathrm{y} = N, \dots$$

nach x die Werthe von:

$$\mathrm{x}, \mathrm{x}_1 \dots \mathrm{x}_q, \ \mathrm{y}, \mathrm{y}_1 \dots \mathrm{y}_k, \ \mathrm{z}, \mathrm{z}_1 \dots \mathrm{z}_j$$

ausgedrückt durch:

$$\mathrm{x}', \mathrm{x}_1' \dots \mathrm{x}_q', \ \mathrm{y}', \mathrm{y}_1' \dots \mathrm{y}_k', \ \mathrm{z}', \mathrm{z}_1' \dots \mathrm{z}_j' \ \text{ und } \ x, \alpha, \beta \dots a_1 \dots a_r,$$

nämlich:

$$(9) \quad \mathrm{x}_i = M_i(\mathrm{x}' \mathrm{x}_1' \dots \mathrm{x}_q' \dots \mathrm{z}_j' \ x \ \alpha \ \beta \ a_1 \dots a_r), \ \mathrm{y}_i = N_i, \ \mathrm{z}_i = P_i \dots.$$

Setzt man sodann:

$$D_i f = \frac{\partial M}{\partial a_i} \frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial M_1}{\partial a_i} \frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}_1} + \dots + \frac{\partial M_q}{\partial a_i} \frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}_q}$$
$$+ \sum_0^k \frac{\partial N_\nu}{\partial a_i} \frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}_\nu} + \sum_0^j \frac{\partial P_\nu}{\partial a_i} \frac{\partial f}{\partial \mathrm{z}_\nu} + \dots,$$

so bestehen (Math. Ann. Bd. XVI, p. 460) vermöge der Gleichungen (9) identische Relationen von der Form:

$$D_i f = \sum^\sigma \psi_{i\sigma}(a_1 \dots a_r) B_\sigma' f.$$

Existirte daher eine Relation $\sum \beta_i B_i' f = 0$, so verschwände die Determinante

$$\begin{vmatrix} \mathrm{x} \ \mathrm{x}_1 \dots \mathrm{x}_q \ \mathrm{y} \dots \mathrm{y}_k \ \mathrm{z} \dots \mathrm{z}_j \\ a_1 \ a_2 \dots\dots\dots\dots\dots a_r \end{vmatrix},$$

also liessen sich die Gleichungen (9) nicht nach den Parametern a_i auflösen. Denken wir uns aber in (9) die Werthe der Grössen $\mathrm{x}_i', \mathrm{y}_i', \mathrm{z}_i' \dots$ als Functionen von $x, \alpha \ \beta \dots$ eingesetzt, so erhalten wir nach unserer ursprünglichen Voraussetzung die allgemeinsten Integralgleichungen von $Af = 0$ und folglich lassen sich die Gleichungen (9) nothwendig nach den a_i auflösen. Es giebt daher keine Relation

$$\alpha Af + \sum \beta_i B_i' f = 0.$$

Daraus folgt:

Theorem III. Die Integration der Gleichungen:

$$\Omega_k\left(x, y, z \dots \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \dots \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial x} \dots\right) = 0,$$

deren allgemeinste Lösungen x, y, z ... mit r Integrationsconstanten sich als Functionen eines particulären Lösungssystems x', y', z' ... vermittelst einer bekannten Gruppe mit r Parametern:

$$\mathrm{x} = M(x, y, z \dots \mathrm{x}', \mathrm{y}', \mathrm{z}' \dots a_1 \dots a_r), \quad \mathrm{y} = N \dots,$$

ausdrücken, reducirt sich auf die Erledigung einer Gleichung $Af = 0$ mit $r + 1$ Variabeln. Von derselben sind r infinitesimale Transformationen $B_i'f$, welche eine Gruppe bilden aber keine Relation $\alpha Af + \sum \beta_i B_i' f = 0$ erfüllen, nebst den endlichen Transformationen der Gruppe bekannt. Daher findet meine allgemeine Integrationstheorie hier ihre directe Anwendung.

Dieser Satz lässt sich offenbar dahin erweitern, dass es genügt, die infinitesimalen Transformationen $B_i f$ zu kennen, während die Formeln (7), deren Existenz allerdings vorausgesetzt wird, nicht bekannt zu sein brauchen. Es ist andererseits klar, dass ein analoger Satz besteht, wenn die bekannte Gruppe mehr als r Parameter enthält.

20. Die vorangehenden Entwickelungen dieses Paragraphen finden eine äusserst wichtige Anwendung bei der Behandlung des folgenden Problems:

Ich nehme an, dass ein System Differentialgleichungen

$$w_k\left(x, y \cdots z \cdots \frac{\partial z}{\partial x} \cdots\right) = 0$$

vorgelegt ist und dass man eine Form

$$W_k\left(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \cdots \mathrm{z} \cdots \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}} \cdots\right) = 0,$$

auf welche $w_k = 0$ durch eine allerdings unbekannte Transformation

$$\mathrm{x} = X(x, y, \dots z \dots), \; \mathrm{y} = Y, \; \mathrm{z} = Z \dots$$

reducirt werden kann, schon kennt. Ich setze ferner voraus, dass das Gleichungssystem $W_k = 0$ eine bekannte endliche Transformationsgruppe gestattet. Die Bestimmung von x, y, z ... als Functionen von $x, y, z \dots$ geschieht dann durch Integration eines Gleichungssystems:

$$\Omega_i\left(x, y, z \dots \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \dots \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial x} \cdots\right) = 0,$$

das nach der in diesem Paragraphen entwickelten Methode behandelt werden kann.

Sind andererseits ganz beliebige analytische Ausdrücke w_k vorgelegt, welche durch eine *unbekannte* Transformation

$$\mathrm{x} = X(x, y, z \dots) \dots$$

eine gewisse gegebene Form W_k erhalten können und gestatten

diese W_k eine endliche und bekannte Transformationsgruppe, so kann wiederum die Bestimmung der $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \ldots$ als Functionen von $x, y, z \ldots$ nach der vorangehenden allgemeinen Theorie geleistet werden.

§ 7.

Bestimmung einer unbekannten continuirlichen und endlichen Gruppe mit einer bekannten canonischen Form.

Die letzten Bemerkungen des vorangehenden Paragraphen führen uns zur Erledigung eines wichtigen Problems, das wir jetzt behandeln wollen.

21. Eine continuirliche (endliche) Gruppe in den Variabeln $x, y, z \ldots$ mit den infinitesimalen Transformationen:

$$B_i f = \xi_i \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_i \frac{\partial f}{\partial z} + \cdots,$$

lässt sich definiren (siehe meine Abhandlung im letzten Bande, Nr. 10) durch gewisse lineare partielle Differentialgleichungen:

$$(A) \qquad A_i \xi + C_i \eta + D_i \zeta + \cdots + E_i \frac{\partial \xi}{\partial x} + \cdots = 0,$$

welche wir die Definitionsgleichungen der Gruppe $B_i f$ nennen. Wir nehmen an, dass ein Gleichungssystem (A) zur Integration vorgelegt ist, und dass wir eine canonische Form

$$\mathrm{B}_i f = \mathfrak{x}_i \frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}} + \mathfrak{y}_i \frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}} + \mathfrak{z}_i \frac{\partial f}{\partial \mathrm{z}} + \cdots$$

kennen, auf welche die unbekannte Gruppe $B_i f$ durch eine allerdings unbekannte Transformation $\mathrm{x} = X(x, y, z)$, $\mathrm{y} = Y \ldots$ reductibel ist. Bilden wir nun die Definitionsgleichungen der canonischen Gruppe:

$$(\mathrm{A}) \qquad \mathrm{A}_i \mathfrak{x} + \mathrm{C}_i \mathfrak{y} + \mathrm{D}_i \mathfrak{z} + \cdots + \mathrm{E}_i \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathrm{x}} + \cdots = 0,$$

so kann die Integration der Gleichungen (A) geleistet werden, indem wir die Grössen $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \ldots$ derart als Functionen von $x\, y\, z$ bestimmen, dass die beiden Gleichungssysteme (A) und (A) mit einander äquivalent werden. Indem wir unser Problem auf diese Weise angreifen, erhalten wir zur Bestimmung von $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \ldots$ als Functionen von $x, y, z \ldots$ eine gewisse Anzahl partieller Differentialgleichungen:

$$\Omega_k \left(x, y, z \cdots \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \cdots \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial x} \cdots\right) = 0.$$

Die Integration derselben kann nach der im vorigen Paragraphen gegebenen Methode geleistet werden, vorausgesetzt, dass die allgemeinsten Ausdrücke der Grössen $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \ldots$

$$(10) \qquad \mathrm{x} = F(x, y, z \ldots a_1, a_2 \ldots a_r), \; \mathrm{y} = f, \; \mathrm{z} = \varphi \ldots$$

nur arbiträre Constanten und keine arbiträren Functionen enthalten.

Ist nämlich x′, y′, z′ ein particulares System Lösungen, *so drückt sich der Zusammenhang zwischen* x, y, z ... *und* x′, y′, z′ ... *durch gewisse Gleichungen:*

$$\text{(M)} \qquad \mathrm{x} = M(\mathrm{x}', \mathrm{y}', \mathrm{z}' \ldots a_1 \ldots a_r), \; \mathrm{y} = N, \; \mathrm{z} = P \ldots$$

aus. Diese müssen eine Gruppe bilden), weil sie die allgemeinste Transformation darstellen, bei welcher die canonische Gruppe* $\mathrm{B}_i f$ *ihre Form behält* und weil überdies die Succession zweier derartiger Transformationen mit einer einzigen Transformation äquivalent ist, welche ebenfalls die Form der Gruppe $\mathrm{B}_i f$ nicht ändert.

Die Gruppe (M) besteht, haben wir gesagt, aus allen Transformationen, welche die Form der Gruppe $\mathrm{B}_i f$ nicht ändern. Es ist ausserdem leicht zu erkennen und soll überdies sogleich näher nachgewiesen werden, dass die $\mathrm{B}_i f$ eine in der Gruppe (M) enthaltene, invariante Untergruppe bilden.

Dabei können indess verschiedene Fälle eintreten. Den Fall, dass (M) eine unendliche Gruppe ist, der an und für sich wohl eintreten kann, haben wir schon ausgeschlossen, indem wir voraussetzten, dass die Gleichungen (10) keine arbiträren Functionen enthalten. Der Fall, dass die Gruppe $\mathrm{B}_i f$ nicht allein in der Gruppe (M) enthalten ist, sondern sogar mit ihr identisch ist, verdient besondere Aufmerksamkeit; derselbe tritt, wie schon hier bemerkt werden mag, u. A. ein, wenn die $\mathrm{B}_i f$ die allgemeine projectivische Gruppe der Mannigfaltigkeit x, y, z ... bilden.

Die infinitesimalen Transformationen

$$Cf = X \frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}} + Y \frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}} + Z \frac{\partial f}{\partial \mathrm{z}} + \cdots$$

der Gruppe (M) werden, wie leicht einzusehen ist, (siehe Nummer 9) definirt durch die Relationen:

$$\text{(11)} \qquad C(\mathrm{B}_i(f)) - \mathrm{B}_i(C(f)) = c_{i1}\,\mathrm{B}_1 f + \cdots + c_{is}\,\mathrm{B}_s f,$$

in denen die c_{ik} arbiträre Constanten bezeichnen. Nach unserer Voraussetzung, dass die Gruppe (M) endlich ist, giebt es nur eine begrenzte Anzahl von infinitesimalen Transformationen Cf, unter denen sich wegen der Form der soeben aufgestellten Relationen insbesondere alle $\mathrm{B}_i f$ finden. Eben diese Relationen sagen ferner aus, *dass die* Cf *die allgemeinste Gruppe bilden, in welcher die gegebene Gruppe* $\mathrm{B}_i f$ *als invariante Untergruppe enthalten ist.*

*) Erhält die Gruppe $B_i f$ sowohl bei dem Uebergang von $x\, y\, z$ zu x′, y′, z ... als bei dem Uebergang von x, y, z zu x, y, z die Form $\mathrm{B}_i f$, *so lässt der Uebergang von* x′, y′, z′ ... *zu* x, y, z ... *die canonische Form* $\mathrm{B}_i f$ *invariant.*

Ist die Gruppe $B_i f$ vorgelegt, so können wir im Allgemeinen die entsprechende Gruppe Cf angeben, das folgt in der That fast unmittelbar aus den allgemeinen Entwickelungen des Paragraphen 4. Um dies zu zeigen, setzen wir:

$$B_i' f = k_{i1} B_1 + \cdots + k_{is} B_s, \quad (i = 1, 2 \ldots s)$$

wählen die s^2 Constanten k_{ij} möglichst allgemein derart, dass in den Relationen

$$(B_i', B_j') = \sum^{\sigma} c_{ij\sigma}' B_\sigma', \qquad (B_i, B_j) = \sum^{\sigma} c_{ij\sigma} B_\sigma$$

jedes $c_{ij\sigma}' = c_{ij\sigma}$ ist und ersetzen dann in B_i' überall x_j durch x_j'. Wir bestimmen hierauf nach den in § 4 entwickelten Regeln die x_i' in allgemeinster Weise als solche Functionen der x, dass jedes B_i die Form B_i' annimmt. Diese Bestimmung, welche, wenn überhaupt möglich, immer durchgeführt werden kann, sobald die *endlichen* Transformationen der Gruppe $B_i f$ gegeben sind, liefert die allgemeinste Transformation von der Form (M), welche die Gruppe $B_i f$ invariant lässt.

Zugefügt werden möge noch die Bemerkung, dass die Gruppe (M) immer endlich ist, wenn die Gleichungen $B_i f = 0$ keine gemeinsame Lösung besitzen. Diese hinreichende Bedingung ist jedoch nicht nothwendig. Wir resumiren die vorangehenden Entwickelungen in folgendem Satze:

Theorem IV. Kennt man eine canonische Form $B_i f$ einer unbekannten Gruppe, deren Definitionsgleichungen zur Integration vorgelegt sind, so versucht man zuerst alle infinitesimalen Transformationen Cf zu finden, welche Relationen von der Form

$$C(B_i(f)) - B_i(C(f)) = c_{i1} B_1 f + \cdots + c_{is} B_s f$$

erfüllen. Diess gelingt jedenfalls, wenn die endlichen Transformationen der Gruppe $B_i f$, wie wir annehmen können, bekannt sind. Die sämmtlichen Cf bilden eine Gruppe, welche entweder endlich oder unendlich ist. Bilden sie eine endliche Gruppe mit r Parametern, so verlangt die Bestimmung der unbekannten Gruppe Bf die Integration einer Gleichung $Af = 0$ mit $r + 1$ Variabeln und r bekannten infinitesimalen Transformationen $C_i' f$, die eine Gruppe bestimmen, und dabei keiner Relation

$$\alpha A f + \sum^i \gamma_i C_i' f = 0$$

genügen.

Handelt es sich überhaupt um die Bestimmung einer unbekannten Gruppe $B_i f$, deren Definitionsgleichungen (A) vorgelegt sind, so muss man zunächst versuchen eine canonische Form $B_i f$ dieser Gruppe zu

finden. Auf die hierzu erforderlichen Rechnungen, welche ich schon für sehr viele Fälle durchgeführt habe, gehe ich an dieser Stelle nicht ein. Ist eine canonische Gruppe $B_i f$ gefunden, so verfährt man nach den eben angegebenen Regeln.

[Im Vorangehenden wurde der Fall ausdrücklich ausgeschlossen, dass die *endliche* Gruppe $B_i f$ als invariante Untergruppe in einer *unendlichen* Gruppe enthalten ist. Dieser wichtige Fall lässt sich nach ähnlichen Principien erledigen, z. B. dadurch, dass man erst mit Hülfe ausführbarer Operationen ein mit dem Gleichungssysteme $B_i f = 0$ äquivalentes vollständiges System aufstellt und dann dasselbe integrirt. Hierdurch kommt man auf ein reducirtes Problem aus der im Vorhergehenden erledigten Categorie. Schliesslich muss ein lineares simultanes System nach den in der folgenden Nummer 24 angegebenen Regeln integrirt werden. Hiermit beschäftige ich mich indess an dieser Stelle nicht näher. Dagegen verweise ich auf den letzten Paragraphen dieser Abhandlung, in dem ich eine allgemein gültige Methode entwickle, welche auch den hier ausgeschlossenen Fall vermöge der *niedrigsten Hülfsgleichungen* erledigt.]

22. Es sei jetzt ein beliebiges System von (partiellen oder totalen) Differentialgleichungen, etwa

$$W_k\left(x, y \cdots z \cdots \frac{\partial z}{\partial x} \cdots\right) = 0$$

vorgelegt. Wir stellen uns die Frage, ob dieses Gleichungssystem eine oder mehrere infinitesimale Transformationen:

$$Bf = \xi(x, y, z \ldots)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z} + \cdots$$

gestattet. Die gedachte Forderung drückt sich, wie ich im Archiv for Math. og Naturv. Bd. 8, p. 384 näher nachgewiesen habe, durch eine Reihe linearer partieller Differentialgleichungen:

$$A_k\xi + C_k\eta + D_k\zeta + \cdots + E_k\frac{\partial\xi}{\partial x} + \cdots = 0$$

aus. Haben dieselben gemeinsame Lösungen, was sich durch ausführbare Operationen erkennen lässt*), so gestattet unser Gleichungssystem $W_k = 0$ wirklich gewisse infinitesimale Transformationen, die jedenfalls eine Gruppe bilden.

Findet man, dass unser Gleichungssystem $W_k = 0$ eine endliche continuirliche Gruppe $B_i f$ gestattet, so geschieht die Bestimmung derselben nach meinen in diesem Paragraphen gegebenen Theorien. (Siehe

*) Die zur Entscheidung dieser Frage nothwendigen und hinreichenden Criterien drücken sich durch Relationen aus, welche invariante Differentialrelationen des Gleichungssystems $W_k = 0$ gegenüber *allen* Transformationen zwischen $x, y, z \ldots$ darstellen.

Archiv for Math. og Naturv. 1883, Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen $f(x\,y\,y'\,\ldots\,y^m) = 0$, die eine continuirliche Gruppe gestatten.)

§ 8.

Anwendung der entwickelten Theorie auf eine wichtige und ausgedehnte Classe von Differentialgleichungen.

Zur Illustration der in dieser und in der vorangehenden Abhandlung dargestellten Theorie betrachte ich eine ausgedehnte und wichtige Classe von Differentialgleichungen, die in meinen Untersuchungen über Transformationsgruppen eine wesentliche Rolle spielt.

23.

$$B_k f = \xi_{k1}(x_1 \cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_{kn}\frac{\partial f}{\partial x_n} \quad (k=1\ldots r)$$

seien r unabhängige infinitesimale Transformationen, die eine Gruppe mit n Variabeln x_k und mit r Parametern bilden. Andererseits bedeute u eine von den x unabhängige Variable. Ich betrachte überhaupt lineare partielle Differentialgleichungen von der Form:

$$Af = \frac{\partial f}{\partial u} + U_1 B_1 f + U_2 B_2 f + \cdots + U_r B_r f = 0$$

und nehme dabei an, dass die U_k nur von u abhängen, während in den $B_k f$ nach dem Vorangehenden u gar nicht vorkommt. *)

Ist nun eine Lösung**)

$$\Pi(x_1, x_2 \ldots x_n, u)$$

von $Af = 0$ gegeben, so gelingt es im Allgemeinen durch blosse Differentiation neue Lösungen***) zu bestimmen. Um diess in einfacher Weise nachzuweisen, werde ich mich auf meine allgemeine Theorie der Differentialinvarianten stützen. Ich bezeichne mit Φ eine neue Variable, welche eine arbiträre Function von $x_1 \ldots x_n$, u sein möge, setze:

---

*) Der Fall, dass die $B_k f$ auch u enthalten, lässt sich auf den im Texte erledigten zurückführen.

**) Ganz analoge Theorien lassen sich offenbar entwickeln, wenn gleichzeitig mehrere Lösungen Π_k gegeben sind.

***) Kennt man einen Ausdruck

$$Bf = \sum \eta_i(x_1, x_2 \ldots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

welcher die Relationen $(B_k, B) = 0$ und also auch die Gleichung

$$(A, B) = ABf - BAf = 0$$

befriedigt, *so ist immer gleichzeitig mit Π auch $B\Pi$ eine Lösung.* Dieser Umstand tritt insbesondere ein, wenn die Gruppe $B_k f$ *ausgezeichnete* infinitesimale Transformationen enthält.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \Phi_i, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_k} = \Phi_{ik} \text{ etc.} \dots$$

und berechne zunächst die Incremente $\delta \Phi_i$ von Φ_i bei Ausführung der infinitesimalen Transformation:

$$B_k f = \xi_{k1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_{kn} \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

welche sowohl u als auch Φ invariant lässt. Aus den Formeln:

$$d\Phi - \Phi_1\, dx_1 - \cdots - \Phi_n dx_n - \frac{\partial \Phi}{\partial u}\, du = 0,$$

$$d\delta\Phi - \delta t \cdot \sum\nolimits^j \Phi_j\, d\xi_{kj} - \frac{\partial \Phi}{\partial u}\, d\,\delta u - \sum\nolimits^i \delta\Phi_i\, dx_i - \delta \frac{\partial \Phi}{\partial u}\, du = 0$$

gehen, wenn δu und $\delta \Phi$ gleich Null gesetzt werden, die Werthe

$$-\delta\Phi_i = \Phi_1 \frac{\partial \xi_{k1}}{\partial x_i} + \Phi_2 \frac{\partial \xi_{k2}}{\partial x_i} + \cdots + \Phi_n \frac{\partial \xi_{kn}}{\partial x_i}$$

hervor. In entsprechender Weise berechnen wir die Incremente $\delta\Phi_{ik}$ etc. der Differentialquotienten zweiter, dritter . . . q^{ter} Ordnung. Mit Hülfe der gefundenen Werthe bilden wir den Ausdruck:

$$B_k' f = \sum\nolimits^i \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum \frac{\delta \Phi_i}{\delta t} \frac{\partial f}{\partial \Phi_i} + \sum \frac{\delta \Phi_{ij}}{\delta t} \frac{\partial f}{\partial \Phi_{ij}} + \cdots;$$

dann bestimmen die r Gleichungen

$$B_1' f = 0, \; B_2' f = 0 \dots B_r' f = 0$$

ein vollständiges System, dessen Lösungen Differentialinvarianten der Gruppe $B_k f$ sind. *Kennt man die endlichen Gleichungen dieser Gruppe, so findet man beliebig viele derartige Invarianten.* Hat man eine solche Invariante z. B.:

$$\Omega(x_1 \dots x_n, \Phi_1 \dots \Phi_n, \Phi_{11} \dots) = \Omega(\Phi)$$

und ersetzt die arbiträre Function Φ durch eine Lösung $\Pi(x_1 \dots x_n, u)$ von $Af = 0$, so ist, behaupte ich, auch

$$\Omega(x_1 \dots x_n, \Pi_1 \dots \Pi_n, \Pi_{11} \dots) = \Omega(\Pi)$$

immer eine Lösung von $Af = 0$.

Um diess nachzuweisen, betrachte ich den Ausdruck Af als eine infinitesimale Transformation, welche den Grössen $u, x_1 \dots x_n, \Phi$ die Incremente:

$$\delta u = \delta t, \; \delta x_k = (U_1 \xi_{1k} + U_2 \xi_{2k} + \cdots + U_r \xi_{rk})\, \delta t, \; \delta \Phi = 0$$

ertheilt. Weiter berechnen wir die entsprechenden Incremente der Grössen Φ_i, Φ_{ij} etc.

$$-\frac{\delta \Phi_i}{\delta t} = \Phi_1 \cdot \frac{\partial \sum^k U_k \xi_{k1}}{\partial x_i} + \cdots + \Phi_n \cdot \frac{\partial \sum^k U_k \xi_{kn}}{\partial x_i}$$

und bezeichnen Af, aufgefasst als infinitesimale Transformation aller dieser Grössen mit $A'f$. Alsdann wird, wie man sich leicht überzeugt:

$$A'f = \frac{\partial f}{\partial u} + U_1 B_1' f + U_2 B_2' f + \cdots + U_r B_r' f.$$

Nehmen wir daher eine ganz beliebige Differentialinvariante

$$\Omega(x_1 \ldots x_n,\ \Phi_1 \ldots) = \Omega(\Phi),$$

deren Ausdruck nach dem Vorangehenden die Grösse u nicht *explicite* enthält, so ist jedenfalls

$$A'(\Omega(\Phi)) = 0.$$

In dieser identisch bestehenden Gleichung bezeichnet Ω eine Function der *unabhängigen* Variabeln x_k, Φ_i, Φ_{ik} etc. . . ., während $A'f$ eine infinitesimale Transformation in eben diesen Variabeln und u darstellt.

Ich ersetze nun in $B_k'f$ und $A'f$ überall Φ durch Π und bezeichne die hervorgehenden Ausdrücke mit $B_k''f$ und $A''f$. Dann wird selbstverständlich $A''\Omega(\Pi) = 0$, oder ausgeführt:

$$\text{(L)} \qquad \sum\nolimits^i \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} A'' x_i + \sum\nolimits^i \frac{\partial \Omega}{\partial \Pi_i} A'' \Pi_i + \sum\nolimits^{ik} \frac{\partial \Omega}{\partial \Pi_{ik}} A'' \Pi_{ik} + \cdots = 0$$

und diese Gleichung besteht, wenn die Grössen x_k, Π_i, $\Pi_{ik} \ldots$ als unabhängige Variabeln betrachtet werden. Erinnern wir uns nun, dass Π, Π_i, $\Pi_{ik} \ldots$ sämmtlich Functionen von $x_1 \ldots x_n$, u bezeichnen, so lässt sich die letzte Gleichung in solcher Weise interpretiren, dass sich $\Omega(\Pi)$ wirklich als eine Lösung von $Af = 0$ herausstellt. Um diess nachzuweisen, differentiiren wir die Identität:

$$A\Pi = 0 = \frac{\partial \Pi}{\partial u} + \sum\nolimits^{kj} U_k \xi_{kj} \Pi_j$$

nach x_i und erhalten so die Relation:

$$A\Pi_i = -\sum\nolimits^{kj} U_k \frac{\partial \xi_{kj}}{\partial x_i} \Pi_j,$$

deren rechte Seite nach einer früheren Formel eben das Increment der Grösse Π_i bei der infinitesimalen Transformation $A''f$ darstellt. Wir kommen daher auf die Formel:

$$A\Pi_i = A''\Pi_i.$$

Wiederholte Differentiationen geben die analogen Gleichungen:

$$A\Pi_{iq} = A''\Pi_{iq}, \quad A\Pi_{iqs} = A''\Pi_{iqs} \text{ etc.}$$

Da endlich $Ax_i = A''x_i$ ist, erhalten wir durch Substitution der gefundenen Werthe in (L) die Gleichung:

$$\sum\nolimits^i \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} A x_i + \sum\nolimits^i \frac{\partial \Omega}{\partial \Pi_i} A\Pi_i + \sum\nolimits^{ik} \frac{\partial \Omega}{\partial \Pi_{ik}} A\Pi_{ik} + \cdots = 0,$$

welche wirklich zeigt, dass $\Omega(\Pi)$ eine Lösung von $Af = 0$ darstellt. Somit haben wir den folgenden allgemeinen Satz:

Satz 14. *Sind $B_1 f$, $B_2 f \dots B_r f$ unabhängige infinitesimale Transformationen einer Gruppe mit n Variabeln $x_1 \dots x_n$ und r Parametern, ist ferner*

$$Af = 0 = \frac{\partial f}{\partial u} + U_1 B_1 f + \cdots + U_r B_r f$$

eine gegebene partielle Differentialgleichung, deren Coefficienten U_k nur von u und nicht von den x abhängen; ist endlich

$$\Omega\left(x_1 \dots x_n, \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \cdots\right) = \Omega(\Phi)$$

*eine beliebige Differentialinvariante der Gruppe $B_k f$, und $\Pi(x_1 \dots x_n, u)$ eine Lösung von $Af = 0$, so ist $\Omega(\Pi)$ ebenfalls eine solche Lösung.**)

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes gewinnt man aus Π eine Reihe neuer Lösungen. Gestattet Π, *aufgefasst als Function der x allein*, eine gewisse Anzahl etwa ϱ und nicht mehr unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe $B_k f$, und genügen ausserdem diese ϱ Transformationen ϱ' linearen Relationen $\sum \beta_k B_k f = 0$, so liefert unser Verfahren successiv alle Lösungen mit Ausnahme der $\varrho - \varrho'$ letzten.**)

Im Vorangehenden dachten wir uns ein Integral $\Pi = \text{Const.}$ der Differentialgleichungen $Af = 0$ oder des simultanen Systems:

---

*) Setzt man einerseits voraus, dass die $B_k f$ die Form $x_i \dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ besitzen, andererseits, dass die gegebenen Integrale mit einer *arbiträren Constanten algebraisch* sind, so stimmen die *vorangehenden* Entwickelungen dieses Paragraphen mit einer von Darboux herrührenden Theorie (Comptes rendus 1880). *Ich darf im Uebrigen bemerken, dass die von mir in den Gött. Nachrichten* 1871, *p.* 551—557 *ausgeführten Integrationen mit den in diesem Paragraphen dargestellten Methoden verwandt sind.* Die übrigen Theorien dieses Paragraphen, die vollständig mein Eigenthum sind, habe ich im Nov. und Dec. 1882 in Mittheilungen an die Gesellschaft d. W. zu Christiania skizzirt.

**) Geht nämlich ein Werthsystem $x_1' \dots x_n'$, u_0 in ein zweites Werthsystem $x_1'' \dots x_n''$, u_0 über, durch eine Transformation der Gruppe $B_k f$, welche gleichzeitig die Function $\Pi(x_1 \dots x_n, u_0)$ invariant lässt, so hat für diese beiden Werthsysteme *jede* Differentialinvariante nach der Einsetzung von Π identische Zahlenwerthe. Haben andererseits für zwei Werthsysteme x_k', u_0 und x_k'', u_0 sowohl Π als auch jede zugehörige Differentialinvariante beide Male identische Zahlenwerthe, so giebt es unter den Transformationen der Gruppe $B_k f$ sicher eine, welche das eine Werthsystem in das zweite überführt und gleichzeitig Π invariant lässt. Der im Texte aufgestellte Satz ergiebt sich durch Verbindung der soeben angestellten Betrachtungen. Ganz analoge Betrachtungen führen zum Ziele, wenn gleichzeitig mehrere Lösungen $\Pi_k(x_1 \dots x_n, u)$ gegeben sind.

$$\frac{dx_i}{du} = \sum^k U_k \xi_{ki} \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

vorgelegt und zeigten, welcher Vortheil sich daraus ziehen lässt. Ganz analoge Theorien lassen sich entwickeln, wenn ein *particuläres* Integral

$$x_n = F(x_1 \ldots x_{n-1}, u)$$

oder ein System von particulären Integralen*)

$$x_n = F_n(x_1 \ldots x_q, u), \quad x_{n-1} = F_{n-1} \ldots x_{q+1} = F_{q+1}$$

(oder mehrere solche) vorgelegt ist. Dasselbe gilt, wenn ein beliebiges System von Differentialgleichungen, welches die infinitesimale Transformation Af zulässt, gegeben ist. Die hiermit angedeuteten Theorien, *deren Durchführung gar keine Schwierigkeit bietet*, gründen sich einerseits auf meine allgemeine Theorie der Differentialinvarianten, andererseits darauf, dass die Integration der Gleichung $Af = 0$ immer geleistet werden kann, *wenn hinlänglich viele particuläre* Integralsysteme von der Form $x_k = F_k(u)$ gegeben sind.

24. In der vorangehenden Nummer betrachteten wir eine Gleichung $Af = 0$ von einer gewissen speciellen Form, dachten uns ein oder mehrere Integrale des äquivalenten simultanen Systems gegeben, und zeigten, dass es im allgemeinen möglich war durch Differentiation gewisse weitere Integrale herzustellen. Hiermit ist die Integration von $Af = 0$ reducirt auf die Erledigung einer neuen Gleichung $A'f = 0$ mit weniger Variabeln. Es ist dabei sehr bemerkenswerth, dass diese reducirte Gleichung $A'f = 0$ gewisse charakteristische Eigenschaften besitzt, die ihre Integration erleichtern. Bei Auseinandersetzung dieser neuen Theorie beschränke ich mich hier auf einen besonders wichtigen speciellen Fall.

Ich nehme an, dass die Bf die Form

$$p_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad x_i p_k = x_i \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

besitzen. Unsere Gleichung $Af = 0$ hat somit die Form:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \sum^k (U_{k1} x_1 + U_{k2} x_2 + \cdots + U_{kn} x_n + U_k) \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0 = Af,$$

wobei die U_{ki} nur von u abhängen. Vorausgesetzt wird, dass eine Lösung von $Af = 0$, etwa $\Pi(x_1 \ldots x_n, u)$ gegeben ist.

Ich werde nun zunächst zeigen, dass es möglich ist, für $x_1 \ldots x_n$ solche neue Variabeln $\mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_n$ einzuführen, dass gleichzeitig Af und Π eine bemerkenswerthe einfache Form annehmen. Darnach stelle ich diejenigen Differentialgleichungen auf, welche die allgemeinsten Grössen

*) Es fragt sich hier, wie viele *wesentlich verschiedene* Transformationen der Gruppe das vorgelegte Gleichungssystem zulässt.

$\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n$ bestimmen, durch deren Einführung Af und Π die besprochene einfache Gestalt erhalten.

Ich bilde die endlichen Gleichungen unserer Gruppe

$$\mathfrak{x}_k = \sum\nolimits^i Z_{ki}(u)\, x_i + Z_k(u)$$

und denke mir Z_{ki} und Z_k so als Functionen von u gewählt, dass die $\mathfrak{x}_k$ Lösungen von $Af = 0$ sind. Ich füge die weitere Beschränkung hinzu, dass $\mathfrak{x}_k$ bei der Substitution $u = u_0$ in x_k übergehen soll. Werden die hierdurch definirten Grössen $\mathfrak{x}_k$ neben u als neue Variabeln eingeführt, so wird zunächst $Af = \frac{\partial f}{\partial u}$. Es besteht ferner eine Relation:

$$\Pi(x_1 \dots x_n, u) = W(\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n),$$

welche bei der Substitution $u = u_0$ übergeht in:

$$\Pi(x_1 \dots x_n, u_0) = W(x_1 \dots x_n)$$

und es wird also:

$$\Pi(x_1 \dots x_n, u) = \Pi(\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n, u_0).$$

Jetzt können wir unser Integrationsproblem folgendermassen formuliren:

$\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n$ *sollen in allgemeinster Weise als Functionen von* $x_1 \dots$ $\dots x_n$, u *derart bestimmt werden, dass die Gleichungen*

$$\text{(N)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathfrak{x}_i}{\partial x_k\, \partial x_j} = 0, \quad A\mathfrak{x}_i = 0, \\ \Pi(\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n, u_0) = \Pi(x_1 \dots x_n, u) \end{cases}$$

bestehen.

Es ist nun offenbar, dass diese Differentialgleichungen nach der in § 6 entwickelten allgemeinen Methode behandelt werden können. Die allgemeinste Lösung $\mathfrak{x}$ der Gleichungen $A\mathfrak{x} = 0$, $\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial x_i\, \partial x_j} = 0$ drückt sich nämlich durch n particuläre Lösungen $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2 \dots \mathfrak{y}_n$ folgendermassen aus:

$$\mathfrak{x} = c_1 \mathfrak{y}_1 + c_2 \mathfrak{y}_2 + \dots + c_n \mathfrak{y}_n + c,$$

wenn die c arbiträre Constanten bezeichnen.

Bilden daher $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 \dots \mathfrak{z}_n$ *ein System particulärer Lösungen der vereinigten Gleichungen* (N), *so werden ihre allgemeinsten Lösungen* $\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n$ *geliefert durch lineare Ausdrücke:*

$$\text{(P)} \qquad \mathfrak{x}_k = c_{k1} \mathfrak{z}_1 + c_{k2} \mathfrak{z}_2 + \dots + c_{kn} \mathfrak{z}_n + c_k,$$

deren constante Coefficienten c der einzigen Beschränkung unterworfen sind, dass die Gleichung

$$\Pi(\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n, u_0) = \Pi(\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n, u_0)$$

bestehen soll. Wenn daher $\Pi(\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n, u_0)$ keine continuirliche

Gruppe von linearen Transformationen gestattet, so geschieht die Bestimmung der x_k ohne Integration, allein durch ausführbare Operationen. Gestattet dagegen Π eine derartige Gruppe mit ϱ Parametern, so verlangt die Auffindung der x_k nach der in § 6 entwickelten Methode im Allgemeinen noch die Integration einer Gleichung $A'f = 0$ mit $\varrho + 1$ Variabeln und ϱ infinitesimalen Transformationen. Dieses reducirte Problem wird dann in der gewöhnlichen Weise weiter zerlegt.

Die Schlussbemerkungen der vorangehenden Nummer finden offenbar auch hier Anwendung.*)

§ 9.

Allgemeine Sätze über continuirliche Gruppen von Transformationen.

25. In diesem Paragraphen stelle ich eine Reihe fundamentaler Sätze über Transformationsgruppen, theilweise ohne Beweis zusammen. Ich beginne mit drei einfachen Hülfssätzen, welche sich auf die allgemeine projectivische Gruppe der Mannigfaltigkeit $x_1 \dots x_n$ beziehen, das heisst auf diejenige Gruppe zwischen den genannten Variabeln, deren $n(n+2)$ infinitesimale Transformationen auf die drei Formen

$$p_k, \quad x_i p_k, \quad x_i(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n)$$

reductibel sind.

Hülfssatz 1. Die allgemeine projectivische Gruppe der Mannigfaltigkeit $x_1 \dots x_n$ mit den $n(n+2)$ infinitesimalen Transformationen p_k, $x_i p_k$, $x_i(x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n)$ ist *einfach*.

Hülfssatz 2. Die allgemeine projectivische Gruppe der Mannigfaltigkeit $x_1 \dots x_n$ enthält keine Untergruppe mit mehr als $n(n+1)$ infinitesimalen Transformationen. Jede Untergruppe, welche gerade $n(n+1)$ Transformationen enthält, ist vermöge einer projectivischen Transformation entweder mit der Gruppe p_k, $x_i p_k$ oder mit der Gruppe $x_i . p_k$, $x_i(x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n)$ ähnlich. (Diese beiden Gruppen sind gleichzusammengesetzt, indem die eine in die andere durch eine dualistische Transformation übergeführt werden kann).

Hülfssatz 3. Die Gruppe p_k, $x_i p_k$ enthält nur drei invariante Untergruppen. Die erste besteht aus den Transformationen p_k (allen Translationen), die zweite aus den Transformationen

$$p_k, \quad x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$$

(allen Aehnlichkeitstransformationen), die dritte aus den Transformationen

$$p_k, \quad x_i p_i - x_k p_k, \quad x_i p_k \; (i \gtrless k)$$

---

*) Die Theorien dieser Nummer dehnen sich leicht auf den Fall aus, dass statt der Gruppe p_k, $x_i p_k$ eine ganz beliebige Gruppe $B_k f$ mit bekannten endlichen Transformationen vorgelegt ist.

[allen projectivischen Transformationen, welche die Volumina des Cartesischen Raumes x_k invariant lassen].

Die Beweise für diese drei mir längst bekannten Sätze, welche ich schon bei verschiedenen Gelegenheiten benutzt habe, ergeben sich leicht aus den Elementen meiner Theorie der Transformationsgruppen.

26. Tiefer liegen die folgenden äusserst wichtigen Sätze, unter denen die drei ersten sich auf Gruppen von *Punkt*transformationen, die übrigen auf ganz beliebige Gruppen von Berührungstransformationen beziehen.

In den beiden ersten Sätzen denke ich mir die Ausdrücke der infinitesimalen Transformationen $\sum \xi_i p_i$ nach den Potenzen der x entwickelt und spreche wie früher von infinitesimalen Transformationen nullter, erster ... Ordnung.

Satz 15. *Enthält eine Gruppe von Punkttransformationen in den Variabeln $x_1 \dots x_n$ n infinitesimale Transformationen nullter Ordnung*

$$p_1 + \cdots, \; p_2 + \cdots, \; \cdots, \; p_n + \cdots$$

und n^2 infinitesimale Transformationen erster Ordnung $x_i p_k + \cdots$, so sind zwei Fälle denkbar. Entweder enthält sie infinitesimale Transformationen zweiter Ordnung und ist dann vermittelst einer Punkttransformation ähnlich mit der allgemeinen projectivischen Gruppe der betreffenden Mannigfaltigkeit; oder auch unsere Gruppe enthält keine infinitesimalen Transformationen ausser den angegebenen $n(n+1)$; dann ist sie durch eine Punkttransformation mit der Gruppe p_k, $x_i p_k$ ähnlich.

Satz 16. *Enthält eine Gruppe von Punkttransformationen in den Variabeln $x_1 \dots x_n$ n infinitesimale Transformationen nullter Ordnung $p_1 + \cdots$, $p_2 + \cdots$, $\cdots p_n + \cdots$ und $n^2 - 1$ infinitesimale Transformationen erster Ordnung von der Form:*

$$x_i p_k \cdots (i \gtrless k); \quad x_1 p_1 - x_i p_i + \cdots,$$

sonst aber keine von der ersten Ordnung, so ist sie durch eine Punkttransformation mit der linearen Gruppe

$$p_i, \; x_i p_k \, (i \gtrless k), \; x_1 p_1 - x_i p_i$$

ähnlich.

Diese beiden merkwürdigen Sätze publicirte ich, für den Fall $n = 2$ in den Gött. Nachr. Decbr. 1874, und in voller Allgemeinheit in meinem Archive Bd. III, 1878. Für den Fall $n = 2$ gab ich, wenn ich nicht irre, strenge Beweise derselben in den Math. Ann. Bd. XVI, p. 509 u. ff.; im allgemeinen Falle lässt sich der Beweis in ganz analoger Weise führen. Man kann übrigens noch viele ähnliche Sätze, die sich theilweise auch auf Gruppen von Berührungstransformationen beziehen, aufstellen.

Aus den vorangehenden Sätzen folgt als Corollar der folgende:

Satz 17. *Ist eine Gruppe von Punkttransformationen der Mannigfaltigkeit* $x_1 \dots x_n$ *gleichzusammengesetzt mit der allgemeinen projectivischen Gruppe dieser Mannigfaltigkeit, so ist sie mit ihr durch eine Punkttransformation ähnlich.*

Der Beweis dieses Satzes lässt sich folgendermassen führen. Unsere Gruppe muss n unabhängige infinitesimale Transformationen nullter Ordnung enthalten, indem sonst die infinitesimalen Transformationen erster und höherer Ordnung eine Untergruppe mit mehr als $n(n+1)$ Parametern bilden würden, was nicht möglich ist (Hülfssatz 2). Wir haben also $n(n+1)$ infinitesimale Transformationen erster und höherer Ordnung, die eine mit der Gruppe p_k, $x_i p_k$ gleichzusammengesetzte Untergruppe bilden. Giebt es nun n^2 infinitesimale Transformationen erster Ordnung, so folgt die Richtigkeit unseres Satzes direct aus dem Satze 15. Giebt es andererseits weniger als n^2 infinitesimale Transformationen erster Ordnung, so haben wir jedenfalls mehr als n, etwa $n + \varepsilon$ infinitesimale Transformationen, deren Ordnung grösser als 1 ist. Wären diese *sämmtlich* von der zweiten Ordnung, so müssten sie paarweise vertauschbar sein und überdies eine invariante Untergruppe bilden, was nach dem Hülfssatze 3 unmöglich ist. Unsere Gruppe enthält daher sicher infinitesimale Transformationen dritter Ordnung. Es lässt sich aber nachweisen, dass wir so auf einen Widerspruch geführt werden.

Die infinitesimalen Transformationen erster Ordnung T_1 zusammen mit den infinitesimalen Transformationen zweiter Ordnung T_2 und denjenigen dritter Ordnung T_3 u. s. w. bilden nämlich offenbar eine Gruppe mit den $n - 1$ invarianten Untergruppen $T_2, T_3 \dots T_n$; $T_3 \dots T_n$; $T_4 \dots T_n$ u. s. w. Berücksichtigen wir nun den Hülfssatz 3, so erkennen wir, dass $n = 3$ sein muss, dass also unsere Gruppe keine infinitesimale Transformation enthält, deren Ordnung grösser als 3 ist. Dabei müssten alle (T_2, T_3) als Ausdrücke vierter Ordnung verschwinden, was mit dem Hülfssatze 3 in Widerspruch steht.

Unser Satz ist also bewiesen.

27. Ich gebe jetzt eine andere Reihe fundamentaler Sätze, die sich auf beliebige continuirliche Gruppen von *Berührungstransformationen* beziehen. Die wichtigsten unter ihnen habe ich zuerst in den Verh. d. Ges. d. W. zu Christiania in der Note: Untersuchungen über Differentialgleichungen III (Mai 1883) publicirt.

Theorem V. Enthält eine einfache Gruppe G_n mit n Parametern eine Untergruppe G_{n-1} mit $n-1$ Parametern, so ist n gleich 3 und es ist G_n gleichzusammengesetzt mit der allgemeinen projectivischen Gruppe einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit.

Um diesen Satz zu beweisen, fasse ich, wie ich es zu thun pflege, die infinitesimalen Transformationen $c_1 H_1 + \cdots + c_n H_n$ unserer Gruppe als Individuen*) auf, die bei der Gruppe unter einander vertauscht werden. Eine $(n-1)$ gliedrige Untergruppe G_{n-1} mit den infinitesimalen Transformationen $H_1 \ldots H_{n-1}$ bleibt invariant bei Ausführung einer in ihr enthaltenen infinitesimalen Transformation

$$c_1 H_1 + \cdots + c_{n-1} H_{n-1}.$$

Dagegen muss sie durch Ausführung einer infinitesimalen Transformation von der Form:

$$H_n + c_1 H_1 + c_2 H_2 + \cdots + c_{n-1} H_{n-1}$$

in eine benachbarte $(n-1)$ gliedrige Untergruppe übergehen, denn sonst wäre sie innerhalb G_n invariant. Es ist ferner klar, dass die Untergruppe G_{n-1} in dieselbe benachbarte G_{n-1} übergeht, welche Werthe auch die Constanten c haben mögen. Bei Ausführung aller endlichen Transformationen unserer Gruppe geht unsere G_{n-1} somit in *einfach unendlich viele* G_{n-1} über; der Inbegriff derselben bildet eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M_1, welche von G_n in sich transformirt wird.

Ich behaupte nun, dass alle diese G_{n-1} nicht gleichzeitig bei ein und derselben infinitesimalen Transformation K unserer Gruppe G_n invariant bleiben können. Es wäre dann nämlich K in allen G_{n-1} zugleich enthalten und es existirte in G_n eine invariante Untergruppe, nämlich der Inbegriff aller infinitesimalen Transformationen, welche allen G_{n-1} gemeinsam sind. Das ist ausgeschlossen, es giebt also wirklich keine infinitesimale Transformation K, welche alle unsere ∞^1 G_{n-1} gleichzeitig invariant lässt. Hieraus folgt, dass zwei verschiedene infinitesimale Transformationen H_a und H_b jene einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M_1 nicht in gleicher Weise transformiren können, weil sonst die Transformation $H_a - H_b$ alle G_{n-1} unserer M_1 invariant liesse. *Also wird die einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M_1 durch eine Gruppe G_n' mit n Parametern transformirt* und also ist n nicht grösser als drei (Math. Ann. Bd. XVI, p. 455). Wäre andererseits n gleich 2, so enthielte G_n jedenfalls eine invariante Untergruppe und also ist unser Satz erwiesen.

In den folgenden Sätzen verstehe ich unter G_r kurzweg eine Gruppe mit r Parametern.

Satz 18. *Enthält eine zusammengesetzte Gruppe G_n eine nicht invariante Untergruppe G_{n-1}, so umfasst die Untergruppe G_{n-1} eine Unter-*

*) Man denkt sich am besten alle infinitesimalen Transformationen $\sum c_k H_k$ als Punkte eines n-fach ausgedehnten homogenen Raumes, der durch eine projectivische Gruppe transformirt wird. Die G_{n-1} sind dann ebene Mannigfaltigkeiten u. s. w.

gruppe G_ϱ, welche sowohl in der betreffenden G_{n-1} als in G_n invariant ist; dabei ist $n - \varrho$ nicht grösser als drei. Ist unter den gleichberechtigten G_{n-1} keine invariant in G_n, so ist $n - \varrho = 3$. In diesem Falle können die infinitesimalen Transformationen von G_n, welche $H_1 \dots H_{n-3}$, B_1, B_2, B_3 heissen mögen, so gewählt werden, dass Relationen von der Form:

$$(B_1, B_2) = B_1 + \sum \alpha_k H_k,\ (B_1, B_3) = 2B_2 + \sum \beta_k H_k,$$

$$(B_2, B_3) = B_3 + \sum \gamma_k H_k,\ (H_i, B_k) = \sum \delta_{iks} H_s, (H_i, H_k) = \sum c_{iks} H_s$$

bestehen.

Der Beweis dieses Satzes folgt fast unmittelbar aus den bei dem Beweise des vorangehenden Satzes angestellten Betrachtungen.

Theorem VI. Enthält eine einfache G_n eine G_{n-2}, dagegen keine G_{n-1}, so ist $n = 8$; ausserdem ist G_n gleichzusammengesetzt mit der allgemeinen projectivischen Gruppe einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit.

Jede G_{n-2} erhält nämlich durch Ausführung aller Transformationen der G_n zweifach unendlich viele Lagen, deren Inbegriff eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M_2 bestimmt. Diese M_2 wird in sich transformirt durch eine Gruppe G_n' mit n *wesentlichen* Parametern. Da überdies G_n' mit G_n gleichzusammengesetzt ist und also keine G_{n-1}' enthält, so ist G_n ähnlich mit der allgemeinen projectivischen Gruppe der M_2, wie aus meiner Bestimmung aller Gruppen einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit hervorgeht.

Hiermit ist unser Satz erwiesen.

Satz 19. *Enthält eine zusammengesetzte Gruppe G_n eine G_{n-2}, dagegen keine G_{n-1}, so gehört diese G_{n-2} zu einer Schaar von ∞^2 Untergruppen G_{n-2}, unter denen keine invariant ist. Alle diese G_{n-2} enthalten eine gemeinsame Untergruppe G_{n-8}, die in G_n invariant ist.*

Der Beweis dieses Satzes, der übrigens analog wie Satz 18 näher ausgeführt werden kann, ergiebt sich fasst unmittelbar aus den beim Beweise der vorangehenden Sätze angestellten Betrachtungen.

Theorem VII. Enthält eine einfache G_n eine G_{n-3}, dagegen keine G_{n-2} oder G_{n-1}, so ist n entweder gleich 15 oder gleich 10. Im ersten Falle ist unsere G_{15} gleichzusammengesetzt mit der allgemeinen projectivischen Gruppe des dreifach ausgedehnten Raumes. Im zweiten Falle ist die betreffende G_{10} gleichzusammengesetzt mit der Gruppe aller conformen Transformationen des gewöhnlichen Raumes oder, was auf dasselbe hinauskommt, mit der projectivischen Gruppe eines linearen Liniencomplexes.

Dieser Satz beruht auf meiner noch nicht (vollständig) publicirten Bestimmung aller Gruppen von Punkttransformationen eines dreifach

ausgedehnten Raumes. Es mag hier ausdrücklich hervorgehoben werden, dass die projectivische G_{10} eines linearen Liniencomplexes zweierlei G_7 enthält, solche nämlich die einen Punkt und solche die eine Complexlinie invariant lassen. Diese Bemerkung hat eine gewisse Bedeutung in der allgemeinen Theorie der Transformationsgruppen.

Satz 20. *Enthält eine zusammengesetzte Gruppe G_n eine G_{n-3}, dagegen keine G_{n-2} oder G_{n-1}, so gehört diese G_{n-3} zu einer Schaar von ∞^3 Gruppen G_{n-3}, unter denen keine invariant ist. Alle G_{n-3} dieser Schaar enthalten eine gemeinsame in G_n invariante G_ϱ, und zwar ist $n - \varrho$ gleich* 10 *oder* 15.

Auch dieser Satz kann in Analogie mit Satz 18 vervollständigt werden.

Satz 21. *Enthält eine Gruppe G_n eine G_{n-q}, dagegen keine Untergruppe mit mehr als $n - q$ Parametern, so gehört diese G_{n-q} zu einer Schaar von ∞^q Gruppen G_{n-q}; von derselben ist keine für sich allein, wohl aber ist ihr Inbegriff in G_n invariant.*

Dieser letzte Satz ist eigentlich eine unmittelbare Consequenz der Begriffe Untergruppe und invariante Untergruppe. Derselbe kann für jeden Werth der Differenz $n - q$ näher präcisirt werden. Auf die hiermit angedeutete Reihe von fundamentalen Sätzen*) werde ich hoffentlich bei einer späteren Gelegenheit zurückkommen können. Hier beschränke ich mich auf die Formulirung zweier wichtiger Fragen.

Gesetzt, eine einfache Gruppe G_n enthält eine Untergruppe G_{n-q} und keine mit mehr als $n-q$ Parametern. Giebt es dann, frage ich, unter den projectivischen Gruppen einer q-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit eine mit G_n gleichzusammengesetzte Gruppe? Ich vermuthe, dass diese Frage mit ja zu beantworten ist. Nach dem Obenstehenden ist dies jedenfalls der Fall, wenn q gleich 1, 2 oder 3 ist.

Meine zweite Frage ist folgende: Es sei vorgelegt eine einfache (projectivische) Gruppe G_n einer q-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, unter deren Untergruppen keine mehr als $n - q$ Parameter enthält. Giebt es dann eine Gruppe mit mehr als n Parametern, welcher G_n als invariante Untergruppe angehört? Diese Frage muss wahrscheinlich mit Nein beantwortet werden.

---

*) Diese Sätze können für jeden Werth von q formulirt werden, wenn die Gruppen von *Punkt*transformationen eines q-fach ausgedehnten Raumes alle bestimmt sind. [Es ist möglich alle r-gliedrige Gruppen von Punkttransformationen eines n-fach ausgedehnten Raumes durch ausführbare Operationen zu bestimmen.]

§ 10.

Integration vollständiger Systeme mit bekannten endlichen Transformationen, die eine continuirliche Gruppe bilden.

Die Aufgabe ein vollständiges System mit bekannten infinitesimalen oder endlichen Transformationen, die eine Gruppe bilden, zu integriren, reducirt sich immer auf das folgende Problem:

Vorgelegt ist *eine* Gleichung:

$$Af = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_1^m {}^k\, Y_k(x, y_1, y_2 \dots y_m) \frac{\partial f}{\partial y_k}$$

mit m bekannten infinitesimalen Transformationen:

$$B_k f = \sum_1^m {}^i\, \eta_{ki}(x, y_1, y_2 \dots y_m) \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (k = 1 \dots m),$$

die eine Gruppe bilden und keine lineare Relation $\sum \beta_k B_k f = 0$ befriedigen. Wir haben daher noch folgende Relationen:

$$(A, B_k) = 0, \quad (B_i, B_k) = \sum c_{iks} B_s.$$

28. Indem ich mein altes Problem wieder aufnehme, setze ich jetzt einerseits voraus, dass die *endlichen* Transformationen der Gruppe $B_k f$ bekannt sind, andererseits, dass die Zusammensetzung dieser Gruppe durch eine vorläufige algebraische Discussion bestimmt worden ist.

Ist $B_{n+1}, B_{n+2} \dots B_m$ eine invariante Untergruppe der gegebenen Gruppe mit möglichst vielen Parametern, so bestimmen wir ein System Lösungen $x, x_1 \dots x_n$ des vollständigen Systems:

$$B_{n+1}f = 0, \; B_{n+2}f = 0 \dots B_m f = 0.$$

Das ist nach unserer Voraussetzung, dass die endlichen Transformationen der Gruppe bekannt sind, als eine *ausführbare* Operation aufzufassen. Wir führen $x, x_1 \dots x_n$ neben $m - n$ anderen Grössen etwa $y_{n+1} \dots y_m$ als neue unabhängige Variabeln ein. Nach unserer Voraussetzung, dass $B_{n+1} \dots B_m$ eine invariante Untergruppe bilden, bestehen Relationen von der Form:

$$B_{n+i}(B_k(f)) - B_k(B_{n+i}(f)) = a_{n+1} B_{n+1} + \dots + a_m B_m.$$

Wenn $f = x_j$ gesetzt wird, folgt:

$$B_{n+i}(B_k(x_j)) = 0,$$

was bedeutet, dass $B_k(x_j)$ nur von $x, x_1 \dots x_n$ abhängt. Setzen wir andererseits auch in den Gleichungen:

$$A(B_{n+i}(f)) - B_{n+i}(A(f)) = 0$$

$f = x_j$, so wird $B_{n+i}(A(x_j)) = 0$, woraus wir ebenfalls schliessen, dass $A(x_j)$ nur von $x, x_1 \dots x_n$ abhängt.

Demnach erhält Af in den neuen Variabeln die Gestalt:

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_1^n{}^k X_k(x, x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{n+1}^m{}^k Y_k(x, x_1 \dots y_m) \frac{\partial f}{\partial y_k}.$$

Die infinitesimalen Transformationen $B_{n+1} \dots B_m$ der invarianten Untergruppe sind offenbar von den Differentialquotienten von f nach $x, x_1 \dots x_n$ frei und haben also die Form:

$$B_{n+j}f = \sum_{n+1}^m{}^i \eta_{n+j,i}(x\, x_1 \dots x_n\, y_{n+1} \dots y_m) \frac{\partial f}{\partial y_i}.$$

Dagegen erscheinen die übrigen infinitesimalen Transformationen Bf in der Form:

$$B_k f = \sum_1^n{}^i \xi_{ki}(x, x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{n+1}^m{}^i \eta_{ki}(x, x_1 \dots y_m) \frac{\partial f}{\partial y_i}.$$

Wir können jetzt die Integration von $Af = 0$ dadurch fördern, dass wir zunächst die reducirte Gleichung:

$$A'f = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_1^n{}^k X_k(x, x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

erledigen. Diese Gleichung enthält nur $n + 1$ Variable und gestattet dabei n bekannte infinitesimale Transformationen in diesen Variabeln, nämlich:

$$B'_k f = \sum_1^n{}^i \xi_{ki}(x\, x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, \dots n),$$

welche eine Gruppe bilden und keine lineare Relation $\sum \beta_k' B_k' = 0$ erfüllen. Diese Gruppe ist jetzt *einfach*.

Sind nun $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \dots \mathrm{x}_n$ ein System Lösungen der Gleichung $A'f = 0$ (deren Integration wir uns geleistet denken) und also gleichzeitig Lösungen von $Af = 0$, so führen wir $x, \mathrm{x}_1 \dots \mathrm{x}_n\, y_{n+1} \dots y_m$ als neue unabhängige Variabeln ein. Hierdurch erhält $Af = 0$ die Form:

$$\mathrm{A}f = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{n+1}^m{}^k Y_k(x, \mathrm{x}_1 \dots \mathrm{x}_n,\ y_{n+1} \dots y_m) \frac{\partial f}{\partial y_k}$$

und die infinitesimalen Transformationen $B_{n+1} \dots B_m f$, welche $\mathrm{A}f = 0$ in sich transformiren, enthalten jetzt neben den als Constanten auftretenden Grössen $x, \mathrm{x}_1 \dots \mathrm{x}_n$ nur die Variabeln $y_{n+1} \dots y_n$.

Die Integration der Gleichung $Af = 0$ mit m Variabeln und $m + 1$

infinitesimalen Transformationen ist hiermit zerlegt in die Erledigung der beiden einfacheren Gleichungen: $A'f=0$ mit $n+1$ Variabeln und n infinitesimalen Transformationen und $\Delta f=0$ mit $m-n+1$ Variabeln und $m-n$ infinitesimalen Transformationen. Bilden diese $m-n$ Transformationen eine *zusammengesetzte* Gruppe, so zerlegt sich die Integration von $\Delta f=0$ in ganz entsprechender Weise u. s. w.

29. Wir beschäftigen uns jetzt mit dem reducirten Probleme:

Es ist die Gleichung vorgelegt:

$$A'f=0=\frac{\partial f}{\partial x}+\sum_1^n {}^k X_k(x,x_1\dots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_k}$$

mit n bekannten infinitesimalen Transformationen:

$$B_i'f=\sum_1^n {}^k \xi_{ik}(x\,x_1\dots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_k},$$

die eine *einfache* Gruppe mit bekannten *endlichen* Transformationen bilden. Wir wissen überdies, dass die $B_i'f$ keine lineare Relation $\sum \beta_i' B_i'f=0$ befriedigen.

Wir können jetzt die Entwickelungen der Nummer 17 verwerthen. Es giebt nach denselben eine Gruppe mit n infinitesimalen Transformationen:

$$C_k'f=\sum_1^n {}^i \eta_{ki}(x,x_1\dots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

welche durch die n Gleichungen:

$$(A',C')=0,\quad (B_i',C')=0$$

vollständig bestimmt sind. Auch wissen wir, dass die Auffindung der $C_k'f$ sich mit der Integration von $A'f=0$ vollständig deckt.

Es giebt andererseits, wenn x als Constante betrachtet wird, n infinitesimale Transformationen:

$$D_k'f=\sum_1^n {}^i \zeta_{ki}(x,x_1\dots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i},\quad (k=1\dots n),$$

welche durch die Relationen:

$$(B_i',D_k')=0$$

bestimmt werden. Da wir ausserdem die endlichen Transformationen der Gruppe $B_i'f$ kennen, so ist es möglich, n unabhängige infinitesimale Transformationen $D_k'f$ wirklich herzustellen. Es ist auch klar, dass die allgemeinsten Ausdrücke D', welche die Relationen (B_i', D') erfüllen, die Form

$$\varphi_{k1}(x)\,D_1'f+\varphi_{k2}(x)\,D_2'f+\cdots+\varphi_{kn}(x)\,D_n'f$$

besitzen. Insbesondere haben daher die unbekannten infinitesimalen Transformationen $C_k'f$ diese Form, oder es bestehen $2n$ Relationen von der Form:

$$C_k'f = \sum^i \varphi_{ki}(x) D_i'f, \quad D_k'f = \sum^i \psi_{ki}(x) C_i'f.$$

Erinnern wir uns jetzt, dass alle (A', C_k') gleich Null sind, so erkennen wir, dass die *bekannten* Ausdrücke $D_k'f$ gewisse Relationen:

$$(A', D_k') = \lambda_{k1}(x) D_1'f + \cdots + \lambda_{kn}(x) D_n'f$$

erfüllen.

Es handelt sich also um die Integration einer Gleichung $A'f = 0$ mit n bekannten infinitesimalen Transformationen $B_k'f$, welche zu A' in der Beziehung $(A', B_k') = 0$ stehen. Ueberdiess kennen wir n infinitesimale Transformationen $D_k'f$, welche Relationen von der Form

$$(A', D_k') = \sum^i \lambda_{ki}(x) D_i'$$

erfüllen; diese $D'f$ bilden eine mit der Gruppe $B_1' \ldots B_n'$ ähnliche, folglich eine einfache Gruppe.

Um dieses Problem noch weiter zu reduciren, wählen wir eine in der Gruppe B_kf enthaltene Untergruppe mit *möglichst vielen Parametern*, etwa $B_{q+1}' \ldots B_n'$ *), bilden die Lösungen $x, z_1 \ldots z_q$ des vollständigen Systems:

$$B_{q+1}'f = 0 \ldots B_n'f = 0,$$

was eine ausführbare Operation ist, und führen neben x die z_k als unabhängige Variabeln ein. Setzen wir nun in den Relationen:

$$A'(B_{q+i}'(f)) - B_{q+i}'(A'(f)) = 0,$$
$$D_j'(B_{q+i}'(f)) - B_{q+i}'(D_j'(f)) = 0$$

f gleich z_k, so wird:

$$B_{q+i}'(A'(z_k)) = 0, \qquad B_{q+i}'(D_j'(z_k)) = 0,$$

sodass sowohl $A'z_k$ als $D_j'z_k$ nur von $x, z_1 \ldots z_q$ abhängen. In den neuen Variabeln erhalten daher $A'f$ und $D_k'f$ die Form:

$$A''f = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_1^q {}^i Z_i(x, z_1 \ldots z_q) \frac{\partial f}{\partial z_i},$$

$$D_k''f = \sum^i Z_{ki}(x, z_1 \ldots z_q) \frac{\partial f}{\partial z_i} \quad (k = 1, 2 \ldots n).$$

Die $D_k''f$ bilden eine mit der Gruppe $B_1' \ldots B_n'$ gleichzusammengesetzte Gruppe und genügen dabei gewissen Relationen:

---

*) Enthält die einfache Gruppe $B_1' \ldots B_n'$ verschiedenartige Untergruppen mit $n - q$ Parametern, so ist es nicht ganz gleichgültig, welche wir wählen (s. hierzu p. 135, Zeile 1—4 dieser Abhandlung). Bei einer anderen Gelegenheit gehe ich darauf näher ein.

$$(A'', D_k'') = \varphi_{k1}(x)\, D_1'' + \cdots + \varphi_{kn}(x)\, D_n''.$$

Ist die Gleichung $A''f = 0$ integrirt, so genügen nach den in § 2 dargestellten Entwickelungen zur Erledigung von $A'f = 0$ blosse Differentiationen. *)

Es ist nun sehr bemerkenswerth, dass die Kenntniss der $D_k''f$ zur Reduction von $A''f = 0$ auf eine canonische Form führt. Ich werde dies an einer Reihe von Beispielen, unter denen eins von sehr allgemeiner Natur ist, verificiren.

30. Zuerst nehmen wir an, dass $n = 1$ ist. Dann kann die Integration der Gleichung

$$A'f = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} + X(x, x_1)\, \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

mit der bekannten infinitesimalen Transformation $B_1 f = \xi \frac{\partial f}{\partial x_1}$ bekanntlich durch eine Quadratur geleistet werden.

Ist dagegen n grösser als 1, so kann die Integration von $A'f = 0$ niemals durch eine Reihe von Quadraturen geleistet werden. Es sei zunächst $q = 1$. Dann ist nach unserem Theoreme V: $n = 3$ und die Gruppe D_1'', D_2'', D_3'' ist gleichzusammengesetzt und zugleich ähnlich mit der allgemeinen projectivischen Gruppe einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit z, d. h. mit einer Gruppe, deren infinitesimale Transformationen sind:

$$\frac{df}{dz}, \quad z\, \frac{df}{dz}, \quad z^2\, \frac{df}{dz}. \tag{12}$$

Wir haben also eine Gleichung:

$$A''f = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} + Z(x, z_1)\, \frac{\partial f}{\partial z_1}$$

mit drei bekannten infinitesimalen Transformationen:

$$D_k''f = Z_k(x, z_1)\, \frac{\partial f}{\partial z_1} \quad (k = 1, 2, 3),$$

die eine Gruppe von Transformationen der Variablen z_1 bilden. Wir können immer annehmen, dass die $D_k''f$ so gewählt sind, dass die Relationen

$$(D_1'', D_2'') = D_1'', \ (D_1'', D_3'') = 2 D_2'', \ (D_2'', D_3'') = D_3''$$

bestehen. Setzen wir daher:

$$D_1'' = \frac{df}{dz}, \quad D_2'' = z\, \frac{df}{dz}, \quad D_3'' = z^2\, \frac{df}{dz},$$

so erhalten wir eine Darstellung von z_1 als Function von z, vermöge

*) Die früher besprochene Gleichung $\mathrm{A}f = 0$ wird selbstverständlich in ganz ähnlicher Weise wie $Af = 0$ behandelt. Dabei muss man die auf pag. 89 dieser Arbeit gegebenen Entwickelungen berücksichtigen, worauf ich indess hier nicht eingehe.

deren die Gruppe $D_k''f$ auf die Form (12) gebracht wird. In den Variabeln x, z erhalten also $A''f$ und $D_k''f$ die Form:

$$A''f = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} + Z(x, z)\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}, \quad z\frac{\partial f}{\partial z}, \quad z^2\frac{\partial f}{\partial z}$$

und die Relationen $(D_k'', A'') = \sum^i \alpha_{ki(x)} D_i''$ liefern drei Gleichungen von der Form:

$$\frac{dZ}{dz} = \alpha_{11} + \alpha_{12}z + \alpha_{13}z^2,$$

$$z\frac{dZ}{dz} - Z = \alpha_{21} + \alpha_{22}z + \alpha_{23}z^2,$$

$$z^2\frac{dZ}{dz} - 2zZ = \alpha_{31} + \alpha_{32}z + \alpha_{33}z^2,$$

welche zeigen, dass Z die Form

$$Z = X(x) + X_1(x)\,z + X_2(x)\,z^2$$

besitzt. *Hiermit ist $A''f = 0$ auf eine sogenannte Riccatische Gleichung erster Ordnung*

$$\frac{dz}{dx} = X + X_1 z + X_2 z^2$$

reducirt.

Setzen wir $z = \frac{v_1}{v_2}$, so wird diese Riccatische Gleichung äquivalent mit dem simultanen Systeme:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dv_1}{X_0 v_1 + X v_2} = \frac{dv_2}{-X_2 v_1 + (X_0 - X_1)\,v_2},$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, mit der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} + (X_0 v_1 + X v_2)\frac{\partial f}{\partial v_1} + (-X_2 v_1 + X_3 v_2)\frac{\partial f}{\partial v_2},$$

wo der Kürze wegen $X_0 - X_1$ gleich X_3 gesetzt ist. Also:

Theorem VIII. Hat die Hülfsgleichung $A''f = 0$ die Form

$$\frac{\partial f}{\partial x} + Z(x, z_1)\frac{\partial f}{\partial z_1} = 0,$$

so ist sie reductibel auf eine allgemeine Riccatische Gleichung erster Ordnung oder auf eine Gleichung von der Form:

$$\Omega(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + (X_1 v_1 + X_2 v_2)\frac{\partial f}{\partial v_1} + (X_3 v_1 + X_4 v_2)\frac{\partial f}{\partial v_2} = 0,$$

wo die X_k arbiträre Functionen von x bezeichnen.

Dieser fundamentale Satz dehnt sich selbstverständlich auf alle bei der Integration von $Af = 0$ auftretenden Hülfsgleichungen *erster* Ordnung aus, soweit sie sich nicht durch Differentiation oder Quadratur erledigen lassen. (Vergl. hierzu Verh. d. G. d. W. zu Christiania, Mai 1882, Nr. 10.)

Nunmehr betrachten wir den Fall $q = 2$. Wir haben also eine Gleichung:

$$A''f = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} + Z_1(x, z_1, z_2)\frac{\partial f}{\partial z_1} + Z_2(x, z_1, z_2)\frac{\partial f}{\partial z_2}\,.$$

und eine bekannte *einfache* Gruppe von n infinitesimalen Transformationen:

$$D_k''f = Z_{k1}(x, z_1, z_2)\frac{\partial f}{\partial z_1} + Z_{k2}(x, z_1, z_2)\frac{\partial f}{\partial z_2},$$

welche Relationen von der Form:

$$(A'', D_k'') = \varphi_{k1}(x)\, D_1'' + \cdots + \varphi_{kn}(x)\, D_n''$$

erfüllen. Da die Gruppe D_k'' in den Variabeln z_1, z_2 keine Untergruppe mit mehr als $n - 2$ Parametern enthält, so ist (*Theorem* VI) $n = 8$. Die Gruppe $D_k''f$ ist ausserdem gleichzusammengesetzt und nach dem Satze 17 zugleich ähnlich mit der allgemeinen projectivischen Gruppe einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit x, y, also mit der Gruppe:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}},\ \frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}},\ \mathrm{x}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}},\ \mathrm{y}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}},\ \mathrm{x}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}},\ \mathrm{y}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}},\ \mathrm{x}^2\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{xy}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}},$$
$$\mathrm{xy}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{y}^2\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}},$$

deren allgemeine inf. Transformationen wir mit $\mathsf{B}_k f$ bezeichnen. Es ist dabei unter Berücksichtigung der in § 4 dargestellten allgemeinen Theorie immer, und sogar ohne Quadratur oder Differentiation, möglich, die Grössen x, y derart als Functionen der Variabeln z_1, z_2 und der als Constante auftretenden Grösse x zu bestimmen, dass die $D_k''f$ die Form $\mathsf{B}_k f$ annehmen.

Erhält nun $A''f$ in den neuen Variabeln x, y und x die Form:

$$A''f = \frac{\partial f}{\partial x} + X(x, \mathrm{x}, \mathrm{y})\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}} + Y\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial f}{\partial x} + Ef,$$

so bestehen nach dem Vorhergehenden gewisse Relationen:

$$(E, \mathsf{B}_k) = (A'', \mathsf{B}_k) = \varphi_{k1}(x)\,\mathsf{B}_1 + \cdots + \varphi_{kn}(x)\,\mathsf{B}_n,$$

welche zeigen, dass Ef sich als lineare Function der $\mathsf{B}_k f$, dieselben multiplicirt mit arbiträren Functionen von x darstellt. Es wird daher:

$$A''f = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} + (X_1 + X_2\mathrm{x} + X_3\mathrm{y} + X_4\mathrm{x}^2 + X_5\mathrm{xy})\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}}$$
$$+ (X_6 + X_7\mathrm{x} + X_8\mathrm{y} + X_4\mathrm{xy} + X_5\mathrm{y}^2)\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}},$$

wo die X_k *arbiträre* Functionen von x sind.

Setzen wir*)

$$\mathrm{x} = \frac{v_1}{v_3}, \quad \mathrm{y} = \frac{v_2}{v_3},$$

so geht $A''f = 0$ über in:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \sum_1^3{}^k (X_{k1}v_1 + X_{k2}v_2 + X_{k3}v_3)\frac{\partial f}{\partial v_k} = 0$$

mit den *neun* arbiträren Functionen X_{ki} von x. Also:

Theorem IX. Hat die Hülfsgleichung $A''f = 0$ die Form:

$$A''f = \frac{\partial f}{\partial x} + Z_1(x, z_1, z_2)\frac{\partial f}{\partial z_1} + Z_2(x, z_1, z_2)\frac{\partial f}{\partial z_2} = 0,$$

so ist sie zurückführbar auf:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \sum_1^3{}^k (X_{k1}v_1 + X_{k2}v_2 + X_{k3}v_3)\frac{\partial f}{\partial v_k} = 0$$

mit neun arbiträren Functionen X_{ki} von x.

Jede bei der Integration von $Af = 0$ auftretende irreductible Hülfsgleichung zweiter Ordnung kann selbstverständlich ebenfalls auf die soeben aufgestellte canonische Form gebracht werden.

Jetzt betrachten wir den Fall $q = 3$. Indem wir ganz wie in den beiden früheren Fällen verfahren, erhalten wir folgendes Theorem:

Theorem X. Hat die Hülfsgleichung $A''f = 0$ die Form:

$$A''f = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_1^3{}^k Z_k(x, z_1, z_2, z_3)\frac{\partial f}{\partial z_k} = 0,$$

so ist die Zahl n entweder gleich 15 oder gleich 10. Ist $n = 15$, so ist $A''f = 0$ auf die Form zurückführbar:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \sum_1^4{}^k (X_{k1}v_1 + X_{k2}v_2 + X_{k3}v_3 + X_{k4}v_4)\frac{\partial f}{\partial v_k} = 0,$$

wo die X_{ki} arbiträre Functionen von x bezeichnen. Ist

*) Die Grössen x, y im Texte sind Cartesische Coordinaten in einer Ebene, deren projectivische Gruppe eben von den $B_k f$ gebildet wird. Indem wir statt x, y die *homogenen* Coordinaten v_1, v_2, v_3 einführen, erhalten die $B_k f$ bekanntlich die *lineare* Form.

$n = 10$, so lässt sich $A''f = 0$ ersetzen durch eine äquivalente Gleichung

$$\text{(M)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_1^{10} {}^k X_k(x)\, B_k f = 0,$$

wobei die $B_k f$ alle linearen inf. Transformationen des homogenen Raumes v_1, v_2, v_3, v_4, die einen gewissen linearen Liniencomplex invariant lassen, bedeuten.

Es mag ausdrücklich bemerkt werden, dass die von O. Bonnet und J. A. Serret behandelte Aufgabe, alle Flächen zu finden, deren eine Schaar Krümmungslinien auf ∞^1 gegebenen Kugeln liegt, unter die soeben behandelte Categorie ($n = 10$) fällt; desgleichen die von mir behandelte Aufgabe, alle Flächen zu finden, deren eines System von Haupttangentencurven ∞^1 gegebenen linearen Complexen angehört. Diese beiden äquivalenten Probleme reduciren sich demnach, wenn man will, auf eine specielle lineare Differentialgleichung *vierter* Ordnung.

Kennt man von einer vorgelegten Gleichung (M) *ein einziges particuläres* Integralsystem $v_k = f_k(x)$, so reducirt sich das ganze Problem, wie hier angegeben werden mag, auf die Erledigung einer einzigen *Riccatischen* Gleichung erster Ordnung und auf ausführbare Operationen.

Endlich erhalte ich durch Verknüpfung der in diesem und dem vorhergehenden Paragraphen gegebenen Entwickelungen den folgenden fundamentalen Satz:

Theorem XI. Hat die im Vorangehenden aufgestellte Hülfsgleichung $A'f = 0$ die Form:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \sum_1^{n} {}^k X_k(x, x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0 = A'f$$

und ist die n-gliedrige einfache Gruppe $B_k' f$ gleichzusammengesetzt mit der allgemeinen projectivischen Gruppe einer q-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit $z_1, z_2 \ldots z_q$, so ist $A''f = 0$ reductibel auf die Gleichung:

$$\text{(L)} \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_1^{q+1} {}^k (X_{k1} v_1 + X_{k2} v_2 + \cdots + X_{k,q+1} v_{q+1}) \frac{\partial f}{\partial v_k} = 0,$$

deren $(n+1)^2$ Coefficienten X_{ki} arbiträre Functionen von x bezeichnen.

Derselbe Satz gilt natürlich überhaupt für alle bei der Integration von $A'f = 0$ auftretenden Hülfsgleichungen.

Enthält die n-gliedrige einfache Gruppe $D_k''f$ Untergruppen mit $n-q$, aber keine mit mehr als $n-q$ Parametern, so ist die Gleichung

$$A''f = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_1^q {}^k Z_k(x, z_1 \ldots z_q) \frac{\partial f}{\partial z_k} = 0,$$

wie es scheint, immer äquivalent mit einer allgemeinen oder speciellen Gleichung von der Form:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \sum_1^{q+1} {}^k \sum_1^{q+1} {}^i X_{ki}(x)\, v_i \frac{\partial f}{\partial v_k} = 0.$$

Es ist indess wohl zu bemerken, dass man bei der Ausführung einer solchen Reduction die früher besprochene Untergruppe $B'_{q+1} \ldots B'_n$ nicht ganz beliebig wählen darf. Auf die hiermit angedeuteten Theorien, *die ich indess noch nicht vollständig durchgeführt habe*, werde ich bei einer späteren Gelegenheit zurückkommen. Soviel ist jedenfalls sicher, dass sich für jede Hülfsgleichung $A''f = 0$ eine einfache canonische Form aufstellen lässt. Hat die Gruppe $D_k''f$ *verschiedenartige* Untergruppen mit $n-q$ Parametern, so giebt es mehrere zugehörige canonische Formen der Gleichung $A''f = 0$.

31. Ist jetzt umgekehrt eine beliebige Gleichung von der Form (L) vorgelegt, etwa die einfache Gleichung:

$$Mf = \frac{\partial f}{\partial x} + (X_1(x)\, x_1 + X_2 x_2) \frac{\partial f}{\partial x_1} + (X_3 x_1 + X_4 x_2) \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0,$$

so setze ich:

$$\mathfrak{x}_1 = F_1(x)\, x_1 + F_2(x)\, x_2, \qquad \mathfrak{x}_2 = F_3(x)\, x_1 + F_4(x)\, x_2$$

und versuche die F_k derart zu wählen, dass $M(f)$ die einfache Form $\frac{\partial f}{\partial x}$ annimmt. Zur Bestimmung von $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ erhalte ich hierdurch die Relationen:

$$(\Omega) \qquad M\mathfrak{x}_i = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{x}_i}{\partial x_k \partial x_q} = 0, \quad x_1 \frac{\partial \mathfrak{x}_i}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \mathfrak{x}_i}{\partial x_2} - \mathfrak{x}_i = 0,$$
$$(i = 1, 2).$$

Bedeuten $\mathfrak{x}_1'$, $\mathfrak{x}_2'$ ein particuläres System von Lösungen dieser Gleichungen und $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ das allgemeinste System, so gelten die Relationen:

$$(G) \qquad \mathfrak{x}_1 = c_{11}\mathfrak{x}_1' + c_{12}\mathfrak{x}_2', \quad \mathfrak{x}_2 = c_{21}\mathfrak{x}_1' + c_{22}\mathfrak{x}_2',$$

wobei 4 arbiträre Constanten c_{ik} auftreten. Also geschieht die Bestimmung von $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ nach der in § 8 entwickelten Methode durch die Integration einer Gleichung $Af = 0$ mit 5 Variabeln und 4 wesent-

lichen inf. Transformationen, welche eine mit der homogenen linearen Gruppe (G) gleichzusammengesetzte Gruppe bilden. Nun aber enthält die Gruppe (G) eine invariante dreigliedrige Gruppe, die mit der allgemeinen projectivischen Gruppe einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit gleichzusammengesetzt ist, demnach erhalten wir den Satz:

Satz 22. *Die Integration einer jeden Gleichung:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} + (X_1 x_1 + X_2 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (X_3 x_1 + X_4 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$$

lässt sich reduciren auf die Erledigung einer Gleichung

$$Af = 0 = \frac{\partial f}{\partial y} + \sum_1^3{}^k\, Y_k \frac{\partial f}{\partial y_k}$$

mit drei bekannten infinitesimalen Transformationen

$$B_k f = \sum_1^3{}^i\, \eta_{ki} \frac{\partial f}{\partial y_i},$$

welche eine mit der allgemeinen projectivischen Gruppe einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit gleichzusammengesetzte Gruppe bilden. Es besteht überdiess keine Relation $\sum \beta_k B_k f = 0$.

Durch ein genau analoges Räsonnement erhalten wir noch folgenden Satz:

Satz 23. Die Integration einer beliebigen Gleichung:

$$Nf = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{k=1}^{k=n}\sum_{i=1}^{i=n} X_{ki}(x)\cdot x_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$$

lässt sich immer zurückführen auf die Erledigung einer Gleichung:

$$Af = \frac{\partial f}{\partial y} + \sum_{k=1}^{k=n^2-1} Y_k(y, y_1 \ldots y_{n^2-1})\frac{\partial f}{\partial y_k} = 0$$

mit $n^2 - 1$ inf. Transformationen:

$$B_k f = \sum_{i=1}^{i=n^2-1} \eta_{ki}(y, y_1 \ldots y_{n^2-1})\cdot\frac{\partial f}{\partial y_k},$$

welche eine mit der allgemeinen projectivischen Gruppe einer (n — 1)-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit gleichzusammengesetzte Gruppe bilden. Es besteht überdiess keine lineare Relation $\sum \beta_k B_k f = 0$. Daher sind die Integration einer beliebigen Gleichung $Nf = 0$ und die Er-

ledigung einer beliebigen Gleichung $Af = 0$ mit der bekannten Gruppe $B_k f$ äquivalente Probleme.

§ 11.

Verwerthung einer bekannten Gruppe $B_k f$, deren endliche Transformationen unbekannt sind.

Wie im vorangehenden Paragraphen beschäftige ich mich auch hier mit der Integration einer Gleichung:

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_1^n {}^k X_k(x, x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

mit n bekannten inf. Transformationen:

$$B_k f = \sum_1^n {}^i \xi_{ki}(x, x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

die eine Gruppe bilden und keine lineare Relation $\sum \beta_i B_i f = 0$ erfüllen. Doch nehme ich jetzt an, *dass die endlichen Transformationen dieser Gruppe unbekannt sind.* Ich werde zeigen, dass dieser Fall sich auf den einfacheren Fall, dass auch die endlichen Transformationen der Gruppe bekannt sind, zurückführen lässt.

32. Wir können annehmen, dass wir eine canonische Form der Gruppe $B_k f$, etwa

$$\mathsf{B}_k f = \sum_1^n {}^i X_{ki}(\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_i},$$

schon kennen, deren endliche Transformationen gegeben sind. Dass eine solche Annahme wirklich immer gestattet ist, soll in der nächsten Nummer gezeigt werden. Unter dieser Voraussetzung stellen wir uns die Aufgabe, die $\mathfrak{x}_k$ als solche Functionen von $x, x_1 \dots x_n$ zu bestimmen, dass die Gleichungen

$$B_k f = \mathsf{B}_k f, \quad Af = \frac{\partial f}{\partial x}$$

bestehen. Diese Forderung ist erfüllbar, da sowohl Af, $B_k f$ als $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\mathsf{B}_k f$ eine einfach transitive Gruppe bilden und überdiess beide Gruppen gleichzusammengesetzt und also ähnlich sind. Ist diese Aufgabe erledigt, so ist die Integration von $Af = 0$ geleistet, indem die $\mathfrak{x}_k$ ein System von Lösungen dieser Gleichung darstellen.

Zur Bestimmung der $\mathfrak{x}_k$ erhalten wir eine gewisse Anzahl partieller Differentialgleichungen:

$$\Omega_i\left(x, x_1 \ldots x_n, \; \mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_n \ldots \frac{\partial \mathrm{x}_k}{\partial x_j} \ldots\right) = 0.$$

Die allgemeinsten Lösungen derselben enthalten n arbiträre Parameter*) (§ 6) und sind überdiess mit einem particulären Systeme von Lösungen x_k' durch *bekannte* Gleichungen

$$\mathrm{x}_k = F_k(\mathrm{x}_1' \ldots \mathrm{x}_n', \; a_1 \ldots a_n)$$

verknüpft, die eine Gruppe bilden. Die n infinitesimalen Transformationen dieser Gruppe können immer aufgestellt werden und führen jedes System von Lösungen x_k in ein inf. benachbartes System über.

Kurz die Entwickelungen der Nummer 19 zeigen, dass die Integration der Gleichungen $\Omega_i = 0$ sich auf die Erledigung einer Gleichung:

$$A'f = \frac{\partial f}{\partial y} + \sum Y_k(y, y_1 \ldots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_k}$$

mit n bekannten infinitesimalen Transformationen:

$$B_i'f = \sum \eta_{ik}(y, y_1 \ldots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_k},$$

die eine Gruppe bilden und keine lineare Relation $\sum \beta_i B_i'f = 0$ erfüllen, zurückführen lässt. Die *endlichen* Transformationen der Gruppe $B_i'f$ sind jetzt ebenfalls bekannt. Somit erhalten wir den folgenden fundamentalen Satz:

Theorem XII. Die Integration einer Gleichung

$$Af = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_1^n {}^k X_k(x, x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

mit n bekannten inf. Transformationen, die keine lineare Relation erfüllen, lässt sich immer zurückführen auf die Erledigung einer Gleichung

$$A'f = 0 = \frac{\partial f}{\partial y} + \sum Y_k(y, y_1 \ldots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_k}$$

mit n bekannten inf. Transformationen $B_k'f$, die eine Gruppe bilden und deren endliche Transformationen bekannt sind.

---

*) Versuchen wir Af und B_kf durch Einführung von $n+1$ neuen Variabeln $\mathrm{x}, \mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_n$ auf die Formen $\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}}$, B_kf zu bringen, so enthalten die Ausdrücke der neuen Variabeln $n+1$ Parameter; insbesondere besitzt x die Form

$$\mathrm{x} = x + a \quad (a = \mathrm{Const.}).$$

Setzen wir daher, wie im Texte geschehen, $\mathrm{x} = x$, so behalten wir nur n arbiträre Parameter.

Es besteht keine lineare Relation $\sum \beta_k' B_k' f = 0$ und also finden die Theorien des vorangehenden Paragraphen ihre direkte Anwendung.

Zu bemerken ist allerdings, dass die neue Gleichung $A'f = 0$ eine gewisse Anzahl arbiträrer Constanten enthält, die sich nicht vermeiden lassen.

33. Wir wollen jetzt, wie oben angekündigt, beweisen, dass es wirklich immer möglich ist, zu der vorgelegten Gruppe $B_k f$ eine canonische Form $\mathsf{B}_k f$, mit *bekannten endlichen* Transformationen anzugeben.

Es ist nach Satz 9 immer möglich eine mit der Gruppe $B_i f$ gleichzusammengesetzte lineare Gruppe:

$$C_i f = \sum^{jk} a_{ijk} z_j \frac{\partial f}{\partial z_k}, \quad (j, k = 1, 2 \cdots m)$$

aufzustellen. Die endlichen Transformationen dieser neuen Gruppe können als bekannt angesehen werden.

Interpretiren wir jetzt die m Grössen z_j als *homogene* Punktcoordinaten eines $(m - 1)$-fach ausgedehnten Raumes, so ist es immer möglich in diesem Raume eine Figur anzugeben, welche durch Ausführung aller ∞^n endlichen Transformationen unserer linearen Gruppe gerade ∞^n verschiedene Lagen annimmt. Betrachten wir den Inbegriff dieser ∞^n Figuren als einen n-fach ausgedehnten Raum mit den Coordinaten $\mathsf{x}_1 \ldots \mathsf{x}_n$, so wird dieser neue Raum durch eine einfach transitive Gruppe transformirt. Wir bilden die inf. Transformationen:

$$\mathsf{B}_k f = \sum^i X_{ki}(\mathsf{x}_1 \ldots \mathsf{x}_n) \frac{\partial f}{\partial \mathsf{x}_i}$$

dieser Gruppe, deren endliche Transformationen bekannt sind, und schliessen, dass diese mit der Gruppe $B_k f$ gleichzusammengesetzte Gruppe mit ihr ähnlich ist, weil beide Gruppen einfach transitiv sind.

Damit ist die Richtigkeit unserer Behauptung erwiesen.

§ 12.

Allgemeine Methode zur Bestimmung einer continuirlichen endlichen Gruppe.

34. In diesem Paragraphen *skizzire* ich eine allgemein gültige Methode zur Bestimmung einer continuirlichen endlichen Gruppe:

$$Bf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

deren m Definitionsgleichungen:

$$\sum^k A_k^{(\varepsilon)}\xi_k + \sum^{k,i} C_{ki}^{(\varepsilon)} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + \sum^{k,i,j} D_{kij}^{(\varepsilon)} \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_j} + \cdots = 0,$$
$$(\varepsilon = 1, 2, \ldots, m)$$

vorgelegt sind. Diese Gleichungen und die aus ihnen durch Differentiation hervorgehenden lassen eine gewisse Anzahl, etwa r von den Grössen ξ_k nebst ihren Differentialquotienten unbestimmt, dagegen bestimmen sie die höheren Differentialquotienten als *lineare* Functionen jener r Grössen. Denken wir uns daher die unbekannte inf. Transformation $B_k f$ nach den Potenzen von den Grössen $x_k - x_k^0$ entwickelt, so enthalten diese Reihenentwickelungen ausser r arbiträren Coefficienten $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_r$, die als arbiträre Functionen der x_k^0 aufzufassen sind, nur noch bestimmte Grössen.

Wir können daher setzen

$$B_k f = \lambda_1 A_1 f + \lambda_2 A_2 f + \cdots + \lambda_r A_r f,$$

wobei die $A_k f$ ganz bestimmte Reihenentwickelungen nach den $x_k - x_k^0$ bezeichnen.

Ersetzen wir nun die x_k^0 durch die von ihnen unendlich wenig verschiedenen Grössen $x_k^0 + \Delta x_k^0$, so erhält jedes $A_k f$ eine neue Form $A_k f + \Delta A_k f$ und es muss möglich sein den λ_k solche Incremente $\Delta \lambda_k$ zu geben, dass fortwährend die Gleichung:

$$B_k f = (\lambda_1 + \Delta\lambda_1)(A_1 f + \Delta A_1 f) + \cdots + (\lambda_r + \Delta\lambda_r)(A_r + \Delta A_r),$$

oder die äquivalente

$$\sum^k \lambda_k \cdot \Delta(A_k f) + \sum^k \Delta\lambda_k \cdot A_k f = 0$$

besteht.

Bei der Ausrechnung ergeben sich die Relationen:

$$\Delta(A_k f) = \sum^i \frac{\partial(A_k f)}{\partial x_i^0} \Delta x_i^0$$

und

$$\frac{\partial(A_k f)}{\partial x_i^0} = \sum^s m_{kis} A_s f,$$

wo die m_{kis} bestimmte Functionen der x_k^0 sind. Also wird:

$$\sum^s \sum^k \sum^i \lambda_k m_{kis} \Delta x_i^0 \,.\, A_s f + \sum^s \Delta\lambda_s \,.\, A_s f = 0$$

und

$$\Delta\lambda_s + \sum^k \sum^i m_{kis} \lambda_k \Delta x_i^0 = 0.$$

Dieses simultane, lineare System bestimmt die Grössen λ_s als Functionen der x_k^0. Es reducirt sich nach bekannten Regeln auf ein äquivalentes System:

$$\Delta\lambda_s + \sum^k \mu_{ks} \lambda_k \Delta x = 0,$$

welches statt der n unabhängigen Variabeln x_i^0 nur eine einzige unabhängige x enthält.

Bei der Integration dieses reducirten simultanen Systems können jetzt die in § 8 entwickelten Theorien verwerthet werden. Denn es ist im Allgemeinen möglich gewisse endliche Relationen zwischen $\lambda_1 \dots \lambda_r$ und x ohne Integration anzugeben.

Sind die λ_k als Functionen der x_i^0 bestimmt, so substituiren wir die gefundenen Werthe in $B_k f = \sum^k \lambda_k A_k f$, und setzen endlich $x_k^0 = x_k$. Hierdurch erhalten wir einen *endlichen* Ausdruck für die gesuchten inf. Grössen $B_k f$, die somit bestimmt sind.

Die eben skizzirte Methode leistet die Bestimmung einer unbekannten continuirlichen und endlichen Gruppe stets vermittelst der niedrigsten und einfachsten Hülfsgleichungen.

Christiania, 5. Juli 1884.

On the quadriquadric Curve in connexion with the theory of Elliptic Functions.

By

Arthur Cayley at Cambridge.

I call to mind that if we have on a line two points $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$, and through the line two planes

$$Ax + By + Cz + Dw = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D'w = 0,$$

then

$$\beta\gamma' - \beta'\gamma : \gamma\alpha' - \gamma'\alpha : \alpha\beta' - \alpha'\beta : \alpha\delta' - \alpha'\delta : \beta\delta' - \beta'\delta : \gamma\delta' - \gamma'\delta$$
$$= AD' - A'D : BD' - B'D : CD' - C'D : BC' - B'C : CA' - C'A : AB' - A'B$$

and that putting each of these two equal sets of ratios

$$= a : b : c : f : g : h,$$

then that the quantities (a, b, c, f, g, h), which it is easy to see satisfy the relation $af + bg + ch = 0$, are said to be the „six coordinates" of the line: as only the ratios of the six quantities are material, and as the last mentioned equation establishes a single relation between these ratios, the system of the six coordinates contains four arbitrary ratios or parameters, for the determination of the particular line. See my paper „On the six coordinates of a line" Camb. Phil. Trans. t. XI, pp. 290, 323 (1867).

I consider for a moment the quadric surface

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0,$$

and I proceed to show that if (a, b, c, f, g, h) are the coordinates of a generating line on the surface, then either $a = f$, $b = g$, $c = h$, or else $a = -f$, $b = -g$, $c = -h$; the one or other system of equations according as the line belongs to the one or other system of generating lines.

We satisfy the equation by

$$x + iy + \theta z + \theta iw = 0,$$
$$x - iy - \frac{1}{\theta}z + \frac{1}{\theta}iw = 0.$$

where Θ is an arbitrary parameter: hence these equations determine a generating line of the surface: and the coordinates of this line are

$$\begin{array}{cccccc} a, & b, & c, & f, & g, & h \\ = -i\left(\theta - \frac{1}{\theta}\right); & -\left(\theta + \frac{1}{\theta}\right), & zi, & i\left(\theta - \frac{1}{\theta}\right); & \theta + \frac{1}{\theta} & : -zi \end{array}$$

viz. these values give $a = -f$, $b = -g$, $c = -h$.

Similarly we satisfy the equation by

$$x + iy + \varphi z - \varphi i w = 0,$$
$$x - iy - \frac{1}{\varphi} z - \frac{1}{\varphi} i w = 0$$

where φ is an arbitrary parameter: hence these equations also determine a generating line of the surface; and the coordinates are

$$\begin{array}{cccccc} a, & b, & c, & f, & g, & h \\ = i\left(\varphi - \frac{1}{\varphi}\right), & \varphi + \frac{1}{\varphi}, & -zi, & i\left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right), & \varphi + \frac{1}{\varphi}, & -zi \end{array}$$

viz. these values give $a = f$, $b = g$, $c = h$.

If for x, y, z, w we write $x\sqrt{p}$, $y\sqrt{q}$, $z\sqrt{r}$, $w\sqrt{s}$ respectively, then we have the theorem for the quadric surface

$$px^2 + pq^2 + rz^2 + sw^2 = 0$$

the coordinates (a, b, c, f, g, h) of a generating line are such that

$$\frac{a}{f} = \pm\sqrt{\frac{ps}{qr}}, \quad \frac{b}{g} = \pm\sqrt{\frac{qs}{rp}}, \quad \frac{c}{h} = \pm\sqrt{\frac{rs}{pq}},$$

the signs being all $+$ or all $-$, according as the line belongs to one or other of the systems of generating lines.

Take (a', b', c', f', g', h') for the coordinates of an arbitrary line, and write $p, q, r, s = a'g'h', b'h'f', c'f'g', a'b'c'$; the quadric surface is

$$a'g'h'x^2 + h'b'f'y^2 + c'f'g'z^2 + a'b'c'w^2 = 0,$$

which is a surface having the line (a', b', c', f', g', h') for a generating line: to verify this, observe that for the line in question we have

$$\begin{aligned} h'y - g'z + a'w &= 0, \\ -h'x \quad \cdot \quad + f'z + b'w &= 0, \\ g'x + f'y \quad . \quad + c'w &= 0, \\ -a'x - b'y - c'z \quad \cdot \quad &= 0 \end{aligned}$$

(equivalent of course to two independent equations): these give $h'x = f'z + b'w$, $h'y = g'z - a'w$, values which substituted in the quadric equation satisfy it identically. And for the lastmentioned

quadric surface we have the theorem that if (a, b, c, f, g, h) are the coordinates of a generating line then

$$\frac{a}{f} = \pm \frac{a'}{f'}, \quad \frac{b}{g} = \pm \frac{b'}{g'}, \quad \frac{c}{h} = \pm \frac{c'}{h'},$$

where obviously the sign $+$ belongs to a generating line of the same system with the line (a', b', c', f', g', h'), and the sign $-$ to a line of the other system.

Taking the sign $-$, we thus see that if (a, b, c, f, g, h), (a', b', c', f', g', h') are the coordinates of lines of the two systems respectively, then

$$af' + a'f = 0, \quad bg' + b'g = 0, \quad ch' + c'h = 0;$$

where observe that the resulting equation

$$af' + a'f + bg' + b'g + ch' + c'h = 0,$$

is condition which expresses that the two lines meet eachother.

Consider now the quadriquadric curve

$$U_1 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dw^2 = 0,$$
$$U_1' = A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 + D'w^2 = 0$$

and let (a, b, c, f, g, h) and (a', b', c', f', g', h) be the coordinates of two lines meeting eachother, and each meeting the quadric curve twice: or, again, let these be lines joining in pairs the four intersections of the curve by an arbitrary plane: or, again, let them be the nodal lines of the binodal quartic cone having an arbitrary vertex and passing thro' the curve. The two lines are generating lines, belonging to the two systems respectively, of a properly determined quadric surface $U + \lambda U' = 0$ passing thro' the curve: and by what precides we have

$$af' + a'f = 0, \quad bg' + b'g = 0, \quad ch' + c'h = 0.$$

the fundamental theorem which I wished to establish.

Writing in the equations $w = 1$, we have in particular the quadriquadric curve $y^2 = 1 - x^2$, $z^2 = 1 - k^2x^2$, equations which are satisfied by $x = \operatorname{sn} u$, $y = \operatorname{cn} u$, $z = \operatorname{dn} u$. Consider on the curve four points belonging to the arguments u_1, u_2, u_3, u_4 respectively; and write for shortness s_1, c_1, d_1 for the sn, cn, and dn of u_1; and similarly for u_2, u_3 & u_4. Il appears by Abel's theorem that the condition in order that the four points may be in a plane is $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$; viz. when this equation is satisfied we have

$$\begin{vmatrix} s_1, & c_1, & d_1, & 1 \\ s_2, & c_2, & d_2, & 1 \\ s_3, & c_3, & d_3, & 1 \\ s_4, & c_4, & d_4, & 1 \end{vmatrix}$$

viz. writing

$$\begin{array}{llllll} a, & b, & c, & f, & g, & h \\ = c_1 d_2 - c_2 d_1, & d_1 s_2 - d_2 s_1, & s_1 c_2 - s_2 c_1, & s_1 - s_2, & c_1 - c_2, & d_1 - d_2, \\ a', & b', & c', & f', & g', & h' \\ = c_3 d_4 - c_4 d_3, & d_3 s_4 - d_4 s_3, & s_3 c_4 - s_4 c_3, & s_3 - s_4, & c_3 - c_4, & d_3 - d_4, \end{array}$$

this equation is

$$af' + a'f + bg' + b'g + ch' + c'h = 0;$$

or by what precedes it appears that not only is this so, but that we have separately

$$af' + a'f = 0, \quad bg' + b'g = 0, \quad ch' + c'h = 0,$$

viz. that it follows from Abel's theorem that when the arguments u_1, u_2, u_3, u_4 are connected by the equation $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$, then each of these three equations holds good.

I assume in particular $u_4 = 0$, $u_3 = -u$, so that $u = u_1 + u_2$; we have

$$\begin{array}{llllll} a, & b, & c, & f, & g, & h \\ = c_1 d_2 - c_2 d_1, & d_1 s_2 - d_2 s_1, & s_1 c_2 - s_2 c_1, & s_1 - s_2, & c_2 - c_2, & d_1 - d_2, \\ a', & b', & c', & f', & g', & h' \\ = \quad c - d, & s, & -s, & -s, & c - 1, & d - 1, \end{array}$$

and the three equations become

$$\frac{c-d}{s} = \frac{c_1 d_2 - c_2 d_1}{s_1 - s_2}, \quad \frac{-s}{c-1} = \frac{d_1 s_2 - d_2 s_1}{c_1 - c_2}, \quad \frac{s}{d-1} = \frac{s_1 c_2 - s_2 c_1}{d_1 - d_2},$$

equations which may also be written

$$\frac{c-d}{s} = \frac{c_1 d_2 - c_2 d_1}{s_1 - s_2}, \quad \frac{-c+1}{s} = \frac{c_1 - c_2}{d_1 s_2 - d_2 s_1}, \quad \frac{d-1}{s} = \frac{d_1 - d_2}{s_1 c_2 - s_2 c_1},$$

so that adding these three equations we must have an identity.

Representing the second and third of the last mentioned equations by

$$\frac{-c+1}{s} = C, \qquad \frac{d-1}{s} = D,$$

we have

$$c = 1 - Cs, \quad d = 1 + Ds$$

from either of which we can obtain s rationally, viz. the first equation gives $1 - s^2 = 1 - 2Cs + C^2 s^2$, that is $s = \frac{2C}{1 + C^2}$, whence $c = \frac{1 - C^2}{1 + C^2}$, $d = \frac{1 + C^2 + 2CD}{1 + C^2}$; and similarly from the second equation $s = -\frac{2D}{k^2 + D^2}$, whence also $c = \frac{k^2 + D^2 - 2CD}{k^2 + D^2}$, $d = \frac{k^2 - D^2}{k^2 + D^2}$.

Substituting for C its value, the first mentioned value of s becomes

$$s = \frac{(c_1 - c_2)(d_1 s_2 - d_2 s_1)}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2 - c_1 c_2 - d_1 s_1 d_2 s_2},$$

which is a form that can be easily verified: we in fact have

$$s_1 = \mathrm{sn}(u_1 + u_2)$$

$$= \frac{s_1 c_2 d_2 + s_2 c_1 d_1}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2}, \quad = \frac{s_1^2 - s_2^2}{s_1 c_2 d_2 - s_2 c_1 d_1}, \quad = \frac{s_1 c_1 d_2 + s_2 c_2 d_1}{c_1 c_2 + s_1 d_1 s_2 c_2}, \quad = \frac{s_1 d_1 c_2 + s_2 d_2 c_1}{d_1 d_2 + k^2 s_1 c_1 s_2 c_2},$$

see my „Elliptic Functions“ p. 63: or calling these values

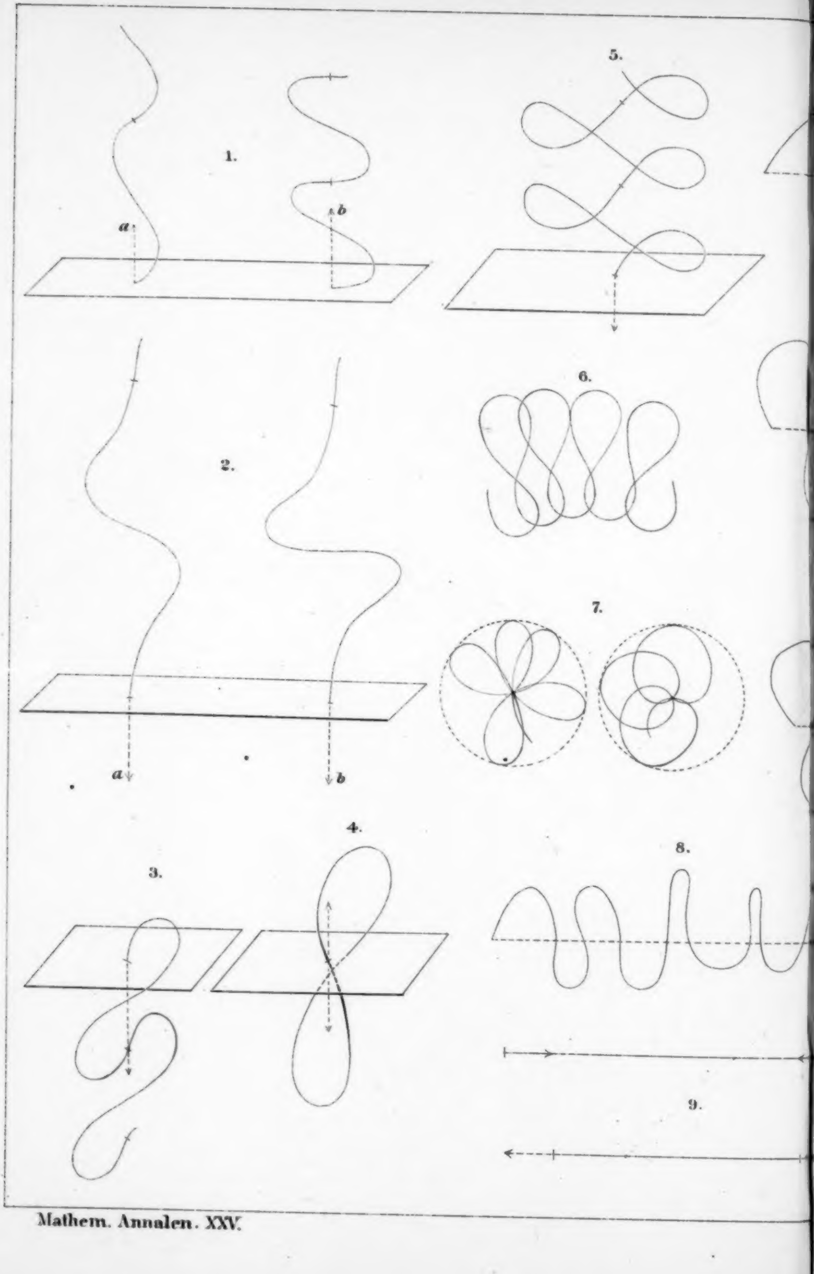
$$= \frac{N_1}{D_1} = \frac{N_2}{D_2} = \frac{N_3}{D_3} = \frac{N_4}{D_4},$$

the above value is

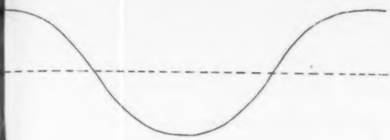
$$s = \frac{N_1 - N_3}{D_1 - D_3},$$

which is right.

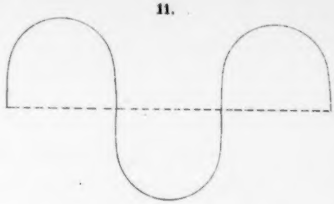
Cambridge, 28. June, 1884.


1.
a
b
2.
a
b
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.

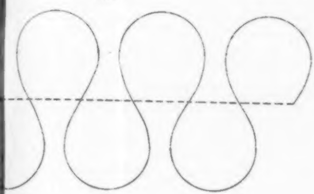
10.



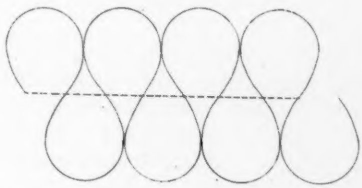
11.



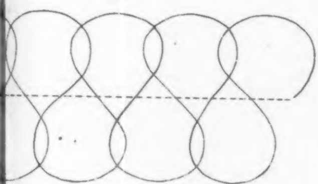
12.



13.

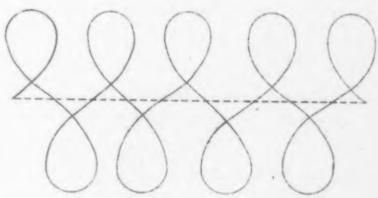


14.

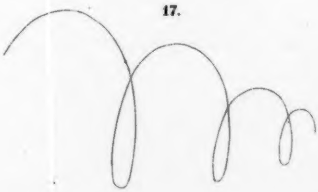


15.

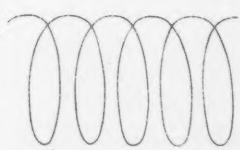
16.



17.



18.



Ueber Relationen zwischen Classenanzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante.

Von

Adolf Hurwitz in Königsberg i. Pr.

Die beiden Abhandlungen, welche ich hier veröffentliche, stehen in engstem Zusammenhange mit den unter gleichem Titel erschienenen Arbeiten des Herrn Gierster.*) Für die in diesen Arbeiten niedergelegten Untersuchungen war einerseits der Gedankengang massgebend, welchen Herr Kronecker**) zur Herleitung seiner Classenzahlrelationen auf die Modulargleichungen der elliptischen Functionen zuerst anwandte; andererseits basiren jene Untersuchungen auf der von Herrn Klein***) entwickelten Theorie der Modulfunctionen. Indem nämlich gemäss dieser Theorie die Modulargleichungen der elliptischen Functionen nur Glieder einer unendlichen Reihe ähnlicher Gleichungen sind, erhebt sich die Frage, ob nicht auch aus jeder dieser Gleichungen in ähnlicher Weise wie aus den Modulargleichungen der elliptischen Functionen Classenzahlrelationen gewonnen werden können — und es ist diese von Herrn Klein angeregte Frage, welche Herr Gierster in den genannten Arbeiten mit Erfolg in Angriff genommen hat.

Was jene Gleichungen angeht, so entspringen dieselben aus der Transformation derjenigen algebraischen Moduln, welche nach Herrn Klein als Congruenzmoduln zu bezeichnen sind und denen als solchen eine bestimmte „Stufe“ q und (wie jedem algebraischen Modul) ein bestimmtes Geschlecht p zugehört.†) Für den Fall nun, dass das Geschlecht $p > 0$ ist, stellte sich bei dem Versuche die betreffenden Classenzahlrelationen aufzustellen eine Schwierigkeit ein, welche in dem bisherigen Mangel einer ausreichenden analytischen Darstellung

*) Diese Annalen, Bd. XXI, pag. 1 und Bd. XXII, pag. 190. Die Abhandlungen sollen im Folgenden mit I. und II. citirt werden.

**) Crelle's Journal, Bd. 57.

***) Sitzungsberichte der Münchner Akademie, 6. Dec. 1879 oder diese Annalen Bd. XVII, pag. 63 ff.

†) Vgl. Klein, l. c.

der zugehörigen Transformationsgleichungen ihren Grund hat.*) Dieses ist der Punkt, an welchem meine Untersuchungen einsetzen. Freilich ist mir die vollständige Durchführung der zum Ziele führenden Betrachtungen nur in einigen wenigen Fällen**) gelungen; doch hoffe ich, da der im allgemeinen Falle einzuschlagende Weg klar vorgezeichnet ist, auch diesen in Bälde erledigen zu können.

Dem vorliegenden in der zweiten Abhandlung enthaltenen Theile meiner Untersuchungen habe ich eine erneute Herleitung der Classenzahlrelation erster Stufe in der ersten Abhandlung voraufgeschickt. Es erschien mir dieses für das Verständniss der zweiten Abhandlung wünschenswerth, da der allgemeine Gedankengang bei dem einfachsten Falle, welchen die Classenzahlrelation erster Stufe darbietet, am klarsten hervortritt. Dabei glaube ich die Herleitung dieser Relation in nicht unwesentlichen Punkten vereinfacht zu haben.

Die zweite Abhandlung zerfällt in zwei Abschnitte, von welchen der erste die allgemeinen Hülfsmittel für die Aufstellung der Classenzahlrelationen entwickelt, wobei nur in dem letzten Theile des Abschnittes die Stufe als eine Primzahl vorausgesetzt wird. Diesen letzten Theil hätte ich wesentlich abkürzen können, wenn ich die „linke Seite σ der Classenzahlrelation", wie sie Herr Gierster abgeleitet hat (I. pag. 29 ff.), als bekannt hätte voraussetzen wollen. Hierdurch würde aber, da die Zahl σ bei mir eine neue Bedeutung erhält, die Klarheit erheblich gelitten haben; überdies glaube ich auch hier die betreffenden Entwicklungen zum Theil in wesentlich vereinfachter Form zu geben.

Der zweite Abschnitt enthält die vollständige Durchführung des Falles der 7ten Stufe. Was die hier erhaltenen Endresultate anlangt, so sind dieselben, bis auf eine einzige Formel, von Herrn Gierster auf anderem Wege bewiesen worden. Aber auch diese letzte Formel hat schon Herr Gierster als vermuthungsweise bestehend aufgestellt (II. pag. 203).

Die Grundlagen der im Folgenden anzustellenden Untersuchungen können wohl grösstentheils als bekannt vorausgesetzt werden. Nur der Wunsch nach Vollständigkeit veranlasst mich, dieselben in den ersten Paragraphen der ersten Abhandlung kurz zusammenzustellen.***)

---

*) Siehe Gierster: „Ueber Relationen zwischen Classenzahlen etc." Sitzungsberichte der Münchener Akademie, 7. Febr. 1880, pag. 3 oder Mathematische Annalen, t. 17, p. 35.

**) Dazu gehört namentlich auch der in meiner Note „Zur Theorie der Modulargleichungen" Göttinger Nachrichten, 21. Nov. 1883, behandelte Fall. Derselbe liefert einen neuen Beweis für diejenigen Classenzahl-Relationen, welche Herr Kronecker in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom 19. April 1875 aus anderen Betrachtungen hergeleitet hat.

***) Siehe Dedekind: „Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen." Crelle's Journal, Bd. 83, pag. 265 ff., Klein:

I. Abhandlung.

Die Classenzahlrelation der ersten Stufe.

§ 1.

Die Aequivalenz der Grössen.

Man bezeichnet zwei Grössen ω_1 und ω als äquivalent, wenn die Gleichung

$$\omega_1 = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} = S(\omega)$$

durch vier ganze Zahlen α, β, γ, δ, welche der Bedingung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

genügen, befriedigt werden kann. Man sagt dann auch, dass ω_1 aus ω durch die Substitution oder Transformation

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

hervorgehe. Aus dieser Festsetzung ergiebt sich leicht, dass die mit i multiplicirten Theile zweier äquivalenten Grössen dasselbe Vorzeichen besitzen. In Rücksicht hierauf beschränke man die Betrachtung auf Grössen ω mit positiv-imaginärem Bestandtheile. Man construire nun in der (positiven) Halbebene, deren Punkte die Werthe der complexen Grösse $\omega = x + iy$ $(y > 0)$ geometrisch darstellen, die Geraden

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad x = -\frac{1}{2}$$

und den Kreis

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Diese Linien begrenzen ein krummliniges Dreieck mit den Ecken

$$\omega = i\infty, \quad \omega = \varrho, \quad \omega = 1 + \varrho \quad \left(\varrho = e^{\frac{2i\pi}{3}}\right),$$

welches als Fundamentaldreieck bezeichnet werde. Von der Begrenzung

„Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades.“ Diese Annalen, Bd. XIV, pag. 111 ff. Eine ausführliche Darstellung findet man in meiner Abhandlung: „Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen etc.“ Diese Annalen Bd. XVIII, pag. 528.

dieses Dreiecks soll nur die auf Seiten der negativen X-Axe liegende Hälfte zu dem Dreieck gerechnet werden. Dann hat man folgendes Theorem:

„*Es giebt zu jeder willkürlich gewählten Grösse* ω *eine und nur eine äquivalente Grösse, welche geometrisch durch einen Punkt des Fundamentaldreiecks dargestellt wird.*“

Indem man die Bezeichnung der Aequivalenz zweier Grössen auf die diese Grössen darstellenden Punkte überträgt, kann man auch sagen, dass die Punkte des Fundamentaldreiecks ein vollständiges System inäquivalenter Punkte bilden. Dieser Charakter wird dem Punktsysteme nicht verloren gehen, falls jeder Punkt durch irgend einen äquivalenten ersetzt wird. Ersetzt man insbesondere jeden Punkt ω des Fundamentaldreiecks durch den Punkt $S(\omega) = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$, so entsteht ein neues vollständiges System inäquivalenter Punkte, welches aus allen Punkten eines neuen Dreiecks gebildet wird. Letzteres wird von Kreis- oder Geradenstücken, welche auf der X-Axe senkrecht stehen, begrenzt und möge seiner Entstehung entsprechend als

„Dreieck $S(\omega)$“

bezeichnet werden. Die Dreiecke $S(\omega)$ überdecken in ihrer Gesammtheit die positive Halbebene einfach und lückenlos, indem sich um jeden zu ϱ äquivalenten Punkt 6 Dreiecke lagern, während sich in jedem zu $i\infty$ äquivalenten, also in jedem einen rationalen Werth darstellenden Punkte, unendlich viele Dreiecke aneinander legen.

Aus den bisher gemachten Angaben ergiebt sich noch leicht die vollständige Auflösung der Gleichung $\omega = S(\omega)$, wo ω eine Stelle im *Innern* der positiven Halbebene bezeichnet. Wird ω zunächst auf das Fundamentaldreieck eingeschränkt, so lässt diese Gleichung nur folgende Auflösungen zu:

$$\omega = i;\quad S = S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\omega = \varrho;\quad S = S_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\omega = \varrho;\quad S = S_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass die allgemeinen Auflösungen der Gleichung diese sind:

$$\omega = U(i);\quad S = US_1\,U^{-1},$$

$$\omega = U(\varrho);\quad S = US_2\,U^{-1},$$

$$\omega = U(\varrho);\quad S = US_2^2\,U^{-1}.$$

Hierbei bedeutet U irgend eine Substitution, und es ist durchgehends von der selbstverständlichen Lösung $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, also $\omega = \omega$, abgesehen.

§ 2.

Quadratische Formen.

Es sei
$$Pu^2 + Quv + Rv^2$$
eine positive quadratische Form, so dass $-P$ und $-R$ sowie die Determinante der Form
$$D = -\Delta = Q^2 - 4PR$$
negative ganzzahlige Werthe besitzen.

Diejenige Wurzel der Gleichung
$$Pu^2 + Quv + Rv^2 = 0,$$
welche einen positiv-imaginären Bestandtheil hat, werde als die *erste* Wurzel der Form bezeichnet. Dann lässt sich die nothwendige und hinreichende Bedingung der Aequivalenz zweier positiven Formen derselben Determinante dahin aussprechen, dass die ersten Wurzeln der Formen äquivalente Grössen im Sinne des § 1 sein müssen.

Nennt man ferner eine positive Form reducirt, falls ihre erste Wurzel dem Fundamentaldreieck angehört, so ergiebt sich aus § 1 sofort der Satz: „Jede Form ist einer und nur *einer* reducirten Form äquivalent."

Man bemerke, dass die Formen, deren erste Wurzel $\omega = i$, bez. $\omega = \varrho$ ist, lauten: $(P, 0, P)$ bez. (P, P, P), wo P eine beliebige positive Zahl bedeutet.

§ 3.

Modulfunctionen.

Die Function $F(\omega)$ heisst eine Modulfunction (im engeren Sinne), wenn sie eindeutig von dem Argumente ω abhängt und die in der Gleichung
$$F(\omega) = F(S(\omega))$$
ausgesprochene Eigenschaft besitzt.

Die Betrachtung des über die Begrenzung des Fundamentaldreiecks zu erstreckenden Integrals
$$\frac{1}{2\pi i}\int d \log F(\omega)$$
ergiebt in bekannter Weise die Relation
$$N = U,$$
wo die Zahlen N und U angeben, wie oft $F(\omega)$ im Ganzen von der ersten Ordnung unendlich klein bez. unendlich gross wird, falls ω das Fundamentaldreieck beschreibt. Dabei sind an den Stellen

$$\omega = i\infty,\ \varrho,\ i$$

bezüglich die Grössen

$$q^2,\quad (\omega-\varrho)^3,\ (\omega-i)^2,\quad (q = e^{i\pi\omega})$$

an jeder andern Stelle $\omega = \omega_0$ des Fundamentaldreiecks die Grösse $\omega - \omega_0$ als unendlich klein von der ersten Ordnung anzusehen.

Die einfachste hierhergehörige Function wird durch die Gleichung

$$J(\omega)^{*)} = \frac{\left(\frac{1}{12} + 20\sum_{k=1}^{\infty} k^3 \frac{q^{2k}}{1-q^{2k}}\right)^3}{q^2 \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})^{24}} = q^{-2}\left(\frac{1}{12^3} + \cdots\right)$$

definirt. Dieselbe wird offenbar nur für $\omega = i\infty$ und zwar von der ersten Ordnung unendlich gross, nimmt also, wenn ω auf das Fundamentaldreieck eingeschränkt wird, jeden möglichen Werth ein Mal und nur *ein* Mal an, so dass die Gleichung

$$J(\omega) = J(\omega_1)$$

dann und *nur* dann stattfindet, wenn ω und ω_1 äquivalente Grössen sind. Von Wichtigkeit wird später noch folgender evidente Satz: Besitzt die Function $f(\omega)$ die Eigenschaft, dass für eine im Endlichen liegende Stelle ω_0 des Fundamentaldreiecks $f(\omega_0) = \omega_0$ ist, so wird die Differenz

$$J(\omega) - J(f(\omega))$$

an der Stelle $\omega = \omega_0$ von der ersten Ordnung unendlich klein, falls

$$[f'(\omega_0)]^\nu - 1$$

endlich und von Null verschieden ist.

Dabei ist

$$\nu = 2 \text{ bez. } \nu = 3$$

für

$$\omega_0 = i \text{ bez. } \omega_0 = \varrho;$$

in allen übrigen Fällen ist $\nu = 1$.

§ 4.

Transformation n^{ter} Ordnung.

Besteht zwischen den Grössen ω_1 und ω die Beziehung

$$\omega_1 = \frac{a\omega + b}{c\omega + d},$$

wo a, b, c, d ganze Zahlen bedeuten, welche der Bedingung

$$ad - bc = n$$

---

*) $J(\omega)$ ist die absolute Invariante des elliptischen Integrals 1. Gattung und identisch mit der „Valenz" des Herrn Dedekind.

genügen, so sagt man ω_1 gehe aus ω durch die Substitution oder Transformation n^{ter} Ordnung $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ hervor. Aequivalente Grössen können hiernach auch als solche bezeichnet werden, welche auseinander durch Transformation erster Ordnung hervorgehen.

Wie bisher soll unter einer Substitution oder Transformation schlechthin stets eine solche der ersten Ordnung verstanden werden. Bedeutet nun $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ irgend eine *bestimmte* Transformation der n^{ten} Ordnung, so lassen sich die Substitution S und die nicht-negativen ganzen Zahlen A, D, B stets und nur in einer Weise so bestimmen, dass die Gleichung

$$\frac{a\omega + b}{c\omega + d} = S\left(\frac{A\omega + B}{D}\right)\text{*)}$$

unabhängig von ω stattfindet und dass die Bedingungen

$$A \cdot D = n, \; B < D$$

erfüllt sind.

Denkt man sich also alle möglichen Grössen $\frac{A\omega + B}{D}$ aufgeschrieben (deren Anzahl gleich $\Phi(n)$, der Summe der Divisoren von n, ist) und zu jeder einzelnen alle ihr äquivalenten Grössen $S\left(\frac{A\omega + B}{D}\right)$ gebildet, so wird man jeden Ausdruck $\frac{a\omega + b}{c\omega + d}$ und jeden nur *ein* Mal erhalten. Man kann hiernach die Ausdrücke $\frac{a\omega + b}{c\omega + d}$ in $\Phi(n)$ Reihen vertheilen, der Art dass jede Reihe nur äquivalente Grössen enthält, dass dagegen je zwei Ausdrücke aus verschiedenen Reihen nur für particuläre Werthe von ω äquivalent sein können.

Es möge $R_i(\omega)$ einen bestimmten Ausdruck der i^{ten} Reihe bedeuten; so sollen die $\Phi(n)$ Ausdrücke

$$R_1(\omega),\; R_2(\omega), \ldots$$

als ein Repräsentantensystem der Transformation n^{ter} Ordnung bezeichnet werden. Insbesondere werden die $\Phi(n)$ Grössen $\frac{A\omega + B}{D}$ ein solches System bilden.

Eine vorzugsweise zur Verwendung gelangende, leicht zu beweisende Eigenschaft eines Repräsentantensystems ist diese:

„*Gleichzeitig mit*

$$R_1(\omega),\; R_2(\omega), \ldots$$

bilden auch die Ausdrücke

$$R_1(S(\omega)),\; R_2(S(\omega)), \ldots$$

ein Repräsentantensystem der Transformation n^{ter} Ordnung, wenn $S(\omega)$ irgend eine Substitution erster Ordnung bezeichnet.“

*) Vgl. Dedekind, l. c. pag. 287.

§ 5.

Die Classenzahlrelation erster Stufe.

Aus dem letzten Satz folgt, dass die Function

$$F(\omega) = \Pi' \left[J(\omega) - J(R_i(\omega))\right] = \Pi' \left[J(\omega) - J\left(\frac{A\omega + B}{D}\right)\right]$$

die in der Gleichung

$$F(S(\omega)) = F(\omega)$$

ausgesprochene Eigenschaft besitzt. Dabei ist das Product über irgend ein Repräsentantensystem $R_i(\omega)$ auszudehnen, jedoch im Falle, wo n ein Quadrat ist, der durch $A = D = \sqrt{n}$, $B = 0$ charakterisirte Repräsentant auszulassen, was durch das an das Productzeichen gesetzte Komma angedeutet ist.

Es werde nun der Satz von § 3, dass $F(\omega)$ im Fundamentaldreieck ebenso oft Null wie unendlich wird, angewendet.

$F(\omega)$ wird unendlich nur für $\omega = i\infty$ und zwar wird hier der Factor

$$J(\omega) - J\left(\frac{A\omega + B}{D}\right) = q^{-2}\left(\frac{1}{12^3} + \cdots\right) - q^{-2\cdot\frac{A}{D}}\left(\frac{e^{\frac{2i\pi B}{D}}}{12^3} + \cdots\right)$$

von der Ordnung 1 oder $\frac{A}{D}$ unendlich gross, je nachdem $A \leqq D$ oder $A > D$ ist. Daher ist die Gesammtordnung des Unendlichwerdens von $F(\omega)$:

$$U = \sum_{A \leqq D} D + \sum_{A > D} A - \varepsilon_n = \sum_{A \geqq D} A + \sum_{A > D} D + \sum_{A > D} (A - D) - \varepsilon_n;$$

oder

$$U = \Phi(n) + \Psi(n) - \varepsilon_n,$$

wo

$\Phi(n)$ die Summe der Divisoren von n,

$\Psi(n)$ den Ueberschuss derjenigen Divisoren von n, welche grösser als $\sqrt{n}$ über diejenigen, welche kleiner als $\sqrt{n}$ sind bedeutet, und wo endlich

$$\varepsilon_n = 1 \text{ oder } 0$$

zu setzen ist, je nachdem n eine Quadratzahl ist oder nicht.

§ 6.

Fortsetzung.

Nun lässt sich die Zahl N der Nullstellen von $F(\omega)$ auf folgende Weise bestimmen. Ein Factor

$$J(\omega) - J(R_i(\omega))$$

wird für eine Stelle ω_0 des Fundamentaldreiecks unendlich klein und zwar (nach § 3, Schluss) von der ersten Ordnung, dann und nur dann, falls

$$\omega_0 = S(R_i(\omega_0))$$

ist.

Diese Gleichung für ω_0 lässt sich in die Form

$$\omega_0 = \frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d} \tag{1}$$

setzen, wo $ad - bc = n$ ist und c positiv vorausgesetzt werden darf. $F(\omega)$ wird also so oft Null wie die Gleichung (1) Lösungen hat. Hierbei ist jedoch noch zweierlei zu bemerken. Erstens sind, wenn n ein Quadrat ist, diejenigen Gleichungen (1), welche aus dem fortgelassenen Factor $J(\omega) - J\left(\frac{\sqrt{n}\,\omega}{\sqrt{n}}\right)$ entspringen, auszuscheiden. Dieselben lauten $\omega_0 = S\left(\frac{\sqrt{n}\,\omega_0}{\sqrt{n}}\right)$, also nach § 1, Schluss:

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} \omega_0 = \dfrac{-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\,\omega_0}, & \omega_0 = i; \\[2ex] \omega_0 = \dfrac{-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\,\omega_0 - \sqrt{n}}, & \omega_0 = \varrho; \\[2ex] \omega_0 = \dfrac{-\sqrt{n}\,\omega_0 - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\,\omega_0}, & \omega_0 = \varrho. \end{cases}$$

Zweitens sind von den übrigen Lösungen zwei solche, wie

$$\omega_0 = \frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}, \quad \omega_0' = \frac{a'\omega_0' + b'}{c'\omega_0' + d'}$$

als nicht verschieden zu rechnen, wenn $\omega_0 = \omega_0'$ ist und

$$\frac{a\,\omega_0 + b}{c\,\omega_0 + d} = S\left(\frac{a'\,\omega_0 + b'}{c'\,\omega_0 + d'}\right)$$

durch eine Substitution S befriedigt werden kann. Denn zwei solche Lösungen gehören zu derselben Nullstelle desselben Factors von $F(\omega)$. In diesem Falle ist aber $\omega_0 = S(\omega_0)$. Nach § 1, Schluss, sind daher diejenigen Lösungen der Gleichung (1), in welchen $\omega_0 = i$ ist, paarweise, diejenigen in welchen $\omega_0 = \varrho$ ist, zu je dreien als nicht verschieden zu rechnen.

Bezeichnet daher Z die Zahl der Lösungen der Gleichung (1), wenn jede Lösung, in welcher $\omega_0 = i$, bez. $\omega_0 = \varrho$ ist $\frac{1}{2}$ bez. $\frac{1}{3}$ Mal gezählt wird, so ist die Zahl N der Nullstellen von $F(\omega)$ gleich Z wenn n kein Quadrat, dagegen, wenn n ein Quadrat ist, gleich Z vermindert um $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ (wegen der in diesem Falle anzuschliessenden Lösungen (A).)

Wir können also

$$N = Z - \eta_n$$

setzen, wo $\eta_n = \frac{7}{6}$ oder 0 ist, je nachdem n ein Quadrat ist oder nicht.

§ 7.
Schluss.

Man denke sich jetzt alle reducirten positiven quadratischen Formen der negativen Determinanten $-4n + \varkappa^2$ aufgeschrieben, wo $\varkappa$ successive die Werthe $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ also alle ganzzahligen Werthe annehmen soll, welche absolut genommen kleiner als $2\sqrt{n}$ sind.

Setzt man dann, unter (P, Q, R) irgend eine dieser Formen verstanden:

$$c = P, \quad b = -R, \quad d = \frac{Q + \varkappa}{2}, \quad a = \frac{Q - \varkappa}{2},$$

so ist leicht einzusehen, dass man in den verschiedenen mit Hülfe dieser Zahlen gebildeten Gleichungen

$$\omega_0 = \frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$$

jede Lösung der Gleichung (1) des vorigen Paragraphen und jede nur *ein* Mal erhält. Bezeichnet daher $\mathsf{H}(\Delta)$ die Zahl der verschiedenen Classen von positiven Formen der Determinante $-\Delta$, wobei diejenigen Classen, deren reducirte Formen die Gestalt $(P, 0, P)$ bez. (P, P, P) haben, $\frac{1}{2}$ Mal bez. $\frac{1}{3}$ Mal zu zählen sind, so ist

$$Z = \sum_{\varkappa = 0, \pm 1, \ldots} \mathsf{H}(4n - \varkappa^2).$$

Wenn endlich $\mathsf{H}(o) = -\frac{1}{12}$ gesetzt wird, so erhält man

$$N = Z - \eta_n = \sum_{\varkappa = 0, \pm 1, \ldots} \mathsf{H}(4n - \varkappa^2) - \varepsilon_n,$$

wo jetzt $\varkappa$ alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchläuft, welche absolut genommen nicht grösser als $2\sqrt{n}$ sind, während ε_n dieselbe Bedeutung wie in § 5 besitzt.

Durch Gleichsetzung der Zahl N der Nullstellen und der Zahl U der Unendlichkeitsstellen von $F(\omega)$ ergiebt sich nun die Classenzahlrelation, deren Ableitung das Ziel dieser Untersuchung war, nämlich

$$\sum_{\varkappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots} \mathsf{H}(4n - \varkappa^2) = \Phi(n) + \Psi(n).^{*)}$$

---

*) Siehe Gierster, I, pag. 25.

II. Abhandlung.

Die Classenzahlrelationen höherer, insbesondere der siebenten Stufe.

Abschnitt I.

Ansätze für eine beliebige Stufe q.*)

§ 1.**)

Die Gruppe derjenigen Substitutionen, welche (modulo q) der Identität congruent sind.

Die Gesammtheit derjenigen Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, welche der Bedingung

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta \equiv 1 : 0 : 0 : 1 \text{ (mod. } q)$$

genügen, wo q eine positive ganze Zahl bezeichnet, bildet eine Gruppe, welche als eine ausgezeichnete Untergruppe in der Gesammtheit aller Substitutionen enthalten ist. Substitutionen, welche dieser Gruppe angehören, sollen in der Folge mit dem Buchstaben T bezeichnet werden, so dass

$$T(\omega),\ T'(\omega),\ T_1(\omega), \ldots$$

verschiedene Individuen der Gruppe bedeuten.

Ferner mögen zwei Grössen ω_1 und ω, zwischen denen eine Gleichung der Gestalt

$$\omega_1 = T(\omega)$$

besteht, *relativ* äquivalent genannt werden.

Ein vollständiges System relativ inäquivalenter Grössen erhält man auf folgendem Wege. Es seien

$$S(\omega) = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad S_1(\omega) = \frac{\alpha_1\omega + \beta_1}{\gamma_1\omega + \delta_1}$$

zwei beliebige Substitutionen; so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass $S(\omega)$ und $S_1(\omega)$ für alle Werthe von ω relativ äquivalent sind, durch die Congruenzen

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta \equiv \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 : \delta_1 \text{ (mod. } q)$$

ausgedrückt. Es sollen dann $S(\omega)$ und $S_1(\omega)$ (mod. q) congruente

*) Die Zahl q wird, wie schon in der Einleitung erwähnt ist, im letzten Theile des Abschnittes als Primzahl vorausgesetzt.

**) Vgl. wegen dieses und des folgenden Paragraphen: Klein: „Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichung fünften Grades." Diese Annalen, Bd. XIV, pag. 151 und 152.

Substitutionen heissen. Man denke sich nun ein vollständiges System (mod. q) incongruenter Substitutionen

$$S_1(\omega),\ S_2(\omega),\ \ldots,\ S_\lambda(\omega)$$

aufgestellt, so werden die „Dreiecke" $S_1(\omega)$, $S_2(\omega)$, ..., $S_\lambda(\omega)$ ein vollständiges System relativ inäquivalenter Grössen bilden. Diese Dreiecke kann man auf mannigfaltige Art so wählen, dass sie in der positiven Halbebene ein einfach zusammenhängendes Gebiet bilden, welches als „Fundamentalpolygon" der Gruppe bezeichnet wird. Da von der Begrenzung jedes Dreiecks $S(\omega)$ nur die eine Hälfte zu dem Dreieck gehörig gerechnet wird, so wird auch von der Begrenzung des Fundamentalpolygons nur die Hälfte zu demselben gehören. Jedes Begrenzungsstück dieser Hälfte geht durch eine Transformation $T(\omega)$ in ein bestimmtes Stück der anderen Hälfte über.

§ 2.

Die Riemann'sche Fläche der q^{ten} Stufe.

Denkt man sich das Fundamentalpolygon aus der positiven Halbebene herausgenommen und die zusammengehörigen Ränder desselben vereinigt, so entsteht eine geschlossene Fläche, welche in Anlehnung an die von Herrn Klein eingeführte Terminologie als die „Riemann'sche Fläche der q^{ten} Stufe" bezeichnet werden soll. Ist $q = 1$ (in welchem Falle die Gruppe $T(\omega)$ mit der Gesammtheit aller Substitutionen identisch ist), so ist das Geschlecht der Fläche gleich Null. Für $q > 1$ bestimmt man das Geschlecht p am leichtesten mit Hülfe des Euler'schen Satzes. Gemäss ihrer Entstehung trägt nämlich die Fläche eine Eintheilung in λ Dreiecke, deren Ecken in $\frac{\lambda}{q}$ Punkten zu je q, in $\frac{\lambda}{3}$ Punkten zu je 6 zusammenfallen. Man findet dem entsprechend

$$p = \lambda \cdot \frac{q-6}{12q} + 1.$$

Die Grösse ω als Function des Ortes auf dieser Fläche betrachtet*) ist eine unendlich vieldeutige Function. Ist ω_0 ein Werth, welchen ω an einer bestimmten Stelle besitzt, so hat man in den zu ω_0 relativ äquivalenten Grössen alle Werthe, welche ω an dieser Stelle annimmt. Umgekehrt gehört zu einem gegebenen Werth von ω eine ganz bestimmte Stelle der Fläche. Betrachtet man ferner alle zu ein und demselben Werthe (im gewöhnlichen Sinne) äquivalente Grössen, so vertheilen sich dieselben im Allgemeinen in λ Gruppen unter einander

*) Es ist ω, beiläufig bemerkt, eine η-Function im Sinne der Klein'schen Abhandlung: „Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie." Diese Annalen, Bd. XXI, p. 141 ff.

relativ äquivalenter Grössen, so dass ihnen λ Stellen der Fläche entsprechen. Eine Ausnahme bilden die zu

$$\omega = i,\ \varrho,\ i\infty$$

äquivalenten Grössen, zu denen bezüglich nur $\frac{\lambda}{2}$, $\frac{\lambda}{3}$, $\frac{\lambda}{q}$ Stellen gehören.

Eine besondere Beachtung verdienen die letzteren zu rationalen Werthen von ω gehörenden, also den auf der Axe der reellen Zahlen liegenden Ecken des Fundamentalpolygons entsprechenden Stellen. Zu zwei rationalen Werthen gehört dann und nur dann dieselbe Stelle, falls die Werthe (mod. q) congruent sind. Jene $\frac{\lambda}{q}$ Stellen lassen sich also z. B., wenn q eine Primzahl ist, durch die rationalen Werthe $\pm\frac{\mu}{\varrho}$ angeben, wo μ und ϱ die Werthe

$$0, 1, 2, \ldots \frac{q-1}{2}$$

annehmen und nur die Combination $\mu = 0$, $\varrho = 0$ ausgeschlossen ist.

Besitzt ω einen wenig von der rationalen Zahl $-\frac{\delta}{\gamma}$ verschiedenen Werth, so geht bei einer Umkreisung der Stelle $-\frac{\delta}{\gamma}$ die Grösse

$$\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta} \text{ in } \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta} + q$$

über, wo α, β irgend zwei ganze, der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ unterworfene Zahlen bedeuten. Daraus folgt, dass auf unserer Fläche an der Stelle $-\frac{\delta}{\gamma}$ die Grösse

$$e^{\frac{2i\pi}{q}\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}}$$

von der ersten Ordnung unendlich klein wird. An jeder nicht zu jenen $\frac{\lambda}{q}$ Stellen gehörigen Stelle ω_0, wird offenbar

$$\omega - \omega_0$$

von der ersten Ordnung unendlich klein.

Da jeder geschlossene auf der Fläche gezeichnete Weg, bei dessen Durchlaufung sich ω ungeändert reproducirt, auf einen Punkt zusammengezogen werden kann, so folgt der wichtige Satz:

„*Jede auf der Fläche existirende unverzweigte Function ist eine eindeutige Function von ω.*"

Schliesslich bemerke ich, dass die Betrachtung der Riemann'schen Fläche q^{ter} Stufe nur einen Durchgangspunkt bildet. Sie dient namentlich dazu, die Existenz gewisser Functionen von ω festzustellen (vgl. den folgenden Paragraphen). Allen weiteren Untersuchungen wird dann nicht jene Fläche, sondern die ω-Halbebene oder das in ihr liegende Fundamentalpolygon zu Grunde gelegt.

§ 3.

Ueberall endliche Integrale und ϑ-Functionen der q^{ten} Stufe.

Aus dem letzten Satze ergiebt sich, dass nicht nur die zu der geschilderten Fläche gehörenden algebraischen Functionen, sondern auch die auf ihr existirenden überall endlichen Integrale und ϑ-Functionen, welche „von der q^{ten} Stufe" genannt werden sollen, eindeutige Functionen von ω sind.

Diese Bemerkung kann sich selbstverständlich nur auf den Fall beziehen, dass das Geschlecht p der Fläche grösser als Null ist. Es mögen deshalb im Folgenden die Werthe

$$q = 2, 3, 4, 5,$$

für welche $p = 0$ wird, ausgeschlossen werden.

Bedeuten nun

$$J_1(\omega), J_2(\omega), \ldots, J_p(\omega)$$

p linear unabhängige Integrale der q^{ten} Stufe, so ist

$$J_r(T(\omega)) = J_r(\omega) + P_r \quad (r = 1, 2 \ldots p),$$

wobei die Grössen $P_1, P_2, \ldots, P_p$ ein Periodensystem der Integrale bilden. Es ist aber wichtig, dass auch das Umgekehrte gilt:

„*Jede eindeutige, überall endliche Function von ω, welche sich bis auf eine additive Constante reproducirt, falls ω durch $T(\omega)$ ersetzt wird, ist ein Integral der q^{ten} Stufe.*"

Hieraus folgt unter Anderem, dass, unter $S(\omega)$ eine beliebige Substitution verstanden, stets

$$J_r(S(\omega)) = c_1^{(r)} J_1(\omega) + c_2^{(r)} J_2(\omega) + \cdots + c_p^{(r)} J_p(\omega) + c^{(r)}$$

ist, wo

$$c_1^{(r)}, c_2^{(r)}, \ldots, c_p^{(r)}, c^{(r)}$$

von ω unabhängige Grössen bezeichnen.

In bekannter Weise lassen sich alle diese Relationen aus denjenigen beiden, welche den Substitutionen

$$S(\omega) = \omega + 1 \quad \text{und} \quad S(\omega) = -\frac{1}{\omega}$$

zugehören, ableiten.

Es mögen nun die überallendlichen Integrale q^{ter} Stufe

$$j_1(\omega), j_2(\omega), \ldots, j_p(\omega)$$

ein System von Normalintegralen bilden und es werde die zugehörige Function

$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_p)$$

zur Abkürzung mit

$$\vartheta[u_r]$$

bezeichnet. Versteht man dann unter

$$e_1, e_2, \ldots, e_p$$

p wilkürliche Constante, so besitzt die Function

$$\vartheta[j_r(\omega) - c_r]$$

die in der Gleichung

$$\vartheta[j_r(T(\omega)) - c_r] = e^{\sum\limits_{r=1}^{p} 2\,t_r(j_r(\omega)-c_r)+C_t} \cdot \vartheta[j_r(\omega) - c_r]$$

ausgesprochene Eigenschaft, wobei die ganzen Zahlen $t_1, t_2, \ldots, t_p$ und die Constante C_t nur von der Substitution $T(\omega)$ abhängen.

Es können nun ferner nach Annahme von $2p - 2$ Werthen

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p-2}$$

die Constanten $c_1, c_2, \ldots, c_p$ so bestimmt werden, dass

$$\vartheta[j_r(\omega) - j_r(\Omega) - c_r] = \vartheta[j_r(\Omega) - j_r(\omega) + c_r]$$

als Function von ω bez. Ω betrachtet nur dann und zwar von der ersten Ordnung unendlich klein wird, wenn ω bez. Ω relativ äquivalent ist zu

$$\Omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{p-1}$$

bez.

$$\omega, \omega_p, \omega_{p+1}, \ldots, \omega_{2p-2}.$$

Dabei ist die Wahl der Grössen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p-2}$ nicht vollständig willkürlich; doch kommen die Bedingungen, welchen diese Grössen unterworfen sind, für das Folgende nicht in Betracht.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich ohne Mühe der nachstehende Satz:

„*Ist $f(\omega)$ eine Function von ω und findet die Gleichung*

$$\omega = f(\omega)$$

für eine im Innern der positiven Halbebene liegende Stelle $\omega = \omega_0$ statt, so wird die Function

$$\vartheta[j_r(\omega) - j_r(f(\omega)) - c_r]$$

an dieser Stelle von der ersten Ordnung unendlich klein, wenn $f'(\omega_0) - 1$ endlich und von Null verschieden ist. Findet dagegen die Gleichung $\omega = f(\omega)$ für einen rationalen Werth, etwa für $\omega = -\frac{\delta}{\gamma}$ statt, so wird dieselbe Function an der Stelle $\omega = -\frac{\delta}{\gamma}$ von derselben Ordnung wie

$$e^{\frac{2i\pi}{q}\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}} - e^{\frac{2i\pi}{q}\frac{\alpha f(\omega)+\beta}{\gamma f(\omega)+\delta}}$$

unendlich klein. Hier bezeichnen α und β irgend zwei der Gleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

genügende ganze Zahlen.“

Schliesslich möge hier noch folgender Satz, welcher später von Wichtigkeit wird, eine Stelle finden:

„*Besitzt die Function $F(\omega)$ die Eigenschaft sich bis auf einen von ω unabhängigen Factor zu reproduciren, wenn ω durch $T(\omega)$ ersetzt*

wird, so wird $F(\omega)$ im Fundamentalpolygon gerade so oft Null wie unendlich gross.“

Der Beweis ergiebt sich in bekannter Weise aus der Betrachtung des um die Begrenzung des Fundamentalpolygons zu erstreckenden Integrales

$$\frac{1}{2\pi i}\int d\log F(\omega).\text{*)}$$

§ 4.

Transformation n^{ter} Ordnung q^{ter} Stufe.

Es mögen a, b, c, d irgend vier ganze Zahlen bedeuten, welche nur der Einschränkung unterworfen sind, dass

$$ad - bc = n$$

ein positive zu q theilerfremde Zahl sein soll.

Man kann dann stets ein Repräsentantensystem der Transformation n^{ter} Ordnung**)

$$R_1(\omega),\ R_2(\omega),\ \ldots$$

aufstellen, welches den Bedingungen

$$R_1(\omega) \equiv R_2(\omega) \equiv \cdots \equiv \frac{a\omega + b}{c\omega + d}\ (\text{mod. } q),$$

genügt.***) Dabei ist, wie in der Folge stets, unter der Congruenz

$$\frac{a'\omega + b'}{c'\omega + d'} \equiv \frac{a\omega + b}{c\omega + d},$$

oder auch

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\ (\text{mod. } q),$$

das Bestehen der Congruenzen

$$a' : b' : c' : d' \equiv a : b : c : d\ (\text{mod. } q)$$

verstanden. — Ein solches Repräsentantensystem soll „zum Schema

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\ (\text{mod. } q)$$

gehörend“ genannt werden. Offenbar erhält man aus *einem* derartigen Systeme alle übrigen, indem man $R_i(\omega)$ durch $T_i(R_i(\omega))$ ersetzt. Hiernach werden namentlich auch die Grössen

$$R_1(T(\omega)),\ R_2(T(\omega)),\ \ldots$$

in irgend einer Reihenfolge den Grössen

*) Vgl. wegen der letzten beiden Sätze § 3 der ersten Abhandlung.

**) Siehe § 4 der ersten Abhandlung.

***) Klein, Sitzungsberichte der Münchener Akademie, 6. Dec. 1879, p. 8.

$$R_1(\omega),\ R_2(\omega),\ \ldots$$
relativ äquivalent sein.

Betrachtet man nun die Function
$$\Phi(\omega) = \prod' \vartheta\left[j_r(\omega) - j_r(R_i(\omega)) - c_r\right],$$
wobei im Falle, dass n ein Quadrat und
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0 \\ 0 & \sqrt{n} \end{pmatrix} \pmod{q}$$
ist, der zu ω relativ äquivalente Repräsentant auszulassen ist, so reproducirt sich $\Phi(\omega)$ bis auf einen Exponentialfactor, sei es dass ω durch $T(\omega)$ oder das Repräsentantensystem $R_1(\omega)$, $R_2(\omega)$, ... durch irgend ein anderes zu demselben Schema $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pmod{q}$ gehörendes ersetzt werde. Von dieser Eigenschaft der Function $\Phi(\omega)$ wird bei der Abzählung ihrer Nullstellen beständiger Gebrauch gemacht.

§ 5.

Zahl der Nullstellen von $\Phi(\omega)$.

Es soll untersucht werden, wie oft $\Phi(\omega)$ verschwindet, wenn ω das Fundamentalpolygon beschreibt. Dabei soll jedoch von denjenigen Nullstellen, welche von der Wahl der Grössen ω_1, ω_2, ..., ω_{2p-2} abhängen, abgesehen werden. Ausserdem seien die (auf der Axe der reellen Zahlen liegenden) Ecken des Fundamentalpolygons vorläufig ausgeschlossen.

Für eine Nullstelle $\omega = \omega_0$ von $\Phi(\omega)$ wird ω nothwendig einem Repräsentanten $R_i(\omega)$ relativ äquivalent, so dass derselben eine Gleichung der Form
$$\omega_0 = \frac{a'\omega_0 + b'}{c'\omega_0 + d'}, \quad \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pmod{q} \tag{1}$$
entspricht. Umgekehrt kann einer solchen Gleichung eine bestimmte (nach § 3 einfach zu zählende) Nullstelle von $\Phi(\omega)$ zugewiesen werden; nämlich diejenige, welche dem zu $\frac{a'\omega + b'}{c'\omega + d'}$ äquivalenten Repräsentanten entspricht.

Alsdann wird zu zwei verschiedenen Gleichungen
$$\omega_0 = \frac{a'\omega_0 + b'}{c'\omega_0 + d'}, \qquad \omega_0 = \frac{a''\omega_0 + b''}{c''\omega_0 + d''}$$
nur dann dieselbe Nullstelle gehören, wenn (unabhängig von ω) $\frac{a'\omega + b'}{c'\omega + d'}$ und $\frac{a''\omega + b''}{c''\omega + d''}$ relativ äquivalent sind.

Dann würde
$$\omega_0 = T(\omega_0)$$
sein.

Diese Gleichung ist aber unmöglich. Denn es müsste*)

$$T = US_1 U^{-1} \text{ oder } US_2 U^{-1} \text{ oder } US_2^2 U^{-1},$$

also, da $T \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (mod. q) ist, auch

$$S_1 \text{ oder } S_2 \text{ oder } S_2^2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (mod. } q\text{)},$$

sein, was nicht der Fall ist.

Falls n ein Quadrat ist, und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0 \\ 0 & \sqrt{n} \end{pmatrix} \text{ (mod. } q\text{)},$$

wären noch diejenigen Gleichungen (1) auszuschliessen, für welche $\frac{a'\omega + b'}{c'\omega + d'}$ mit ω relativ äquivalent ist. Solche Gleichungen sind aber, da sie auf $\omega_0 = T(\omega_0)$ führen, gar nicht vorhanden. Es folgt daher:

„*Sieht man ab von den für rationale Werthe von ω eventuell stattfindenden und den von $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p-2}$ abhängigen Nullstellen, so verschwindet $\Phi(\omega)$ im Fundamentalpolygon gerade so oft, als Gleichungen*

$$\text{(1)} \qquad \omega_0 = \frac{a'\omega_0 + b'}{c'\omega_0 + d'}$$

angesetzt werden können, wo ω_0 eine Stelle des Fundamentalpolygons bezeichnet und a', b', c', d' ganze Zahlen bedeuten, welche den Bedingungen

$$a'd' - b'c' = n, \quad \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ (mod. } q\text{)}$$

unterworfen sind.“

§ 6.

Fortsetzung.

Die Zahl der möglichen Ansätze (1) ist nun durch eine Summe von Classenzahlen ausdrückbar.**)

Man denke sich alle positiven quadratischen Formen der negativen Determinanten $-4n + \varkappa^2$, wo $\varkappa$ alle positiven und negativen Zahlwerthe erhält, die absolut genommen kleiner als $2\sqrt{n}$ sind, diese Formen in Classen vertheilt und aus jeder Classe ein Individuum (P, Q, R) nach Willkür ausgewählt. Dann kann man zu jeder Form (P, Q, R) ein vollständiges System (mod. q) incongruenter Substitutionen (S) bestimmen, so dass die Ansätze

$$\omega_0 = S\left(\frac{\frac{-Q+\varkappa}{2} S^{-1}(\omega_0) - R}{P \cdot S^{-1}(\omega_0) + \frac{Q+\varkappa}{2}}\right)$$

*) § 1 der ersten Abhandlung.

**) Vgl. Gierster: I, pag. 29 ff.

nur Stellen ω_0 des Fundamentalpolygons definiren. In allen so entstehenden Ansätzen hat man dann alle Gleichungen (1) vor sich, welche der Bedingung genügen, dass ω_0 im Fundamentalpolygon liegt.

Dabei ist jedoch jede Gleichung, in welcher ω_0 äquivalent zu i bez. ϱ ist, doppelt bez. dreifach aufgenommen, indem die aus einer Form der Classen (P, O, P) bez. (P, P, P) entspringenden Ansätze zu je zweien bez. zu je dreien identisch sind. Es soll deshalb festgesetzt werden, dass jede solche Formenclasse $\frac{1}{2}$ bez. $\frac{1}{3}$ Mal zu zählen ist. Mit dieser Festsetzung können wir sagen: Zu jeder Formenclasse (P, Q, R) gehören so viele Gleichungen (1), als (mod. q) incongruente Substitutionen S existiren, welche den Bedingungen

$$S\begin{pmatrix} \frac{-Q+\varkappa}{2}, & -R \\ P\ \ , & \frac{Q+\varkappa}{2} \end{pmatrix} S^{-1} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ (mod. } q)$$

Genüge leisten.

Es werde zur Abkürzung

$$\text{(A)} \qquad a_1 = \frac{-Q+\varkappa}{2}, \quad b_1 = -R, \quad c_1 = P, \quad d_1 = \frac{Q+\varkappa}{2}$$

gesetzt; ferner sei

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

und es werde von jetzt an die Voraussetzung eingeführt, dass q eine Primzahl sei. Die Bedingungen für S lauten ausführlich geschrieben:

$$\text{(B)} \qquad \left.\begin{aligned} \alpha a_1 + \beta c_1 &\equiv \varepsilon(\alpha a + \gamma b) \\ \gamma a_1 + \delta c_1 &\equiv \varepsilon(\alpha c + \gamma d) \\ \alpha b_1 + \beta d_1 &\equiv \varepsilon(\beta a + \delta b) \\ \gamma b_1 + \delta d_1 &\equiv \varepsilon(\beta c + \delta d) \\ \alpha\delta - \beta\gamma &\equiv 1 \end{aligned}\right\} \text{(mod. } q),$$

wo $\varepsilon = +1$ oder $= -1$ ist. Wenn nun

$$c_1 \text{ nicht } \equiv 0 \text{ (mod. } q)$$

ist, so ergeben sich die Werthe von β und δ aus den ersten beiden Congruenzen (B), falls α und γ bekannt sind.

Trägt man diese Werthe in die letzten beiden Congruenzen ein so reduciren sich dieselben auf

$$\left.\begin{aligned} [a_1 + d_1 - \varepsilon(a+d)]\,(a\alpha + b\gamma) &\equiv 0 \\ [a_1 + d_1 - \varepsilon(a+d)]\,(c\alpha + d\gamma) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \text{(mod. } q),$$

für deren Bestehen die folgende

$$a_1 + d_1 \equiv \varepsilon(a+d) \text{ (mod. } q)$$

nothwendig und hinreichend ist. Substituirt man die Werthe von β und δ ebenso in die Congruenz

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{q},$$

so geht dieselbe über in

$$c\alpha^2 + (d-a)\,\alpha\gamma - b\gamma^2 \equiv \varepsilon c_1 \pmod{q}.$$

Wenn also c_1 nicht $\equiv 0 \pmod{q}$, sind die Bedingungen (B) durch die folgenden ersetzbar:

$$(\mathrm{B}')\qquad \left.\begin{aligned} a_1 + d_1 &\equiv \varepsilon(a+d)\\ c\alpha^2 + (d-a)\,\alpha\gamma - b\gamma^2 &\equiv \varepsilon c_1\\ \beta c_1 &\equiv \varepsilon(\alpha a + \gamma b) - \alpha a_1\\ \delta c_1 &\equiv \varepsilon(\alpha c + \gamma d) - \gamma a_1 \end{aligned}\right\} \pmod{q}.$$

Je nach der Beschaffenheit des Schemas $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ sind nun verschiedene Fälle zu unterscheiden. Es sei

$$-\Delta = (a-d)^2 + 4bc = (a+d)^2 - 4n,$$

so betrachten wir nach der Reihe die folgenden drei Fälle:

I) Δ nicht $\equiv 0 \pmod{q}$,

II) $\Delta \equiv 0 \pmod{q}$,

1) b oder c nicht $\equiv 0 \pmod{q}$,

2) $b \equiv c \equiv 0$, also $a \equiv d \equiv \pm\sqrt{n} \pmod{q}$.

Aus den Bedingungen (B) ist leicht ersichtlich, dass Formen (P, Q, R) vom Theiler q nur im Falle II, 2 zulässige Ansätze liefern können. Desshalb darf in den übrigen Fällen $P = c_1$ als durch q nicht theilbar vorausgesetzt werden; denn in jeder Formenclasse, welche q nicht als Theiler besitzt, giebt es Individuen, deren erster Coefficient nicht durch q theilbar ist. In den Fällen I und II, 1 kommen daher, wie die Bedingungen B' zeigen, nur diejenigen Formenclassen (P, Q, R) in Betracht, für welche

$$\varkappa \equiv \varepsilon(a+d) \pmod{q}$$

ist, und jede liefert so viele zulässige Ansätze als die Congruenz

$$(\mathrm{C})\qquad c\alpha^2 + (d-a)\,\alpha\gamma - b\gamma^2 \equiv \varepsilon P \pmod{q}$$

Lösungen besitzt. Die Zahl dieser Lösungen ist aber im Falle I, wie sich ohne Mühe nachweisen lässt, stets gleich $\frac{1}{2}\left[q - \left(\frac{-\Delta}{q}\right)\right]$. Daher ergiebt sich für die Zahl der betrachteten Nullstellen von $\Phi(\omega)$:

$$\frac{1}{2}\left[q - \left(\frac{-\Delta}{q}\right)\right] \cdot \sum \mathrm{H}(4n - \varkappa^2),$$

wobei die Summation zu erstrecken ist über alle Werthe von $\varkappa$, welche absolut genommen kleiner als $2\sqrt{n}$ sind und der Bedingung

$$\varkappa \equiv \pm (a + d) \pmod{q}$$

genügen. Hier sind auch im Falle $a + d \equiv 0 \pmod{q}$ die doppelten Vorzeichen beizubehalten, so dass dann jeder Werth $\varkappa \equiv 0 \pmod{q}$ zweimal zu nehmen ist.

Im Falle II, 1 lässt sich die Congruenz (C) folgendermassen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \left(b\gamma - \frac{d-a}{2}\alpha\right)^2 &\equiv \varepsilon b P \\ \text{oder } \left(c\alpha + \frac{d-a}{2}\gamma\right)^2 &\equiv \varepsilon c P \end{aligned}\right\} \pmod{q},$$

je nachdem b oder c nicht durch q theilbar ist.

Lösungen (α, γ) existiren offenbar nur dann, wenn das Legendre-sche Zeichen

$$\left(\frac{\varepsilon b P}{q}\right) \left(\text{oder } \left(\frac{\varepsilon c P}{q}\right)\right) = +1$$

ist und zwar giebt es dann q Lösungen. Falls

$$q \equiv 3 \pmod{4},$$

kann das Vorzeichen ε immer und nur auf eine Weise bestimmt werden, dass $\left(\frac{\varepsilon b P}{q}\right) \left(\text{oder } \left(\frac{\varepsilon c P}{q}\right)\right) = +1$ ist.

Daher ist die Zahl der Nullstellen in diesem Falle

$$\frac{1}{2} q \cdot \sum \left[\mathsf{H}(4n - \varkappa^2) - \mathsf{H}\left(\frac{4n - \varkappa^2}{q^2}\right)\right],$$

wo die Summe zu erstrecken ist, über alle Werthe von $\varkappa$, welche absolut genommen kleiner als $2\sqrt{n}$ sind und der Bedingung

$$\varkappa \equiv \pm 2\sqrt{n} \pmod{q}$$

genügen. Dabei rührt das subtractive Glied unter dem Summenzeichen davon her, dass die Formen vom Theiler q auszuschliessen sind; da jede Form doppelt so oft aufgenommen ist, als für sie Lösungen der Congruenz für (α, γ) vorhanden sind, so musste noch der Factor $\frac{1}{2}$ vor das Summenzeichen gesetzt werden.

Endlich ist, wie in der Folge stets,

$$\mathsf{H}(m) = 0,$$

wenn m keine ganze Zahl ist.

Falls nun zweitens

$$q \equiv 1 \pmod{4}$$

ist, erfordert die Bedingung $\left(\frac{\varepsilon b P}{q}\right) \left(\text{oder } \left(\frac{\varepsilon c P}{q}\right)\right) = +1$, dass

$$\left(\frac{P}{q}\right) = \left(\frac{b}{q}\right) \left(\text{oder } \left(\frac{c}{q}\right)\right)$$

ist Für die Zahl der Nullstellen ergiebt sich also

$$q \cdot \sum \mathsf{H}_{+1}(4n - \varkappa^2)$$

oder

$$q \cdot \sum \mathsf{H}_{-1}(4n - \varkappa^2),$$

je nachdem $\left(\frac{b}{q}\right)\left(\text{oder } \left(\frac{c}{q}\right)\right) = +1$ oder -1 ist. Dabei bedeutet $\mathsf{H}_\varepsilon(m)$ die Zahl der Classen der Determinante $-m$, welche den Charakter $\left(\frac{P}{q}\right) = \varepsilon$ besitzen, und die Summation ist über dieselben Werthe von $\varkappa$ zu erstrecken, wie in der vorigen Summe.

Was endlich den Fall II, 2 angeht, so folgt aus den Bedingungen (B), dass

$$P \equiv Q \equiv R \equiv 0, \quad \varkappa \equiv \varepsilon 2\sqrt{n} \pmod{q}$$

sein muss. Dann sind die Congruenzen (B) für jede Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ erfüllt, so dass die letztere jede der

$$\lambda = \frac{q(q^2-1)}{2}$$

incongruenten Substitutionen sein kann. Die Zahl der Nullstellen ist also in diesem Falle

$$\frac{q(q^2-1)}{2} \sum \mathsf{H}\left(\frac{4n - \varkappa^2}{q^2}\right),$$

wo die Summation über dieselben Werthe von $\varkappa$ zu nehmen ist, wie im Falle II, 1.

§ 7.

Zahl der Nullstellen von $\Phi(\omega)$, welche in die Ecken des Fundamentalpolygons fallen*).

Um die Ordnung des Verschwindens von $\Phi(\omega)$ für einen rationalen Werth $\omega = -\frac{\delta}{\gamma}$ zu bestimmen, nehme man die Repräsentanten $R_i(\omega)$ von der Form

$$S\left(\frac{A\,\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta} + B}{D}\right) = \frac{a_i\omega + b_i}{c_i\omega + d_i}$$

an, wo α, β irgend zwei, der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ genügende ganze Zahlen bedeuten, A, D, B dieselben Werthe durchlaufen, wie in § 4 der ersten Abhandlung und die Substitutionen S der Congruenz $\frac{a_i\omega + b_i}{c_i\omega + d_i} \equiv \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \pmod{q}$ entsprechend zu wählen sind.

*) Vgl. Gierster I, pag. 45.

$\Phi(\omega)$ verschwindet nun für $\omega = -\frac{\delta}{\gamma}$ nur dann, wenn ein Repräsentant $R_i\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)$ zu $-\frac{\delta}{\gamma}$ relativ äquivalent wird. Und zwar verschwindet (nach pag. 171) der betreffende Factor

$$\vartheta\left[j_r(\omega) - j_r(R_i(\omega)) - c_r\right]$$

von $\Phi(\omega)$ von der Ordnung 1 oder $\frac{A}{D}$, je nachdem

$$A \geqq D \quad \text{oder} \quad A < D$$

ist. Setzt man nun $\omega = -\frac{\delta}{\gamma}$ in $R_i(\omega)$ ein, so lautet der entstehende Bruch in reducirter Form:

$$\frac{\dfrac{a_i\delta - b_i\gamma}{A}}{\dfrac{c_i\delta - d_i\gamma}{A}}.$$

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die relative Aequivalenz dieses Bruches mit $-\frac{\delta}{\gamma}$ drückt sich durch die Congruenzen:

$$(1) \qquad \left.\begin{aligned} a\delta - b\gamma &\equiv A\varepsilon\delta \\ c\delta - d\gamma &\equiv -A\varepsilon\gamma \end{aligned}\right\} \pmod{q}$$

aus, wo ε entweder $= +1$ oder $= -1$ zu nehmen ist.

Die vorstehenden Congruenzen sind nur dann mit einander verträglich, wenn die Determinante

$$(a - \varepsilon A)(d - \varepsilon A) - bc \equiv -\varepsilon A(a + d) + A^2 + AD \equiv 0 \pmod{q},$$

also

$$A + D \equiv \varepsilon(a + d) \pmod{q}$$

ist. Da ausserdem

$$A \cdot D \equiv n \pmod{q},$$

so muss sein

$$\varepsilon A \equiv \frac{a + d \pm \sqrt{-\Delta}}{2} \pmod{q},$$

wobei $-\Delta$, wie früher, den Werth

$$-\Delta = (a - d)^2 + 4bc = (a + d)^2 - 4n$$

besitzt. Es sind nun wieder die einzelnen Fälle, welche das Schema $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ darbieten kann, zu unterscheiden.

I. Fall. Δ ist nicht $\equiv 0 \pmod{q}$.

Besitzt dann das Legendre'sche Zeichen $\left(\frac{-\Delta}{q}\right)$ den Werth -1, so wird die Congruenz, welche A erfüllen muss, widersinnig. $\Phi(\omega)$ verschwindet also in keiner Ecke des Fundamentalpolygons. Ist aber

$\left(\frac{-\Delta}{q}\right) = +1$, so gehen die Congruenzen (1), falls A einen Theiler von n bezeichnet, für welchen

$$\varepsilon A \equiv \frac{a+d\pm\sqrt{-\Delta}}{2} \pmod{q}$$

ist, über in

$$\left.\begin{array}{r}(a-d\pm\sqrt{-\Delta})\delta - 2b\cdot\gamma \equiv 0\\ 2c\cdot\delta + (a-d\mp\sqrt{-\Delta})\gamma \equiv 0\end{array}\right\} \pmod{q}.$$

Dieselben besitzen $\frac{q-1}{2}$ incongruente Lösungen $\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)$ für die oberen, wie für die unteren Vorzeichen, welche Lösungen ebenso viele Ecken des Fundamentalpolygons ergeben, in denen $\Phi(\omega)$ verschwindet. Für jede dieser Ecken entsprechen aber einem zulässigen Theiler A von n D oder A Nullstellen, je nachdem $A \geq D$ oder $A < D$ ist.

$\Phi(\omega)$ besitzt also für den jetzt betrachteten Fall im Ganzen

$$(q-1)\,U_{\frac{1}{2}(a+d)+\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}} + (q-1)\,U_{\frac{1}{2}(a+d)-\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}}$$

Nullstellen in den Ecken des Fundamentalpolygons, wenn mit U_k die Summe derjenigen Divisoren von n bezeichnet wird, welche kleiner als $\sqrt{n}$ und $\equiv \pm k \pmod{q}$ sind, wobei, wenn n ein reines Quadrat und $\sqrt{n} \equiv \pm k \pmod{q}$ ist, noch $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ zu jener Summe hinzuzunehmen ist.

II. Fall. $\Delta \equiv 0$, also $a + d \equiv \pm 2\sqrt{n} \pmod{q}$.

1) b oder c ist nicht $\equiv 0 \pmod{q}$.

Dann muss $A \equiv \varepsilon\sqrt{n} \pmod{q}$ sein, und für jeden solchen Theiler von n besitzen die Congruenzen (1) $\frac{q-1}{2}$ incongruente Lösungen $-\frac{\delta}{\gamma}$. Die Zahl der betrachteten Nullstellen von $\Phi(\omega)$ ist also jetzt:

$$(q-1)\cdot U_{\sqrt{n}}.$$

Ist 2) $b \equiv c \equiv 0$, also $a \equiv d \equiv \pm\sqrt{n} \pmod{q}$, so muss wieder $A \equiv \varepsilon\sqrt{n} \pmod{q}$ sein. Ist diese Bedingung erfüllt, so bestehen die Congruenzen (1) für jeden Werth von $-\frac{\delta}{\gamma}$, so dass $\Phi(\omega)$ in allen $\frac{\lambda}{q} = \frac{q^2-1}{2}$ Ecken des Fundamentalpolygons verschwindet. Es sind also im Ganzen

$$(q^2-1)\left(U_{\sqrt{n}} - \varepsilon\right)$$

Nullstellen der betrachteten Art vorhanden, wo $\varepsilon = \frac{1}{2}$ oder 0 zu setzen ist, je nachdem n Quadrat ist oder nicht. Dieses Correctionsglied ε rührt davon her, dass, falls n ein Quadrat ist, ein Repräsentant bei der Bildung von $\Phi(\omega)$ auszuschliessen ist (vgl. § 4).

§ 8.

Zusammenstellung.

Indem ich hier die Resultate der letzten Paragraphen in einer leichten (nur formalen) Modification zusammenstelle, schicke ich zunächst über die Bezeichnungen Folgendes voraus. Die Gesammtordnung des Verschwindens der Function

$$\Phi(\omega) = \prod_i{}' \vartheta[j_r(\omega) - j_r(R_i(\omega)) - c_r],$$

während ω das Fundamentalpolygon durchläuft, soll mit

$$\sigma$$

bezeichnet werden, wobei von denjenigen Nullstellen abgesehen wird, welche von der Wahl der Werthe $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_{2p-2}$ abhängen. Ferner möge das auf den Summationsbuchstaben $\varkappa$ bezügliche Zeichen

$$\sum_k$$

andeuten, dass über alle positiven und negativen Zahlen $\varkappa$ summirt werden soll, welche absolut genommen, *nicht grösser* als $2\sqrt{n}$ und $\equiv \pm k$ (mod. q) sind. Dabei sind auch für $k \equiv 0$ (mod. q) beide Vorzeichen beizubehalten, so dass in diesem Falle jeder Werth $\varkappa \equiv 0 (\text{mod.} q)$ zwei Mal zu nehmen ist.

$$\mathsf{H}(m)$$

bezeichnet die Zahl der Classen positiver quadratischer Formen der Determinante $-m$,

$$\mathsf{H}_{+1}(m) \text{ bez. } \mathsf{H}_{-1}(m)$$

die Zahl derjenigen Classen, durch welche nur quadratische Reste bezüglich Nichtreste von q darstellbar sind.

Dabei ist jede Classe, deren reducirte Form die Gestalt $(P, 0, P)$ bez. (P, P, P) besitzt, $1/2$ bez. $1/3$ Mal zu zählen; ferner ist

$$\mathsf{H}(0) = -\frac{1}{12}, \quad \mathsf{H}_{+1}(0) = \mathsf{H}_{-1}(0) = 0$$

und, falls m keine ganze Zahl ist,

$$\mathsf{H}(m) = 0$$

zu setzen. Endlich ist unter

$$U_k$$

die Summe derjenigen Divisoren von n zu verstehen, welche kleiner als $\sqrt{n}$ und $\equiv \pm k$ (mod. q) sind, wobei zu dieser Summe noch $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ hinzuzufügen ist, falls n ein Quadrat und $\frac{1}{2}\sqrt{n} \equiv \pm k (\text{mod.} q)$ ist*).

---

*) Die Bezeichnung „U_k“ ist der Gierster'schen Abhandlung I entnommen. Die Zahl σ stimmt genau überein mit der von Herrn Gierster als „linke Seite der Classenzahlrelation“ bezeichneten Zahl.

Der Werth von σ ergiebt sich nun aus folgender Tabelle:

I. Fall.

$$-\Delta = (a-d)^2 + 4bc = (a+d)^2 - 4n \quad \text{nicht} \equiv 0 \pmod{q}.$$

$$1)\ \left(\frac{-\Delta}{q}\right) = -1.$$

$$\sigma = \frac{q+1}{2} \cdot \sum_{a+d} \mathsf{H}(4n - x^2).$$

$$2)\ \left(\frac{-\Delta}{q}\right) = +1.$$

$$\sigma = \frac{q-1}{q} \cdot \sum_{a+d} \mathsf{H}(4n - x^2) + (q-1)\, U_{\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}+\frac{1}{2}(a+d)} + (q-1)\, U_{\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}-\frac{1}{2}(a+d)}.$$

II. Fall.

$$-\Delta = (a-d)^2 + 4bc = (a+d)^2 - 4n \equiv 0 \pmod{q}.$$

1) b oder c nicht $\equiv 0 \pmod{q}$.

$$\sigma = \frac{q}{2} \cdot \sum_{2\sqrt{n}} \left[\mathsf{H}(4n - x^2) - \mathsf{H}\left(\frac{4n-x^2}{q^2}\right)\right] + (q-1)\, U_{\sqrt{n}},$$

wenn $q \equiv 3 \pmod{4}$,

$$\sigma = q \cdot \sum_{2\sqrt{n}} \mathsf{H}_{+1}(4n - x^2) + (q-1)\, U_{\sqrt{n}},$$

wenn $q \equiv 1 \pmod{4}$ und $\left(\frac{b}{q}\right)$ oder $\left(\frac{c}{q}\right) = 1$,

$$\sigma = q \cdot \sum_{2\sqrt{n}} \mathsf{H}_{-1}(4n - x^2) + (q-1)\, U_{\sqrt{n}},$$

wenn $q \equiv 1 \pmod{4}$ und $\left(\frac{b}{q}\right)$ oder $\left(\frac{c}{q}\right) = -1$.

2) $b \equiv c \equiv 0 \pmod{q}$.

$$\sigma = \frac{q(q^2-1)}{2} \cdot \sum_{2\sqrt{n}} \mathsf{H}\left(\frac{4n-x^2}{q^2}\right) + (q^2-1)\, U_{\sqrt{n}} + \eta,$$

wo

$$\eta = \frac{(q^2-1)(q-6)}{12} = 2(p-1) \quad \text{oder} \quad \eta = 0$$

zu setzen ist, je nachdem n ein Quadrat ist oder nicht.

§ 9.

Der Fall $n = 1$.

Da bei der vorstehenden Untersuchung über die Zahl n keine andere beschränkende Voraussetzung gemacht worden ist, als dass sie durch q nicht theilbar sei, so darf $n = 1$ gesetzt werden. Für diesen Fall reducirt sich $\Phi(\omega)$ auf einen einzigen Factor

$$\vartheta\left[j_r(\omega) - j_r\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) - c_r\right],$$

wo $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ eine beliebige Substitution, welche nicht zur Gruppe $T(\omega)$ gehört, bedeutet. Die allgemeinen Formeln für σ geben nun folgendes Resultat:

„*Die Zahl der von der Wahl der Werthe* $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_{2p-2}$ *unabhängigen und im Fundamentalpolygon liegenden Nullstellen der Function*

$$\vartheta\left[j_r(\omega) - j_r\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) - c_r\right]$$

beträgt

$$\frac{1}{2}(q-1), \qquad \text{wenn } \alpha+\delta \equiv \pm 2 \pmod{q},$$

$$\frac{1}{3}\left(q-\left(\frac{-3}{q}\right)\right), \qquad \text{wenn } \alpha+\delta \equiv \pm 1 \pmod{q},$$

$$\frac{1}{2}\left(q-\left(\frac{-1}{q}\right)\right), \qquad \text{wenn } \alpha+\delta \equiv 0 \pmod{q} \qquad \textit{ist}.$$

In allen übrigen Fällen ist diese Zahl gleich Null.“

II. Abschnitt.

Die Classenzahlrelationen der 7^{ten} Stufe.

Die zweite Bestimmungsart der Zahl σ und mit ihr die Herstellung der Classenzahlrelationen der q^{ten} Stufe erfordert ein genaueres Studium der überall endlichen Integrale der q^{ten} Stufe. Abgesehen von einigen nichtprimzahligen Werthen von q habe ich bislang diese Untersuchung der Integrale vollständig nur für den Fall $q = 7$ durchführen können, auf welchen sich die weiteren Entwicklungen beschränken mögen.

§ 1.

Die überallendlichen Integrale der 7^{ten} Stufe.

Die Integrale der 7^{ten} Stufe habe ich auf drei verschiedenen Wegen erhalten. Der Kürze halber will ich hier nur den einen, an bekannte Resultate anknüpfenden angeben.

Herr Klein hat gezeigt, dass die Verhältnisse der drei Grössen*)

*) „Ueber gewisse Theilwerthe der Θ-Functionen“. Diese Annalen Bd. XVII, pag. 569 ff. Die Bezeichnung habe ich in Rücksicht auf die späteren Entwicklungen etwas modificirt.

$$z_1(\omega) = \quad i \cdot q^{\frac{16}{7}}\, \vartheta_1(4\omega\pi\,|\,q^7) = \quad \sum (-1)^\nu q^{\frac{(7(2\nu+1)+8)^2}{28}},$$

$$z_2(\omega) = \quad i \cdot q^{\frac{4}{7}}\, \vartheta_1(2\omega\pi\,|\,q^7) = \quad \sum (-1)^\nu q^{\frac{(7(2\nu+1)+4)^2}{28}},$$

$$z_4(\omega) = -i \cdot q^{\frac{1}{7}}\, \vartheta_1(\omega\pi\,|\,q^7) \quad = -\sum (-1)^\nu q^{\frac{(7(2\nu+1)+2)^2}{28}}$$

(wo $q = e^{i\pi\omega}$) dann und nur dann für zwei Argumente ω und ω' dieselben Werthe annehmen, wenn ω und ω' relativ äquivalente Grössen sind, die Aequivalenz bezogen auf die Gruppe $T(\omega)$ (mod. 7).

Zwischen $z_1 : z_2 : z_4$ besteht die eine algebraische Beziehung

$$f(z_1, z_2, z_4) \equiv z_1^3 z_4 + z_4^3 z_2 + z_2^3 z_1 = 0.$$

Die überall endlichen Integrale der 7ten Stufe sind nun offenbar identisch mit den Integralen erster Gattung der Curve 4ter Ordnung $f = 0$*). Es werden daher $p = 3$ linear unabhängige Integrale der 7ten Stufe die folgenden sein:

$$\int \frac{\sum c_1 z_2 dz_4}{c_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial z_4}} \cdot z_r, \qquad (r = 1, 2, 4),$$

wobei c_1, c_2, c_3 Constante bedeuten, von welchen das Integral bekanntlich vollständig unabhängig ist.

Setzt man nun den Factor von z_r gleich

$$d\psi(\omega),$$

so findet man unter Berücksichtigung der Formeln, welche die Veränderungen von z_1, z_2, z_4 angeben, wenn ω durch $\omega + 1$, bez. $-\frac{1}{\omega}$ ersetzt wird, dass

$$\frac{d\psi(\omega+1)}{d(\omega+1)} = \frac{d\psi(\omega)}{d\omega}, \qquad \frac{d\psi\left(-\frac{1}{\omega}\right)}{d\left(-\frac{1}{\omega}\right)} = -i\omega\sqrt{-i\omega}\,\frac{d\psi(\omega)}{d\omega}.$$

Nun ist, wenn in üblicher Weise

$$\vartheta_1'(0\,|\,q) = \vartheta_1'(0, \omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} (-1)^\nu (2\nu+1)\, q^{\frac{(2\nu+1)^2}{4}}$$

gesetzt wird:

$$\vartheta_1'(0, \omega+1) = \vartheta_1'(0, \omega),$$
$$\vartheta_1'\left(0, -\frac{1}{\omega}\right) = -i\omega\sqrt{-i\omega}\,\vartheta_1'(0, \omega).$$

*) Die Perioden dieser Integrale hat Herr Poincaré untersucht: Comptes Rendus 1883. Die Resultate des Herrn Poincaré lassen sich im Anschluss an unsere weiteren Betrachtungen leicht beweisen.

Die Function

$$f(\omega) = \frac{1}{\vartheta_1'(0|q)} \cdot \frac{d\psi(\omega)}{d\omega}$$

bleibt daher ungeändert, wenn ω durch $S(\omega)$ ersetzt wird, ist also eine einwerthige Function der absoluten Invariante $J(\omega)$. Nun zeigen aber die Entwicklungen der Grössen $z_1, z_2, z_4, \vartheta_1'(0|q)$ nach Potenzen von q, dass $f(\omega)$ für keine Stelle des Fundamentaldreiecks unendlich gross wird.

Daher ist $f(\omega)$ eine Constante C, also

$$d\psi(\omega) = C \cdot \vartheta_1'(0 \mid q) \cdot d\omega.$$

Setzen wir

$$I_r(\omega) = -\frac{1}{7}\int\limits_{i\infty}^{\omega} z_r \cdot \vartheta_1'(0 \mid q) \cdot \frac{dq}{q}, \quad \text{für } r = 1, 2, 4,$$

so werden $I_1(\omega)$, $I_2(\omega)$, $I_4(\omega)$ *drei linear unabhängige Integrale der* 7^{ten} *Stufe bilden.*

§ 2.

Reihenentwicklungen der Integrale 7^{ter} Stufe.

Werden nun statt $z_1, z_2, z_4, \vartheta_1'(0 \mid q)$ die Reihenentwicklungen dieser Grössen nach Potenzen von q eingetragen, so ergeben sich folgende Gleichungen

$$I_1(\omega) = \sum_{m \equiv 1} \frac{\psi_1(m)}{m} q^{\frac{2m}{7}},$$

$$I_2(\omega) = \sum_{m \equiv 2} \frac{\psi_2(m)}{m} q^{\frac{2m}{7}},$$

$$I_4(\omega) = \sum_{m \equiv 4} \frac{\psi_4(m)}{m} q^{\frac{2m}{7}},$$

wobei das Zeichen

$$\sum_{m \equiv \varkappa}$$

hier, wie in der Folge, andeuten soll, dass die Summation zu erstrecken ist auf alle positiven Zahlen m, welche $\equiv \varkappa (\text{mod. } 7)$ sind.

Die zahlentheoretischen Functionen $\psi_r(m)$ sind definirt durch die Summen

$$\psi_1(m) = -\tfrac{1}{2}\sum (-1)^{\nu+\mu}(2\mu+1);$$
$$8m = 7(2\mu+1)^2 + (7(2\nu+1)+8)^2;$$

$$\psi_2(m) = -\tfrac{1}{2}\sum (-1)^{\nu+\mu}(2\mu+1);$$
$$8m = 7(2\mu+1)^2 + (7(2\nu+1)+4)^2;$$

$$\psi_4(m) = +\tfrac{1}{2}\sum (-1)^{\nu+\mu}(2\mu+1);$$
$$8m = 7(2\mu+2)^2 + (7(2\nu+1)+2)^2,$$

jede Summe erstreckt über alle Lösungen in ganzen positiven oder negativen Zahlen μ, ν der neben der Summe stehenden Gleichung. Die Definition der Functionen $\psi(m)$ lässt sich noch sehr vereinfachen. Es genügt, diese Vereinfachung für $\psi_4(m)$ durchzuführen, da bei $\psi_1(m)$, $\psi_2(m)$ sich Alles analog gestaltet.

Die Gleichung

$$8m = \varrho^2 + 7\tau^2$$

zieht die andere

$$4m = \left(\frac{\varrho + 7\tau}{4}\right)^2 + 7\left(\frac{\varrho - \tau}{4}\right)^2$$

nach sich. Infolge davon kann jeder Lösung der Gleichung

$$8m = (7(2\nu + 1)^2 + 2)^2 + 7(2\mu + 1)^2$$

eine solche Lösung der Gleichung

$$4m = \alpha^2 + 7\beta^2 \tag{1}$$

zugeordnet werden, in welcher α Rest von 7 und $\alpha + \beta \equiv 2 \pmod{4}$ ist. Und zwar geschieht die Zuordnung durch die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha = 7\left(\frac{\nu + \mu}{2}\right) + 4; & \alpha + \beta = 2(2\mu + 1), \\ \beta = \frac{\mu - 7\nu}{2} \quad - 2; & \alpha - 4 = \frac{7}{2}(\nu + \mu), \end{array}\right.$$

wenn $\nu + \mu$ eine gerade Zahl, dagegen durch die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha = 7\left(\frac{\nu - \mu - 1}{2}\right) + 4; & \alpha + \beta = -2(2\mu + 1), \\ \beta = -\frac{7\nu + \mu + 1}{2} - 2; & \alpha - 4 = \frac{7}{2}(\nu - \mu - 1), \end{array}\right.$$

wenn $\nu + \mu$ eine ungerade Zahl ist.

Nun ist

$$\psi_4(m) = \frac{1}{2}\sum_{\nu+\mu \text{ gerade}} (2\mu + 1) - \frac{1}{2}\sum_{\nu+\mu \text{ ungerade}} (2\mu + 1),$$

also

$$\psi_4(m) = \frac{1}{2}\sum (\alpha + \beta).$$

Ist jetzt m ungerade, so erfüllt jede Lösung der Gleichung (1) die Bedingung $\alpha + \beta \equiv 2 \pmod{4}$. Es treten also die Lösungen α, β und $\alpha, -\beta$ gleichzeitig auf, so dass

$$\psi_4(m) = \frac{1}{2}\sum \alpha$$

wird, die Summe erstreckt über *alle* Lösungen der Gleichung (1), in welchen α Rest von 7 ist.

Wenn aber m gerade ist, so kann zunächst

$$\psi_4(m) = \frac{1}{2}\sum \alpha - \frac{1}{2}\sum_0 (\alpha+\beta)$$

gesetzt werden, wo die erstere Summe zu nehmen ist über alle Lösungen der Gleichung (1), für welche α Rest von 7 ist, die letztere Summe nur über diejenigen dieser Lösungen, welche ausserdem der Bedingung $\alpha+\beta \equiv 0$ (mod. 4) genügen. Jeder solchen Lösung können wir aber eine Lösung der Gleichung

$$2m = \alpha_1^2 + 7\beta_1^2$$

vermöge der Formeln

$$\alpha_1 = \frac{\alpha - 7\beta}{4}, \qquad \beta_1 = \frac{\alpha+\beta}{4}$$

zuordnen. Es ist also $\sum\limits_0 (\alpha+\beta) = 4\sum \beta_1 = 0$, daher auch für einen geraden Werth von m

$$\psi_4(m) = \frac{1}{2}\sum \alpha.$$

Die analogen Betrachtungen für $\psi_1(m)$ und $\psi_2(m)$ ergeben ein entsprechendes Resultat, so dass man schliesslich folgende Entwicklungen der Integrale erhält:

„*Es ist, für* $r = 1, 2, 4$:

$$I_r(\omega) = \sum_{m \equiv r} \frac{\psi(m)}{m} q^{\frac{2m}{7}},$$

wobei die zahlentheoretische Function $\psi(m)$ *definirt ist durch die Gleichung:*

$$\psi(m) = \frac{1}{2}\sum \alpha,$$

die Summe erstreckt über alle diejenigen Lösungen in positiven und negativen ganzen Zahlen α, β *der Gleichung*

$$4m = \alpha^2 + 7\beta^2,$$

in welchen α *quadratischer Rest von* 7 *ist.*“ *)

§ 3.

Verhalten der Integrale bei linearer Transformation von ω.

Aus der ursprünglichen Definition der Integrale ergeben sich folgende Relationen:

(1) $$I_r(\omega+1) = \gamma^r I_r(\omega); \quad (r = 1, 2, 4),$$

*) Es ist $\psi(m) = -\frac{1}{2}\eta(m)$, wo $\eta(m)$ die von Herrn **Gierster**, II. pag. 203, eingeführte Function bedeutet.

$$
(2) \quad \begin{cases} I_1\left(-\frac{1}{\omega}\right) = A \cdot I_1(\omega) + B \cdot I_2(\omega) + C \cdot I_4(\omega) + p_1, \\ I_2\left(-\frac{1}{\omega}\right) = B \cdot I_1(\omega) + C \cdot I_2(\omega) + A \cdot I_4(\omega) + p_2, \\ I_4\left(-\frac{1}{\omega}\right) = C \cdot I_1(\omega) + A \cdot I_2(\omega) + B \cdot I_4(\omega) + p_4, \end{cases}
$$

wobei

$$
\gamma = e^{\frac{2i\pi}{7}}, \quad A = \frac{\gamma^2 - \gamma^5}{\sqrt{-7}}, \quad B = \frac{\gamma - \gamma^6}{\sqrt{-7}}, \quad C = \frac{\gamma^4 - \gamma^3}{\sqrt{-7}}
$$

gesetzt ist und p_1, p_2, p_4 numerische Constanten bedeuten, aus denen sich die Perioden der Integrale zusammensetzen.

Die Formeln (1) und (2) reichen bekanntlich aus, um die Veränderung festzustellen, welche die Integrale erleiden, wenn ω durch $S(\omega)$ ersetzt wird, wo $S(\omega)$ irgend eine Substitution bezeichnet. Jedoch gelangt man gewöhnlich bei vorgegebenem $S(\omega)$ rascher zum Ziele durch directe Betrachtungen als durch Zusammensetzung der Substitutionen $\omega + 1$ und $-\frac{1}{\omega}$.

Beispiele hierzu, welche im folgenden Paragraphen von Wichtigkeit werden, bieten die Fälle in welchen

$$S(\omega) \equiv 2\omega \ (\text{mod. } 7)$$

oder

$$S(\omega) \equiv 4\omega \ (\text{mod. } 7)$$

ist. Wir bezeichnen mit $U_1(\omega)$ eine Substitution der ersten, mit $U_2(\omega)$ eine solche der zweiten Art. Die Substitutionen $U_1(\omega)$ und $U_2(\omega)$ bilden mit der Identität eine in der Gesammtheit der (mod. 7) betrachteten Substitutionen enthaltene Untergruppe, indem

$$U_1^2(\omega) \equiv U_2(\omega), \quad U_2^2(\omega) \equiv U_1(\omega), \quad U_1\, U_2(\omega) \equiv U_2\, U_1(\omega) \equiv \omega \ (\text{mod. } 7)$$

ist. Nun hat man jedenfalls, für $r = 1, 2, 4$:

$$I_r(U_1(\omega)) = c_1^{(r)}\, I_1(\omega) + c_2^{(r)}\, I_2(\omega) + c_4^{(r)}\, I_4(\omega) + c^{(r)},$$

wo die Coefficienten c noch unbekannte Zahlwerthe besitzen.

Wird ω durch $\omega + 1$ ersetzt, so erhält man, da

$$U_1(\omega + 1) \equiv U_1(\omega) + 2 \ (\text{mod. } 7)$$

ist:

$$\gamma^{2r}\, I_r(U_1(\omega)) = \gamma c_1^{(r)}\, I_1(\omega) + \gamma^2 c_2^{(r)}\, I_2(\omega) + \gamma^4 c_4^{(r)}\, I_4(\omega),$$

also, da die Integrale linear unabhängig sind:

$$I_r(U_1(\omega)) = c_r \cdot I_{2r}(\omega)\ ^{*)},$$

wobei, wie in der Folge stets geschehen soll, rein additive Constanten, welche eventuell auf den rechten Seiten der Relationen auftreten, kürzehalber fortgelassen sind.

---

*) Die Indices der Integrale sind stets (mod. 7) zu reduciren.

Wird nun ω durch $U_1(\omega)$ ersetzt, so ergiebt sich

$$I_r\big(U_2(\omega)\big) = c_r \cdot c_{2r}\, I_{4r}(\omega).$$

Setzt man endlich $-\frac{1}{\omega}$ statt ω und berücksichtigt die Congruenz

$$U_2\Big(-\frac{1}{\omega}\Big) \equiv \frac{-1}{U_1(\omega)} \pmod{7},$$

so folgt (für $r = 1$):

$$A c_1 I_2(\omega) + B c_2 I_4(\omega) + C c_4 \cdot I_1(\omega) = c_1 c_2 \big(C I_1(\omega) + A I_2(\omega) + B I_4(\omega)\big),$$

also

$$c_1 = c_1 c_4, \quad c_2 = c_1 c_4, \quad c_4 = c_1 c_4$$

oder

$$c_1 = c_2 = c_4 = 1.$$

Die gesuchten Relationen lauten also:

$$\left.\begin{aligned} I_r\big(U_1(\omega)\big) &= I_{2r}(\omega) \\ I_r\big(U_2(\omega)\big) &= I_{4r}(\omega) \end{aligned}\right\} \text{ für } r = 1, 2, 4.$$

§ 4.

Transformation n^{ter} Ordnung der Integrale.

Es mögen die $\Phi(n)$ Ausdrücke

$$R_1(\omega),\ R_2(\omega),\ \ldots$$

ein zu dem Schema

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pmod{7}$$

gehörendes Repräsentantensystem der Transformation n^{ter} Ordnung bilden. Betrachtet man dann die Function

$$\psi(\omega) = \sum_{i=1}^{i=\Phi(n)} I_r\big(R_i(\omega)\big),$$

so besitzt dieselbe die Eigenschaft, sich bis auf eine additive Constante zu reproduciren, wenn ω durch $T(\omega)$ ersetzt wird; überdiess ist $\psi(\omega)$ eine überall endliche Function von ω, folglich (nach pag. 170) ein Integral erster Gattung.

Daher müssen Gleichungen folgender Gestalt bestehen:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{i=\Phi(n)} I_r\big(R_i(\omega)\big) = \varkappa_1^{(r)} I_1(\omega) + \varkappa_2^{(r)} I_2(\omega) + \varkappa_4^{r} I_4(\omega),$$

$$(r = 1, 2, 4),$$

wobei wieder von eventuell rechter Hand noch hinzutretenden additiven Constanten abgesehen wird*).

Zu jedem Schema $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (mod. 7) wird ein solches System von Gleichungen (1) gehören; man bemerke aber, dass alle diese Gleichungssysteme aus einem derselben dadurch erhalten werden können, dass man in diesem ω durch $S_1(\omega)$, $S_2(\omega)$ ... ersetzt, wo S_1, S_2 .. passend gewählte Substitutionen bedeuten. Man kann sich desshalb darauf beschränken, die weitere Betrachtung an ein specielles Schema, sagen wir das Schema

$$\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (mod. 7)}$$

anzuknüpfen. Es mögen also nun die Repräsentanten $R_i(\omega)$ zu diesem Schema gehören, so dass

$$R_i(\omega) \equiv n\omega \text{ (mod. 7)}$$

ist. Wird ω durch $\omega + 1$ ersetzt, so erhält die linke Seite der Gleichung (1) den Factor γ^{rn}, während zu den einzelnen Termen der rechten Seite die Factoren γ, γ^2, γ^4 bezüglich hinzutreten. Ist daher n Nichtrest von 7, so muss

$$\varkappa_1^{(r)} = \varkappa_2^{(r)} = \varkappa_3^{(r)} = 0$$

sein, und die Gleichungen (1) lauten einfach

$$\text{(1a)} \qquad \sum_i I_r(R_i(\omega)) = 0\,, \quad (r = 1, 2, 4).$$

Ist dagegen n Rest von 7, so ergiebt sich nur das Verschwinden von zwei Grössen $\varkappa$, so dass in diesem Falle

$$\sum_i I_r(R_i(\omega)) = \varkappa_r I_{nr}(\omega), \quad (r = 1, 2, 4)$$

folgt. Wird in irgend einer dieser Gleichungen statt ω $U_1(\omega)$ gesetzt, wo wie im vorigen Paragraphen die Substitution

$$U_1(\omega) \equiv 2\omega \text{ (mod. 7)}$$

ist, so folgt unter Berücksichtigung der Congruenz

$$n U_1(\omega) \equiv U_1(n\omega) \text{ (mod. 7)}$$

und unter Benutzung der Resultate des vorigen Paragraphen:

$$\sum_i I_{2r}(R_i(\omega)) = \varkappa_r I_{2nr}(\omega).$$

Folglich ist

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_4 = \varkappa,$$

---

*) Die entsprechenden Schlüsse gelten für beliebige Stufe. Die Aufstellung der Classenzahlrelationen beliebiger Stufe bietet, wenn die Constanten $\varkappa$ bekannt sind, keinerlei principielle Schwierigkeit mehr.

so dass es sich nur noch um die Bestimmung einer einzigen Constanten $\varkappa$ handelt. Zwecks dieser Bestimmung mögen die Repräsentanten $R_i(\omega)$ gleich

$$S\left(\frac{A\omega+7B}{D}\right)$$

angenommen werden, wo A, D, B dieselben Werthe wie früher (§ 4 der ersten Abhandlung) durchlaufen, und die Substitution S, gemäss der Congruenz $R_i(\omega) \equiv n\omega$ (mod. 7), der Bedingung

$$S(\omega) \equiv D^2 \cdot \omega \text{ (mod. 7)}$$

genügen muss. Bei Einführung der Repräsentanten wird

$$\sum_i I_r(R_i(\omega)) = \sum_1 I_r\left(\frac{A\omega+7B}{D}\right) + \sum_2 I_{2r}\left(\frac{A\omega+7B}{D}\right) + \sum_3 I_{4r}\left(\frac{A\omega+7B}{D}\right),$$

wobei die Summen rechter Hand zu erstrecken sind auf alle diejenigen Repräsentanten, für welche die Zahl D bezüglich die Bedingung

$$D^2 \equiv 1,\ D^2 \equiv 2,\ D^2 \equiv 4 \text{ (mod. 7)}$$

erfüllt. Werden jetzt die Reihenentwicklungen der Integrale eingesetzt, so ergiebt sich nach leichter Zwischenrechnung:

$$\sum_i I_r(R_i(\omega)) = \sum_{m=n.r} \frac{\chi(m)}{m} q^{\frac{2m}{7}},$$

wobei

$$\chi(m) = \sum \delta \cdot \psi\left(\frac{mn}{\delta^2}\right)$$

ist, die Summe erstreckt über alle gemeinsamen Divisoren δ von m und n.

Dieselbe Entwicklung muss aber auch $\varkappa \,.\, I_{nr}(\omega)$ liefern; also ist

$$\varkappa \cdot \psi(m) = \chi(m).$$

Für $m = 1$ wird $\psi(m) = 1$, $\chi(m) = \psi(n)$, so dass sich schliesslich

$$\varkappa = \psi(n)$$

ergiebt.*) Man hat also die Relationen:

*) Beiläufig ergiebt sich für die Function ψ das Resultat:

$$\psi(n) \cdot \psi(m) = \sum_\delta \delta\psi\left(\frac{mn}{\delta^2}\right),$$

wo m und n zwei beliebige Zahlen, δ ihre gemeinsamen Divisoren bedeuten. Insbesondere ist

$$\psi(m \cdot n) = \psi(m) \cdot \psi(n),$$

wenn m und n theilerfremde Zahlen sind.

$$\sum_i I_r(R_i(\omega)) = \psi(n) \cdot I_{nr}(\omega),$$

welche auch in der Form:

(1b) $$\sum_i I_r(R_i(\omega)) = \psi(n) \cdot I_r((S(\omega))$$

geschrieben werden können, wo $S(\omega)$ irgend eine der Bedingung

$$S(\omega) \equiv n\omega \pmod{7}$$

genügende Substitution bedeutet.

Geht man jetzt von dem speciellen Repräsentantensystem zu einem beliebigen anderen über, so erhält man aus (1a) und (1b) folgendes Endresultat:

„*Bilden* $R_1(\omega)$, $R_2(\omega)$, ... *ein zu dem Schema*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pmod{7}$$

gehörendes Repräsentantensystem der Transformation n^{ter} *Ordnung, so ist*

$$\sum_i I_r(R_i(\omega)) = 0 \qquad (r = 1, 2, 4)$$

oder

$$\sum_i I_r(R_i(\omega)) = \psi(n) I_r(S(\omega)) \qquad (r = 1, 2, 4),$$

je nachdem n *quadratischer Nichtrest oder Rest von* 7 *ist. Im letzteren Falle bedeutet* $S(\omega)$ *irgend eine der Bedingung*

$$S(\omega) \equiv \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \pmod{7}$$

genügende Substitution."

Die erhaltenen Relationen werden übrigens, wie ich wiederhole, eventuell erst dadurch vollständig correct, dass auf der rechten Seite jeder Gleichung noch eine additive von ω unabhängige Grösse hinzugesetzt wird. Aus der Form der Relationen ergiebt sich, dass dieselben bestehen bleiben, wenn an Stelle der Integrale $J_r(\omega)$ *irgend welche andere Integrale* 7^{ter} *Stufe* gesetzt werden.

§ 7.

Die Classenzahlrelationen der 7^{ten} Stufe.

Es möge

$$\Phi(\omega', \omega) = \prod_{i=1}^{i=\Phi(n)} \vartheta\left[j_r(\omega') - j_r(R_i(\omega)) - c_r\right]^{*)},$$

$$\Psi(\omega', \omega) = \begin{cases} \vartheta\left[j_r(\omega') - j_r(S(\omega)) - c_r\right]^{-\psi(n)}, & \text{wenn } n \text{ Rest von } 7, \\ 1 & \text{, wenn } n \text{ Nichtrest von } 7 \end{cases}$$

*) Die Function geht für $\omega' = \omega$ in die Function $\Phi(\omega)$ des ersten Abschnittes über.

gesetzt und das Product beider Functionen mit

$$\psi(\omega', \omega) = \Phi(\omega', \omega) \,.\, \Psi(\omega', \omega)$$

bezeichnet werden. Dabei haben die benutzten Zeichen für die 7[te] Stufe dieselbe Bedeutung, wie im ersten Abschnitt dieser Abhandlung für die q^{te} Stufe. Wird ferner, unter ω_0', ω_0 bestimmte Werthe (mit positiv-imaginären Bestandtheilen) verstanden,

$$F(\omega', \omega) = \frac{\psi(\omega', \omega)}{\psi(\omega_0', \omega) \cdot \psi(\omega', \omega_0)}$$

gesetzt, so erhält man unter Benutzung der im vorigen Paragraphen abgeleiteten Relationen, folgende Gleichungen:

$$(1) \qquad F(T(\omega'), \omega) = F(\omega', \omega),$$

$$(2) \qquad F(\omega', T(\omega)) = e^{m_1 j_1(\omega') + m_2 j_2(\omega') + m_3 j_3(\omega')} \,.\, F(\omega', \omega)$$

Hier bezeichnen m_1, m_2, m_3 ganze Zahlen, $T(\omega)$, wie früher, irgend eine der Identität (mod. 7) congruente Substitution.

Es mögen nun die Grössen ω' und ω auf der Riemann'schen Fläche der 7[ten] Stufe gedeutet werden, so folgt aus der Gleichung (1) dass $F(\omega', \omega)$ als Function der Stelle ω' der Fläche einwerthig und folglich da sie nur für eine endliche Zahl von Stellen Null und unendlich wird, eine zu der Fläche gehörige algebraische Function ist. Dasselbe gilt selbstverständlich für den Quotienten

$$\frac{F(\omega', T(\omega))}{F(\omega', \omega)}.$$

Folglich muss in der Gleichung (2)

$$m_1 = m_2 = m_3 = 0$$

sein und $F(\omega', \omega)$ ist also auch als Function der Stelle ω eine algebraische Function auf der Fläche.*)

Es sei nun erstens

$$S(\omega) \text{ nicht } \equiv \omega \text{ (mod. 7)},$$

also das Schema $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, zu welchem die Repräsentanten $R_i(\omega)$ gehören, von $\begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0 \\ 0 & \sqrt{n} \end{pmatrix}$ (mod. 7) verschieden. Dann wird die Function

$$F(\omega, \omega)$$

da sie eine algebraische Function der Fläche 7[ter] Stufe ist, auf dieser, oder was dasselbe ist, wenn ω das Fundamentalpolygon beschreibt, gerade so oft Null wie unendlich. Es ist folglich:

---

*) Die Gleichung $F(\omega', \omega) = 0$ stellt die Modularcorrespondenz 7[ter] Stufe des n^{ten} Transformationsgrades vollständig dar. Vgl. meine Arbeit: „Zur Theorie der Modulargleichungen" Göttinger Nachrichten 1883.

(1) $$\sigma - k\,.\,\psi(n) = 2\,.\,\Phi(n) - 2\psi(n),$$

wobei $\psi(n) = 0$ zu setzen ist, wenn n Nichtrest (mod. 7) ist, und wobei k die Zahl der Nullstellen der Function

$$\vartheta\left[j_r(\omega) - j_r(S(\omega)) - c_r\right]$$

bedeutet. σ hat dieselbe Bedeutung, wie in § 8 des ersten Abschnittes; nur ist dort q überall $= 7$ zu setzen.

Ist zweitens $S(\omega) \equiv \omega$ (mod. 7), handelt es sich also um das Schema

$$\begin{pmatrix}\sqrt{n} & 0\\ 0 & \sqrt{n}\end{pmatrix} \text{ (mod. 7)},$$

so betrachte man

$$F(\omega', \omega)\,.\,\vartheta\left[j_r(\omega') - j_r(\omega) - c_r\right]^{\psi(n)+\varepsilon}$$

für $\omega' = \omega$; dabei ist

$$\varepsilon = -1 \quad\text{oder}\quad \varepsilon = 0,$$

je nachdem n ein Quadrat ist oder nicht. Die entstehende Function von ω möge einen Augenblick mit $F(\omega)$ bezeichnet werden. Da $\vartheta[j_r(\omega') - j_r(\omega) - c_r]$ sich bis auf einen constanten Factor reproducirt, wenn ω und ω' simultan durch $T(\omega)$ und $T(\omega')$ ersetzt werden, so ist auch

$$F(T(\omega)) = c_t\,.\,F(\omega),$$

wo c_t eine Constante bedeutet. Hieraus folgt aber nach pag. 171—172 (§ 3 Schluss), dass $F(\omega)$ ebenso oft Null wie unendlich wird, wenn ω das Fundamentalpolygon beschreibt. Es ist daher in dem jetzt betrachteten Falle:

(2) $$\sigma = 2\,.\,\Phi(n) - 6\,\psi(n) + \eta,$$

wo

$$\eta = 4 = 2(p-1) \quad\text{oder}\quad \eta = 0$$

zu nehmen ist, je nachdem n ein Quadrat ist oder nicht.

Der Zahlenfactor 6 rührt davon her, dass jede der beiden Functionen $\vartheta[j_r(\omega_0) - j_r(\omega') - c_r]$ und $\vartheta[j_r(\omega) - j_r(\omega_0') - c_r]$, welche im Nenner von $F(\omega)$ auftreten, an $p = 3$ Stellen unendlich klein von der ersten Ordnung wird.

§ 6.

Fortsetzung und Schluss.

Es erübrigt noch in die Formeln (1) und (2) des vorigen Paragraphen die Werthe von σ und k aus § 8 und 9 des ersten Abschnittes einzutragen, um die Classenzahlrelationen der 7ten Stufe explicite vor sich zu haben. Ist erstens n Nichtrest von 7, so kommt nur der Fall I des § 8 in Betracht. Man unterscheidet dann weiter mit Herrn Gierster am zweckmässigsten die einzelnen Fälle je nachdem

$$a + d \equiv 0 \quad \pm\sqrt{-n}, \quad \pm 2\sqrt{-n}, \quad \pm 4\sqrt{-n} \pmod{7}$$

ist. Die Formel (1) des vorigen Paragraphen ergiebt, diesen Fällen entsprechend, folgende Relationen:

n quadratischer Nichtrest von 7.

$$\left\{\begin{aligned}
&3 \cdot \sum_{0} \mathsf{H}(4n - \varkappa^2) = 2\Phi(n) - 12\, U_{\sqrt{-n}},\\
&2 \cdot \sum_{\sqrt{-n}} \mathsf{H}(4n - \varkappa^2) = \Phi(n),\\
&3 \cdot \sum_{2\sqrt{-n}} \mathsf{H}(4n - \varkappa^2) = 3\Psi(n) - \Phi(n) + 6\, U_{\sqrt{-n}},\\
&2 \cdot \sum_{4\sqrt{-n}} \mathsf{H}(4n - \varkappa^2) = \Phi(n).
\end{aligned}\right.$$

Bei der Aufstellung der dritten Formel ist von der Gleichung

$$2\,(U_{\sqrt{-n}} + U_{2\sqrt{-n}} + U_{4\sqrt{-n}}) = \Phi(n) - \Psi(n)$$

Gebrauch gemacht, wo $\Psi(n)$, wie in der ersten Abhandlung, den Ueberschuss derjenigen Divisoren von n, welche grösser als $\sqrt{n}$, über diejenigen, welche kleiner als $\sqrt{n}$ sind bedeutet.

Ist zweitens n Rest von 7, so unterscheide man wieder die Fälle

$$a + d \equiv 0, \quad \pm\sqrt{n}, \quad \pm 2\sqrt{n}, \quad \pm 4\sqrt{n} \pmod{7}.$$

Nach § 9 des ersten Abschnittes ist diesen Fällen entsprechend

$$k = 4,\ 2,\ 3,\ 0$$

zu setzen. Es ergeben sich folgende fünf Relationen, von welchen die erste die ausführlich geschriebene Formel (2) des vorigen Paragraphen ist:

n quadratischer Rest von 7.

$$\left\{\begin{aligned}
&84 \cdot \sum_{2\sqrt{n}} \mathsf{H}\left(\tfrac{4n - \varkappa^2}{49}\right) &&= \Phi(n) - 24\, U_{\sqrt{n}} - 3\psi(n),\\
&7 \cdot \sum_{2\sqrt{n}} \left[\mathsf{H}(4n - \varkappa^2) - \mathsf{H}\left(\tfrac{4n - \varkappa^2}{49}\right)\right] &&= 4\Phi(n) - 12\, U_{\sqrt{n}} + 2\psi(n),\\
&2 \cdot \sum_{0} \mathsf{H}(4n - \varkappa^2) &&= \Phi(n) + \psi(n),\\
&3 \cdot \sum_{\sqrt{n}} \mathsf{H}(4n - \varkappa^2) &&= 3 \cdot \Psi(n) - \Phi(n) + 6\, U_{\sqrt{n}},\\
&2 \cdot \sum_{4\sqrt{n}} \mathsf{H}(4n - \varkappa^2) &&= \Phi(n) - \psi(n).
\end{aligned}\right.$$

Bei Aufstellung der vierten Relation ist die Gleichung

$$2\,(U_{\sqrt{n}} + U_{2\sqrt{n}} + U_{4\sqrt{n}}) = \Phi(n) - \Psi(n)$$

zu Hülfe genommen.

Ein Vergleich der obigen mit den Gierster'schen Formeln ergiebt vollständige Uebereinstimmung, wenn man erstens die Gleichung

$$\psi(n) = -\frac{1}{2}\,\eta(n)$$

beachtet und zweitens in Rücksicht zieht, dass die von mir gebrauchten Summen immer doppelt so gross sind wie die entsprechenden von Herrn Gierster eingeführten.

Königsberg i. Pr., Ende Juli 1884.

Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Integrale.

Von

M. Tichomandritzky in Charkow.

2. Note.

In meinem Aufsatze „über das Umkehrproblem der elliptischen Integrale", Math. Ann. Bd. XXII, S. 450, habe ich gezeigt, wie man vom Additionstheoreme der elliptischen Integrale 2. Gattung ausgehend von selbst zur Θ-Function oder dem $Al(u)$ von Weierstrass kommt. In einem später russisch von mir geschriebenen Aufsatze über dasselbe Problem (Mittheilungen und Protocolle des Math. Vereins an der Universität zu Charkow, J. 1883, Nr. I) habe ich die Bemerkung hinzugefügt, dass derselbe Weg überhaupt zu allen „fonctions intermédiaires" von Briot und Bouquet (Théorie des fonctions elliptiques, 2 éd., p. 236) führt; in einem andern (daselbst J. 1883, Nr. II) habe ich dieses Verfahren von der canonischen Form des Polynoms unter dem Quadratwurzelzeichen unabhängig gemacht, indem ich die Rechnung von der elementaren Ableitung des Additionstheorems für die Integrale der beiden ersten Gattungen bis zur Einführung der allgemeinsten Θ für die allgemeinste Form eines Polynoms 3ten Grades unter dem Quadratwurzelzeichen durchgeführt habe. Später aber habe ich bemerkt, dass man auch direct von den Integralen zur Θ-Function durch eine elementare Rechnung gelangen kann, ohne das Additionstheorem zum Ausgangspunkte zu nehmen und überhaupt irgend etwas ausser der Monodromie der oberen Grenze des Integrals 1. Gattung, als Function seines Werthes betrachtet, zu kennen (wodurch sich ja die Periodicität der Integrale von selbst ergiebt). Indem ich hier nachstehend dies nachweise, setze ich voraus, dass das Polynom unter dem Quadratwurzelzeichen in die canonische Form von Weierstrass gebracht sei, wodurch wir zugleich in den Besitz eines einfachen Uebergangs vom elliptischen Integrale zur σ-Function gelangen, die unter den „fonctions intermédiaires" besonders ausgezeichnet ist.

1. Wir definiren also x als Function von u durch die Gleichung

$$\frac{dx}{du} = -\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}$$

nebst der Bedingung, dass $x = \infty$ für $u = 0$ wird. Indem wir das Quadrat dieser Gleichung durch $(x-\alpha)^2$ dividiren, dann die rechte Seite nach dem Taylor'schen Lehrsatze entwickeln, erhalten wir:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\log(x-\alpha)}{du}\right)^2 = \frac{R(\alpha)}{(x-\alpha)^2} + \frac{R'(\alpha)}{(x-\alpha)} + \frac{R''(\alpha)}{1.2} + \frac{R'''(\alpha)}{1.2.3}(x-\alpha),$$

wo zur Abkürzung $4x^3 - g_2 x - g_3 = 4R(x)$ gesetzt ist.

Differentiirt man diese Gleichung und dividirt dann durch $\frac{d\log(x-\alpha)}{du}$, so ergiebt sich folgende:

$$\frac{d^2\log\sqrt{x-\alpha}}{du^2} = -2\frac{R(\alpha)}{(x-\alpha)^2} - \frac{R'(\alpha)}{x-\alpha} + \frac{R'''(\alpha)}{1.2.3}(x-\alpha).$$

Dieselbe nimmt eine einfachere Gestalt an, wenn wir für die bis jetzt willkürlich gebliebene Grösse α eine Wurzel der Gleichung $R(x) = 0$ nehmen, also etwa $\alpha = e_i$ setzen, wenn $R(x) = (x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)$ ist. Dann werden wir haben:

$$\frac{d^2\log\sqrt{x-e_i}}{du^2} = -\frac{R'(e_i)}{x-e_i} + \frac{R'''(\alpha)}{1.2.3}(x-e_i),$$

oder, da $\frac{R'''(\alpha)}{1.2.3} = 1$ ist:

$$\frac{d^2\log\sqrt{x-e_i}}{du^2} = \left(b - \frac{R'(e_i)}{x-e_i}\right) - (b-(x-e_i)), \tag{1}$$

wo b eine willkürliche Constante bedeutet.

2. Das erste Glied rechter Seite lässt sich auf dieselbe Form wie das zweite bringen durch die Substitution:

$$y - e_i = \frac{R'(e_i)}{x-e_i}, \tag{2}$$

die uns von Wichtigkeit für die Theorie der elliptischen Functionen zu sein scheint. Durch dieselbe werden den Werthen ∞, e_i, e_k, e_l von x beziehungsweise die Werthe e_i, ∞, e_l, e_k von y zugeordnet. Zugleich wird, da $\frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} = -\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}$ ist:

$$\int_{e_i}^{y}\frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} = -\int_{\infty}^{x}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = u. \tag{3}$$

Da

$$\int_{e_i}^{y} \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} = \int_{e_i}^{\infty} \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} - \int_{y}^{\infty} \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} = \omega_i - v,$$

wenn

$$\int_{e_i}^{\infty} \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} = \omega_i;$$

und

$$-\int_{\infty}^{y} \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} = v$$

gesetzt wird, so verwandelt sich diese Gleichung in folgende:

$$\omega_i - v = u.$$

Setzt man jetzt:

$$x = p(u),$$

und also:

$$y = p(v) = p(\omega_i - u),$$

so giebt die Substitutionsformel (2) folgende Relation zwischen den Werthen der Function $p(u)$ für Werthe des Argumentes, die sich zu ω_i ergänzen:

$$p(\omega_i - u) - e_i = \frac{R'(e_i)}{p(u) - e_i}. \tag{4}$$

Ist irgendwie*) die Eindeutigkeit der Function $p(u)$ bewiesen, so folgt sogleich aus dieser Gleichung die Periodicität dieser Function.

Berücksichtigt man nämlich, dass $p(u)$ gerade ist, was sofort aus der Definitionsgleichung (3) folgt, und setzt $u + \omega_i$ statt u, so erhält man:

$$p(u) - e_i = \frac{R'(e_i)}{p(u + \omega_i) - e_i}$$

und durch Wiederholung:

$$p(u + \omega_i) - e_i = \frac{R'(e_i)}{p(u + 2\omega_i) - e_i},$$

woraus sogleich folgt, dass

$$p(u + 2\omega_i) = p(u) \tag{5}$$

ist.

*) z. B. in der Weise von Briot und Bouquet „Theorie des fonctions doublement periodiques et en particulier des fonctions elliptiques."

3. Drückt man jetzt in der Gleichung (1) alles durch u aus, so nimmt sie folgende Gestalt an:

$$(6)\qquad \frac{d^2 \log \sqrt{p(u)-p(\omega_i)}}{du^2} = c - p(u-\omega_i) - (c - p(u)),$$

wo $b + e_i = c$ gesetzt ist. Integriren wir sie von $u = \omega_\varkappa$ an, so erhalten wir:

$$\frac{d \log \sqrt{p(u)-p(\omega_i)}}{du} = \int\limits_{\omega_\varkappa}^{u} (c - p(u-\omega_i))\,du - \int\limits_{\omega_\varkappa}^{u} (c - p(u))\,du,$$

oder:

$$\frac{d \log \sqrt{p(u)-p(\omega_i)}}{du} = \int\limits_{\omega_\varkappa-\omega_i}^{u-\omega_i} (c - p(u))\,du - \int\limits_{\omega_\varkappa}^{u} (c - p(u))\,du;$$

setzt man hier:

$$\int (c - p(u))\,du = Z(u) + C,$$

so kommt:

$$(7)\qquad \frac{d \log \sqrt{p(u)-p(\omega_i)}}{du} = Z(u-\omega_i) - Z(u) - [Z(\omega_\varkappa - \omega_i) - Z(\omega_\varkappa)].$$

Nun erhalten wir aus der Periodicität der Function $p(u)$, dass:

$$c - p(u+\omega_i) = c - p(u-\omega_i);$$

indem wir diese Gleichung von u_0 beginnend integriren, finden wir:

$$\int\limits_{u_0}^{u} (c - p(u+\omega_i))\,du = \int\limits_{u_0}^{u} (c - p(u-\omega_i))\,du$$

oder:

$$\int\limits_{u_0+\omega_i}^{u+\omega_i} (c - p(u))\,du = \int\limits_{u_0-\omega_i}^{u-\omega_i} (c - p(u))\,du,$$

woraus folgt, dass die Differenz:

$$Z(u+\omega_i) - Z(u-\omega_i) = Z(u_0+\omega_i) - Z(u_0-\omega_i)$$

von u unabhängig ist; wir setzen:

$$(8)\qquad Z(u+\omega_i) - Z(u-\omega_i) = 2\eta_i.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Function $Z(u)$ die Periodicität zweiter Art (nach Hermite) besitzt und dass $2\eta_i$ der Modul der Periodicität ist.

Setzt man in (8) $u = 0$ und berücksichtigt, dass $Z(u)$ ungerade, da ihre Derivirte $c - p(u)$ gerade ist, so hat man:

$$(9)\qquad \eta_i = Z(\omega_i).$$

Setzt man in derselben Gleichung $u = \omega_\varkappa$, so erhält man:

$$Z(\omega_\varkappa + \omega_i) - Z(\omega_\varkappa - \omega_i) = 2\eta_i.$$

Aber in derselben Weise erhält man auch:

$$Z(\omega_i + \omega_\varkappa) - Z(\omega_i - \omega_\varkappa) = 2\eta_\varkappa;$$

aus diesen Gleichungen ergiebt sich durch Subtraction und Division durch 2:

$$Z(\omega_\varkappa - \omega_i) = \eta_\varkappa - \eta_i. \tag{10}$$

Wegen (9) und (10) nimmt jetzt die Gleichung (7) folgende Gestalt an:

$$\frac{d \log \sqrt{p(u) - p(\omega_i)}}{du} = Z(u - \omega_i) - Z(u) + \eta_i. \tag{11}$$

4. Integriren wir diese Gleichung noch einmal zwischen denselben Grenzen, so erhalten wir:

$$\log \sqrt{\frac{p(u) - p(\omega_i)}{p(\omega_\varkappa) - p(\omega_i)}} = \int_{\omega_\varkappa}^{u} Z(u - \omega_i)\, du - \int_{\omega_\varkappa}^{u} Z(u)\, du + \eta_i(u - \omega_\varkappa),$$

oder:

$$\log \sqrt{\frac{p(u) - p(\omega_i)}{p(\omega_\varkappa) - p(\omega_i)}} = \int_{\omega_\varkappa - \omega_i}^{u - \omega_i} Z(u)\, du - \int_{\omega_\varkappa}^{u} Z(u)\, du + \eta_i(u - \omega_\varkappa), \tag{12}$$

und wenn wir vom Logarithmus zur Zahl übergehen:

$$\sqrt{\frac{p(u) - p(\omega_i)}{p(\omega_\varkappa) - p(\omega_i)}} = \frac{e^{\int_{\omega_\varkappa - \omega_i}^{u - \omega_i} Z(u)\, du} \cdot e^{\eta_i (u - \omega_\varkappa)}}{e^{\int_{\omega_\varkappa}^{u} Z(u)\, du}}. \tag{13}$$

Es liegt nahe für die neue Transcendente, die hier erscheint, eine besondere Bezeichnung einzuführen; thun wir dies, indem wir

$$e^{\int_{u_0}^{u} Z(u) du} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(u_0)} \tag{14}$$

setzen, so nimmt die letzte Gleichung folgende Gestalt an:

$$\sqrt{\frac{p(u) - p(\omega_i)}{p(\omega_\varkappa) - p(\omega_i)}} = \frac{\Theta(u - \omega_i) \cdot e^{\eta_i (u - \omega_\varkappa)} \cdot \Theta(\omega_\varkappa)}{\Theta(u) \cdot \Theta(\omega_\varkappa - \omega_i)}.$$

Hieraus aber erhält man, wenn man noch

$$\frac{\sqrt{p(\omega_\varkappa)-p(\omega_i)}}{\dfrac{\Theta(\omega_\varkappa-\omega_i)\,e^{\eta_i\omega_\varkappa}}{\Theta(\omega_\varkappa)}} = C$$

zur Abkürzung setzt:

$$\sqrt{p(u)-p(\omega_i)} = C\cdot\frac{\Theta(u-\omega_i)\,e^{\eta_i u}}{\Theta(u)},$$

und solcher Ausdrücke giebt es drei.

5. Aus der Definitionsgleichung (14) der $\Theta(u)$ zieht man auf bekannte Weise für dieselbe folgendes: 1) sie ist eine eindeutige Function von u; 2) sie ist für endliche Werthe von u immer endlich; 3) für $u\equiv 0$ gleich Null; und 4) besitzt sie die Periodicität dritter Art, was durch die Gleichung

$$\Theta(u+2\omega_i) = -e^{2\eta_i(u+\omega_i)}\,\Theta(u) \tag{16}$$

ausgedrückt wird. Setzt man $c=0$, so erhält man eine Function, die sich nur um einen constanten (d. h. von u unabhängigen) Factor, von der σ-Function unterscheidet; setzt man $\eta_i=0$, was für c den Werth $\dfrac{\bar\eta_i}{\omega_i}$ giebt, wenn $\bar\eta_i$ zur Function $Z(u)=-\int p(u)\,du+C$ gehört, so erhält man eine Function, die in derselben Weise mit der Jacobi'schen Θ-Function zusammenhängt.

Die allgemeineren Functionen $\Theta(u)$, die wir finden, sind die von Briot und Bouquet als „fonctions intermédiaires" benannten, insofern ja letztere eben durch die Gleichungen (16) charakterisirt sind, von denen nur zwei von einander unabhängig sind.

Leipzig, 29. Juli 1884.

Ueber einige Bildungsgesetze in der Theorie der Theilung und der Transformation der elliptischen Functionen.

Von

Von G. Morera in Novara.

Die vorliegende Note steht in engem Zusammenhange mit der Abhandlung des Herrn Prof. Klein: „Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade“, welche im 15ten Bande der Annalen erschienen ist.

Nach den dort*) geschilderten allgemeinen Principien wird die Reduction eines algebraischen Problems auf ein anderes, einfacherer Natur, durch die Bildung gewisser Systeme von neuen Variabeln geleistet, deren charakteristische Eigenschaft ist, bei den Vertauschungen der Galois'schen Gruppe der vorgelegten Gleichung *sich linear homogen in geschlossener Gruppe zu transformiren.*

In derselben Abhandlung ist ein *Fundamentalsatz* gegeben, um solche Systeme aus ihren charakteristischen Eigenschaften wirklich herzustellen (§ 1).

In der nachstehenden Note werden die Bildungsgesetze für einige Systeme gegeben, welche bei der n-Theilung und der Transformation n^{ter} Ordnung der elliptischen Functionen eine wichtige Rolle spielen. Hierbei wird nur der Fall $n =$ *eine ungerade Primzahl* betrachtet.

Diese Bildungsgesetze sind freilich zum Theil bekannt, aber ihre grosse Wichtigkeit für gewisse algebraische Untersuchungen (wie z. B. bei der Theorie der Gleichung vom fünften Grade) lässt mir wünschenswerth scheinen, sie vollständig darzulegen. Uebrigens wolle man insbesondere die Arbeit vergleichen, welche Herr Kronecker in den

---

*) Vgl. die §§ 2 und 3 der angegebenen Abhandlung, oder auch: Vorlesungen über das Ikosaeder etc. (Leipzig 1884), p. 125 ff.

Sitzungsberichten der Berliner Akademie von 1879 veröffentlicht hat (p. 220 ff. Ueber die Classe der Gleichungen, von denen die Theilung der elliptischen Functionen abhängt.)

§ 1.

Es seien $\Phi_{a,b}$, wo a und b die Zahlen 0, 1, 2, 3, ..., $n-1$ mit Ausschluss der Combination $a=b=0$ durchlaufen dürfen, die n^2-1 Wurzeln einer algebraischen Gleichung, deren Galois'sche Gruppe Γ durch die linearen Substitutionen

$$|\, a,\ b;\ a\alpha + b\gamma,\ a\beta + b\delta \,| \pmod{n}$$

definirt ist, worin $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen bezeichnen, die der einzigen Bedingung:

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{n}$$

unterworfen sind.

Dies ist die bekannte Monodromiegruppe der speciellen Theilungsgleichung für eine ungerade elliptische Function.

Wir werden die eben hingeschriebene Substitution als *eine Operation* $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ *bezeichnen.*

Solcher Operationen giebt es bekanntlich $n(n^2-1)$*).

Wenn es sich um elliptische Functionen handelt, d. h. wenn die $\Phi_{a,b}$ *Modulformen* sind, so kommt die genannte Operation darauf hinaus, *statt der ursprünglichen Perioden* ω_1, ω_2 *die neuen* $\alpha\omega_1 + \beta\omega_2$, $\gamma\omega_1 + \delta\omega_2$ $(\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$ *einzuführen.*

Was die Zusammensetzung dieser Operationen anbelangt, gilt die einfache Regel:

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\alpha' + \beta\gamma' & \alpha\beta' + \beta\delta'\\ \gamma\alpha' + \delta\gamma' & \gamma\beta' + \delta\delta'\end{pmatrix}.$$

Die Operationen unserer Gruppe können alle aus den zwei folgenden erzeugt werden:

$$S = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix};$$

aber um eine einfache Darstellung der ganzen Gruppe zu gewinnen, ist es zweckmässig die dritte erzeugende Operation einzuführen:

$$U \equiv \begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & \frac{1}{g}\end{pmatrix} \pmod{n},$$

wo g eine Primitivwurzel von n bedeutet.

---

*) Unter n ist, wie schon gesagt, immer eine *ungerade Primzahl* zu verstehen.

§ 2.

Die Operation U hat offenbar die Periode $n-1$ und ihre Potenzen sind, von der Reihenfolge abgesehen:

$$U_a \equiv \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \pmod{n}$$

$$(a = 1, 2, 3, \ldots, n-1).$$

Unsere gesammte Gruppe umfasst, wie bekannt, die Operationen:

$$S^k U_a \equiv \begin{pmatrix} a & \frac{k}{a} \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}; \quad S^k U_a T S^{k'} \equiv \begin{pmatrix} \frac{k}{a} & \frac{kk'}{a} - a \\ \frac{1}{a} & \frac{k'}{a} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} k, k' = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \\ a = 1, 2, 3, \ldots, n-1 \end{pmatrix}.$$

So ist unsere Gruppe durch drei Operationen: S, T, U vollständig erzeugt.

Die Operation U_a ist natürlich ihrerseits durch die Grundoperationen S und T darstellbar.

Man hat zunächst:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^l \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{l'} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{l''} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{l'''}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + ll' + l'''[l + l''(1 + ll')] & l + l''(1 + ll') \\ l' + l'''(1 + l'l'') & 1 + l'l'' \end{pmatrix}.$$

Um diesen Ausdruck mit U_a zur Uebereinstimmung zu bringen, braucht man nur

$$l \equiv -\frac{a(a-1)}{l'''}, \quad l' \equiv -\frac{l'''}{a}, \quad l'' \equiv \frac{a-1}{l'''} \pmod{n}$$

zu setzen. Es ist aber

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = S\,T\,S,$$

also:

$$U_a \equiv S^{-\frac{a(a-1)}{l'''}} \cdot (S\,T\,S)^{-\frac{l'''}{a}} \cdot S^{\frac{a-1}{l'''}} (S\,T\,S)^{l'''},$$

wo l''' eine noch unbestimmte Zahl bedeutet.

Indem man beachtet, dass

$$(S\,T\,S)^a = T\,S^{-a}\,T^{-1}$$

und für $l''' : \pm a$ annimmt, bekommt man:

$$U_a = S^{-a} . T^{-1} . S^{-\frac{1}{a}} . T . S^{-a} . T^{-1}$$
$$= S^{a} . T \quad . S^{\frac{1}{a}} \quad . T . S^{a} \quad . T^{-1}.$$

Ich stelle noch folgende Formeln zusammen, die man leicht beweist:

$$\left\{\begin{aligned}
&U_l . T = T . U_{\frac{1}{l}};\\
&S^k . U_l = U_l . S^{\frac{k}{l^2}};\\
&T . S^k . U_l = U_{\frac{1}{l}} . T . S^{\frac{k}{l^2}};\\
&S^k . U_l . T . S^{k'} . T = S^{k-\frac{l^2}{k'}} . U_{\frac{l}{k'}} . T . S^{\frac{1}{k'}};\\
&T^2 = U_{-1};\\
&T . S^k . T = S^{-\frac{1}{k}} . U_{\frac{1}{k}} . T . S^{-\frac{1}{k}}.
\end{aligned}\right.$$

§ 3.

Vermöge der vorausgeschickten Formeln erkennt man leicht die Richtigkeit folgenden Theorems:

Will man aus einem gegebenen Φ-Systeme die allgemeinsten Φ bilden, so kann man folgendermassen verfahren. Man bildet irgend welche rationale Function G der gegebenen Elemente, welche bei den Operationen der Gruppe S^k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) und nur bei diesen unverändert bleibt. Dann hat man:

$$\Phi_{0,l} = (G)\, U_{\frac{1}{l}}; \qquad \Phi_{l,lk} = (G)\, U_{\frac{1}{l}}\, T\, S^k.$$

Für die Elemente $\Phi_{a,b}$ haben wir die wohl bekannte Eintheilung in $n + 1$ Reihen:

$$\left\{\begin{array}{lllll}
\Phi_{0,g^0}, & \Phi_{0,g}, & \Phi_{0,g^2}, & \ldots\Phi_{0,g^{n-2}}; & (\infty);\\
\Phi_{g^0,0}, & \Phi_{g,0}, & \Phi_{g^2,g}, & \ldots\Phi_{g^{n-2},0}; & (0);\\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \\
\Phi_{g^0,g^0\nu}, & \Phi_{g,g\nu}, & \Phi_{g^2,g^2\nu}, & \ldots\Phi_{g^{n-2},g^{n-2}\nu}; & (\nu);\\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \\
\Phi_{g^0,g^0(n-1)}, & \Phi_{g,g(n-1)}, & \Phi_{g^2,g^2(n-1)}, & \ldots\Phi_{g^{n-2},g^{n-2}(n-1)}; & (n-1),
\end{array}\right.$$

wo g eine Primitivwurzel von n bezeichnet. Nun hat diesbezüglich die Gruppe Γ bekanntlich folgende Eigenschaften:

1) Die Reihen $(\infty), (0), (1), \ldots, (n-1)$ werden unter einander vertauscht, wie die Wurzeln der Modulargleichung bei ihrer Monodromiegruppe.

2) Die Elemente jeder Reihe werden gleichzeitig unter einander cyklisch vertauscht.

Hieraus fliesst ohne Weiteres das Theorem:

Will man mit einem Φ-Systeme ein System von $n+1$ Variabeln: $C_\infty, C_0, C_1 \ldots C_{n-1}$ aufbauen, welche den Vertauschungen der Monodromiegruppe der Modulargleichung unterworfen sein sollen, so braucht man nur eine metacyklische Function M zu bilden, d. h. eine Function, die bei den Vertauschungen der Gruppe

$$S^k \cdot U_l \quad (k = 0, 1, 2 \ldots n-1; \; l = 1, 2 \ldots n-1)$$

und nur bei diesen unverändert bleibt. Man hat dann:

$$C_\infty = M, \quad C_0 = (M)\,T, \ldots, C_\nu = (M)\,T \cdot S^\nu \ldots.$$

§ 4.

Wir werden jetzt Systeme von Variabeln untersuchen, welche nicht mehr bloss unter einander vertauscht werden, sondern *lineare homogene Substitutionen erfahren.*

Dabei wollen wir folgende Bemerkung voranschicken.

Wenn man bei einer linear homogenen Substitutionsgruppe unter p Variabeln, p particuläre unter einander unabhängige Systeme der gewünschten Eigenschaft gefunden hat, dann *können alle anderen durch diese linear homogen mit invarianten Coefficienten zusammengesetzt werden**).

Also ist die Frage immer als gelöst zu betrachten, wenn einmal diese besonderen Systeme wirklich aufgebaut sind.

Wir betrachten zunächst eine Substitutionsgruppe bei $n+1$ Variabeln

$$D_\infty, D_0, D_1, \ldots, D_{n-1},$$

die man folgendermassen definirt hat:

$$\begin{cases} (D_\mu)\,S = D_{\mu+1}; \quad (\mu = \infty, 0, 1, \ldots, n-1), \\[1ex] (D_\infty)\,T = D_0; \;\; (D_0)\,T = \left(\dfrac{-1}{n}\right) D_\infty; \;\; (D_l)\,T = \left(\dfrac{l}{n}\right) D_{-\frac{1}{l}}; \\[1ex] \qquad\qquad (l = 1, 2, 3, \ldots, n-1), \\[1ex] D_\mu)\,U_a = \left(\dfrac{a}{n}\right) D_{\frac{\mu}{a^2}}\,. \end{cases}$$

*) Man sehe auch Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder etc., pag. 227 ff.

Diese Operationsgruppe ist mit der Gruppe Γ *holoedrisch isomorph, wenn* $\left(\frac{-1}{n}\right) = -1$, *d. h. wenn:* $n \equiv -1 \pmod{4}$. *Wenn dagegen:* $n \equiv +1 \pmod{4}$, *so ist der Isomorphismus hemiedrisch*, d. h. die Operationen der Gruppe sind nur in der Zahl $\frac{n(n^2-1)}{2}$ vorhanden.

Für das Bildungsgesetz dieser Variabeln giebt der erwähnte Fundamentalsatz die folgende Regel:

Man bilde mit den Φ *eine halbmetacyclische Function* H, *d. h. eine Function, die bloss bei den Substitutionen der Gruppe* $S_k U_R$ *(wo* R *alle quadratischen Reste (mod.* n*) und* k *die Zahlen* $0, 1, 2 \ldots n-1$ *durchläuft) ungeändert bleibt, und es sei* H' *der aus* H *erhaltene Werth, wenn auf* H *eine Operation* U_N *(wo* N *einen Nichtrest bezeichnet) angewandt wird. Dann hat man:*

$$D_\infty = H - H',$$

$$D_k = [H - H']\, TS^k.$$

Wenn man die Function H insbesondere aus den Elementen der Reihe (∞) in der oben angeführten Eintheilung der Variabeln Φ zusammensetzt, so hat man folgendes Bildungsgesetz, welches schon von Hrn. Kronecker in den Berliner Monatsberichten aus dem Jahre 1879 (l. c.) gegeben worden ist:

Man bilde aus jeder Reihe eine cyklische Function der Elemente, deren erste Indices Reste sind, nämlich von den Elementen:

$$\Phi_{0,g^0},\quad \Phi_{0,g^2},\quad \Phi_{0,g^4},\quad \ldots\ \Phi_{0,g^{n-3}} \qquad \text{für die Reihe } (\infty);$$

und den Elementen:

$$\Phi_{g^0,g^0\nu},\ \Phi_{g^2,g^2\nu},\ \Phi_{g^4,g^4\nu},\ \ldots\ \Phi_{g^{n-3},g^{n-3}\nu} \text{ für die Reihe } (\nu).$$

Wir nennen diese Functionen bez. S_∞ und S_ν. Man bilde ferner für jede Reihe dieselben Functionen mit den Elementen, deren Indices Nichtreste sind, nämlich mit den Elementen:

$$\Phi_{0,g},\quad \Phi_{0,g^3},\quad \Phi_{0,g^5},\quad \ldots\ \Phi_{0,g^{n-2}} \qquad \text{für die Reihe } (\infty);$$

und den Elementen

$$\Phi_{g,g\nu},\ \Phi_{g^3,g^3\nu},\ \Phi_{g^5,g^5\nu},\ \ldots\ \Phi_{g^{n-2},g^{n-2}\nu} \text{ für die Reihe } (\nu);$$

wir nennen dieselben bez. S'_∞, S'_ν. Dann hat man:

$$D_\infty = S_\infty - S'_\infty;$$

$$D_\nu = S_\nu - S'_\nu.$$

Hat man ein besonderes $\overline{D}$-System gefunden, so sind alle Anderen, wie Hr. Kronecker bemerkt, durch die Formeln:

$$D_\infty = \lambda \overline{D}_\infty + \lambda_1 \overline{D}_\infty{}^3 + \cdots + \lambda_n \overline{D}_\infty^{2n+1};$$
$$D_k = \lambda \overline{D}_k + \lambda_1 \overline{D}_k^3 + \cdots + \lambda_n \overline{D}_k^{2n+1},$$

dargestellt, wo $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ invariante Coefficienten sind. Die geraden Potenzen der Variabeln D sind offenbar Variabeln C; man vergl. den Schlusssatz des vorigen Paragraphen.

§ 5.

Bei $\frac{n+1}{2}$ Variabeln

$$A_0, A_1, A_2 \ldots, A_{\frac{n-1}{2}}$$

hat man eine Substitutionsgruppe, *welche immer holoedrisch isomorph mit der Gruppe der D ist**). Diese Gruppe ist folgendermassen definirt:

$$\begin{cases} (A_\lambda)\, S = \varrho^{\lambda^2} A_\lambda; \qquad (A_\lambda)\, U_a = \left(\frac{a}{n}\right) A_{|a\lambda|}; \\ \qquad \left(\lambda = 0, 1, 2 \ldots \frac{n-1}{2}\right) \\ (A_0)\, T \cdot \left(\frac{\nu}{n}\right) \cdot i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{n} = A_0 + A_1 + \cdots + A_{\frac{n-1}{2}}; \\ (A_\alpha)\, T \cdot \left(\frac{\nu}{n}\right) \cdot i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{n} = 2A_0 + (\varrho^{-2\alpha} + \varrho^{2\alpha}) A_1 + (\varrho^{-4\alpha} + \varrho^{4\alpha}) A_2 + \cdots \\ \qquad + \left(\varrho^{-2\frac{n-1}{2}\alpha} + \varrho^{2\frac{n-1}{2}\alpha}\right) A_{\frac{n-1}{2}}; \quad \left(\alpha = 1, 2 \ldots \frac{n-1}{2}\right), \end{cases}$$

wo:

$$\varrho = e^{\frac{2\pi i}{n}\nu} \quad **)$$

und $|a\lambda|$ in der Formel für U_a den absolut kleinsten Rest bedeutet, den $\pm a\lambda$ modulo n besitzt.

Vermöge des Klein'schen Fundamentalsatzes erhält man leicht für das Bildungsgesetz der A aus den D folgende Ausdrücke:

---

*) Diese A sind die sogenannten Jacobi'schen Theilgrössen. Vergl. Klein, Mathemat. Ann. Bd. XV, S. 276.

**) Man erkennt leicht, dass die Ausdrücke

$$\left(\frac{\nu}{n}\right) \cdot i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{n} \,.\, A_0,$$

$$A_0 + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\frac{n-1}{2}} \varrho^{k\alpha^2} A_\alpha, \quad (k = 0, 1 . 2 \ldots n-1),$$

sich wie die D verhalten.

$$\left\{\begin{aligned} A_0 &= \left(\frac{-\nu}{n}\right)\cdot i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{n}\cdot D_\infty + \sum_{k=0}^{n-1} D_k;\\ A_\alpha &= 2\sum_{k=0}^{n-1} \varrho^{-\alpha^2 k} D_k. \end{aligned}\right.$$

Durch diese Formeln ist die Frage nach der Bildung des A-Systems *vollständig* gelöst. Für $n = 5$ stimmen dieselben mit einem bekannten Resultate von Hrn. Brioschi überein (Atti dell' Istituto Lombardo, II, 1858).

§ 6.

In der wiederholt angeführten Abhandlung im XV. Bande dieser Annalen hat Prof. Klein erkannt, dass allgemein bei $\frac{n-1}{2}$ Variabeln

$$B_1,\ B_2,\ B_3\ \ldots\ B_{\frac{n-1}{2}}$$

eine Substitutionsgruppe existirt, welche, *falls* $n \equiv 1$ (*mod.* 4) *mit der Gruppe* Γ *holoedrisch*, *falls* $n \equiv -1$ (*mod.* 4) *mit* Γ *hemiedrisch isomorph ist*, d. h. im letzteren Falle nur $\frac{n(n^2-1)}{2}$ Operationen enthält. Diese Gruppe ist, unserer gewöhnlichen Erzeugungsweise gemäss, folgendermassen definirt:

$$\left\{\begin{aligned} &(B_\alpha)\ S = \varrho^{\alpha^2} B_\alpha;\\ &(B_\alpha)\ U_a = \gamma\left(\frac{a}{n}\right) A_{a\alpha\nu};\\ &-\left(\frac{\nu}{n}\right)\cdot i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{n}\cdot(B_\alpha)\,T = (\varrho^{2\alpha}-\varrho^{-2\alpha})B_1 + (\varrho^{4\alpha}-\varrho^{-4\alpha})B_2 + \cdots\\ &\qquad\qquad + \left(\varrho^{2\frac{n-1}{2}\alpha} - \varrho^{-2\frac{n-1}{2}\alpha}\right) B_{\frac{n-1}{2}}, \end{aligned}\right.$$

wo $\varrho = e^{\frac{2\pi i}{n}\nu}$, und γ, entweder $+1$ oder -1 bedeutet, jenachdem der Modulo n genommene kleinste Rest von αa positiv oder negativ ist.

Bei der Bildung dieser Variabeln B mittelst des Fundamentalsatzes gebrauchen wir zunächst eine willkürliche Function φ der Φ und irgend eine (v_β) der zu den B contragredienten Variabeln*). Wir bekommen so:

$$B_\alpha = \left(\frac{\alpha\beta}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\varrho^{-\beta^2 k}\left[(\varphi)\,S^k U_{\frac{\alpha}{\beta}} - \left(\frac{-1}{n}\right)(\varphi)\,S^k\,U_{-\frac{\alpha}{\beta}}\right]$$

$$-\left(\frac{\nu}{n}\right)\cdot\frac{i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{k'=0}^{n-1}\left(\frac{l}{n}\right)\varrho^{-\beta^2 k-\alpha^2 k'}\cdot\left[\varrho^{-2\alpha\beta l}-\varrho^{2\alpha\beta l}\right](\varphi)\,S^k\,U_l\,T\,S^{k'},$$

*) Siehe Annalen XV, l. c.

wo β die Zahlen $1, 2, 3 \ldots \frac{n-1}{2}$ bedeuten soll. Tragen wir nun in diese Ausdrücke für φ hinterher die Φ selbst ein, so erhält man nach einigen Reductionen mittelst der Gauss'schen Summen folgendes Resultat:

$$B_\alpha^{(\sigma)} = \left(\frac{\alpha}{n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \varrho^{-k\alpha} \left[\Phi_{\alpha\sigma, k\sigma} - \left(\frac{-1}{n}\right) \Phi_{-\alpha\sigma, -k\sigma}\right],$$

wo σ die Werthe $1, 2, 3 \ldots \frac{n-1}{2}$ annehmen kann.

Die allgemeinsten B sind dann:

$$B_\alpha = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n-1} \lambda_\sigma B_\alpha^{(\sigma)},$$

wo die λ bei den Substitutionen von Γ unveränderliche Functionen bezeichnen.

Diese lineare Zusammensetzung wird natürlich überflüssig, wenn man unter den Φ von vorneherein die allgemeinsten nach § 3 aufgebauten Φ verstehen will. Wenn die Φ die Theilwerthe einer ungeraden elliptischen Function sind, und $\left(\frac{-1}{n}\right)$ ist $= -1$, so verschwinden die so gebildeten B natürlich identisch; aber dies kann sofort vermieden werden, indem man die Φ durch irgend eine gerade Potenz derselben ersetzt*).

Leipzig, den 3. August 1884.

*) Die Vertauschungsgruppe der geraden Potenzen der Φ ist in diesem Falle holoedrisch isomorph mit der B-Gruppe.

Ueber verwandte s-Functionen.

Von

Erwin Papperitz in Leipzig.

Durch die Riemann'sche Abhandlung: „Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen"*) ist in die Analysis eine Transcendente — die *P-Function* — eingeführt worden, deren wesentliche Eigenschaften eben jene der *F-Function* sind, mit dem Unterschiede nur, dass sie in der P-Function von den gewissermassen nur zufälligen Besonderheiten befreit erscheinen, welche die hypergeometrische Reihe selbst auszeichnen. Gerade hierdurch erweist sich die neue Function als geeignet, um für das Studium allgemeinerer hypergeometrischer Functionen als Ausgangspunkt zu dienen. Für gewisse Untersuchungen ist es weiterhin zweckmässig, nicht die P-Function selbst, sondern den Quotienten s zweier linear unabhängiger Zweige derselben zu betrachten, wie dies insbesondere in der grundlegenden Arbeit des Herrn H. A. Schwarz: „Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt"**) geschieht. Der eingeführte Quotient ist es, der im Anschlusse an die Bezeichnungsweise des Herrn Schwarz als *s-Function* benannt wird, und auf ihn soll sich die gegenwärtige Mittheilung beziehen, deren Zweck es ist, die Darstellungen von Riemann und Schwarz in einem gewissen Punkte zu ergänzen.

In der Theorie der hypergeometrischen Functionen ist eine Classe von Beziehungen von Wichtigkeit, welche zuerst bei Gauss***) als „Relationen zwischen verwandten Functionen" (relationes inter functiones contiguas) auftreten. Bei der Einführung der s-Function wird daher die Frage aufgeworfen werden: *Wie überträgt sich der Begriff der Verwandtschaft von der hypergeometrischen Function auf die s-Func-*

---

*) Abh. d. K. Ges. d. Wiss. z. Göttingen, 7. Bd. 1857, u. Ges. Werke, p. 62.

**) Crelle's Journal, Bd. 75.

***) Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \cdots$, Ges. Werke, Bd. III.

tion und welcherlei Beziehungen bestehen zwischen verwandten s-Functionen? Die Antwort soll im Folgenden gegeben werden; zu diesem Ende aber erscheint es nöthig, einige allgemeinere Bemerkungen voraufzuschicken.

1.

Es seien a, b, c beliebige complexe Constanten, ferner $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ reelle Zahlen, von denen vorausgesetzt wird, dass keine der Differenzen $\alpha - \alpha', \beta - \beta', \gamma - \gamma'$ eine ganze Zahl, die Summe aller aber: $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$ sei. Die mit den genannten Grössen gebildete *allgemeine Riemann'sche P-Function.*

$$P\begin{pmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{pmatrix}$$

ist die Lösung einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung von der Form:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + p \cdot \frac{dy}{dz} + q \cdot y = 0. \tag{1}$$

Diese Differentialgleichung ist von Riemann selbst und meines Wissens auch sonst nicht explicite angegeben worden; ich theile daher hier die fertige Gleichung mit, ohne auf ihre Ableitung einzugehen, zu welcher man die Methode in dem nachgelassenen Fragmente Riemann's: „Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten" und den Zusätzen hierzu von Hrn. Weber*) entwickelt findet. Sie stellt sich in die folgende symmetrische Form:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dz^2} + \left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{z-\beta} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c}\right) \cdot \frac{dy}{dz} \\ &+ \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}\left(\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b}\right. \\ &\left. + \frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c}\right) \cdot y = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Speciell für $a = 0$, $b = \infty$, $c = 1$ geht sie über in die nachstehende Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} &z^2(1-z^2) \cdot \frac{d^2y}{dz^2} - z(1-z)\left\{(\alpha+\alpha'-1) + (\beta+\beta'+1)z\right\} \cdot \frac{dy}{dz} \\ &+ \left\{\alpha\alpha' - (\alpha\alpha' + \beta\beta' - \gamma\gamma')z + \beta\beta' z^2\right\} \cdot y = 0.^{**)} \end{aligned} \tag{3}$$

---

*) Riemann's Ges. Werke, p. 357.

**) Beiläufig mag bemerkt werden, dass aus der Differentialgleichung (2) durch einen bestimmten Grenzübergang, nämlich für $a = -1$, $b = \frac{1}{\varepsilon}$, $c = +1$,

Durch Vertauschung der Werthe $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ mit den Werthen $0, \alpha, 0, 1-\gamma, \beta, \gamma-\alpha-\beta$ geht endlich hieraus die Differentialgleichung der *Gauss'schen Reihe* $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ hervor.

Sind y_1 und y_2 irgend zwei linearunabhängige particuläre Lösungen der Differentialgleichung (2), so bildet der Quotient

$$s = \frac{y_1}{y_2} \tag{4}$$

die *allgemeinste s-Function* mit den „*Verzweigungswerthen*" $z = a, b, c$ und den „*zugehörigen Exponenten*" $\lambda = \alpha' - \alpha$, $\mu = \beta' - \beta$, $\nu = \gamma' - \gamma$. Diese genügt ihrerseits einer Differentialgleichung 3. Ordnung von bekannter Form:

$$[s]_z = r(z), \tag{5}$$

oder ausführlich geschrieben:

$$\frac{\frac{d^3 s}{dz^3}}{\frac{ds}{dz}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2 s}{dz^2}}{\frac{ds}{dz}}\right)^2 = \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}\left\{\frac{1-\lambda^2}{2} \cdot \frac{(a-b)(a-c)}{z-a}\right. \tag{6}$$
$$\left. + \frac{1-\mu^2}{2} \cdot \frac{(b-c)(b-a)}{z-b} + \frac{1-\nu^2}{2} \cdot \frac{(c-a)(c-b)}{z-c}\right\}.$$

Die wechselseitige Beziehung der beiden Differentialgleichungen spricht sich dann weiterhin darin aus, dass nach dem von Abel herrührenden Satze:

$$y_2 \frac{dy_1}{dz} - y_1 \frac{dy_2}{dz} = C \cdot e^{-\int p\, dz}$$

umgekehrt geschlossen werden darf: Ist s eine particuläre Lösung von (5) oder (6), so bilden die beiden Functionen

---

$\alpha = \alpha' = \gamma = \gamma' = 0$, $\beta = -n$, $\beta' = n+1$ und lim $\varepsilon = 0$, die Differentialgleichung der *Kugelfunctionen:*

$$\frac{d^2 P}{dz^2} - \frac{2z}{1-z^2} \cdot \frac{dP}{dz} + \frac{n(n+1)}{1-z^2} \cdot P = 0$$

und ebenso für $a = \varepsilon$, $b = \frac{1}{\varepsilon}$, $c = \omega$, $\alpha = \nu$, $\alpha' = -\nu$, $\beta = i\omega$, $\beta' = -i\omega$, $\gamma = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4\omega^2})$, $\gamma' = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4\omega^2})$ und lim $\varepsilon = 0$, lim $\omega = \infty$ die Differentialgleichung der *Bessel'schen Functionen*:

$$\frac{d^2 J}{dz^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{dJ}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) \cdot J = 0$$

abgeleitet werden kann. Die Kenntniss der letzteren Ableitung verdanke ich einer Mittheilung des Herrn Olbricht. Vermöge derselben stellt sich die Bessel'sche Function als Grenzfall der P-Function dar, wobei zwei singuläre Punkte in einen zusammengerückt sind, der alsdann für die Function $J(z)$ eine wesentlich singuläre Stelle bildet.

$$(7) \qquad y_2 = \sqrt{C \cdot \frac{e^{-\int p\,dz}}{\frac{ds}{dz}}}, \qquad y_1 = s \cdot y_2,$$

in denen C eine Constante bezeichnet, particuläre Lösungen jeder Differentialgleichung von der Form (1), für welche die Relation

$$2q - \tfrac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dz} = r(z)$$

besteht. Diese letztere Voraussetzung ist aber insbesondere für unsere Differentialgleichung (2) erfüllt.

Vermöge der gekennzeichneten Zuordnung beider Differentialgleichungen zu einander, übertragen sich nun die Eigenschaften der P-Function ohne Weiteres auf die s-Function und umgekehrt.

Für den vorliegenden Zweck mag es genügen, Folgendes hervorzuheben:

1. Die s-Function ist nur bei $z = a,\ b,\ c$ verzweigt.

2. Jeder Functionszweig stellt sich als lineargebrochene Function jedes anderen Zweiges s' dar:

$$s = \frac{c_1 s' + c_2}{c_3 s' + c_4}$$

mit constanten Coefficienten c_i.

3. Den zu den Verzweigungswerthen $z = a,\ b,\ c$ gehörigen „*Fundamentalsystemen*"*) der Differentialgleichung (2): P^α, $P^{\alpha'}$, P^β, $P^{\beta'}$, P^γ, $P^{\gamma'}$ entsprechen die „*Fundamentalwerthe*"

$$s_a = \frac{P^\alpha}{P^{\alpha'}}, \quad s_b = \frac{P^\beta}{P^{\beta'}}, \quad s_c = \frac{P^\gamma}{P^{\gamma'}}$$

der s-Function, welche nach Multiplication mit $(z-a)^\lambda$, $(z-b)^\mu$, resp. $(z-c)^\nu$ in der Umgebung von $z = a,\ b,\ c$ eindeutig, endlich und von Null verschieden bleiben.

4. Alle s-Functionen sind durch lineare Substitution der Veränderlichen z auf die eine s-Function mit den singulären Punkten $z = 0,\ \infty,\ 1$ reducibel, welche Herr Schwarz untersucht und durch $s(\lambda, \mu, \nu, z)$ bezeichnet hat.

2.

Beschreibt der Punkt z in der Ebene der complexen Zahlen einen geschlossenen Weg, welcher keinen der Verzweigungspunkte $z = a$, b, c umgiebt, so kehrt nach Durchlaufung desselben die Variable s zum Anfangswerthe zurück. Umkreist dagegen z einen der Verzweigungswerthe, so geht s in eine lineare Function

*) Wegen der Terminologie vgl. Fuchs, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten, Crelles Journ. Bd. 66.

$$s' = \frac{M_1 s + M_2}{M_3 s + M_4}$$

seines Anfangswerthes über. Die betreffende lineare Substitution mag abkürzend durch

$$s' = (M)(s)$$

bezeichnet werden. Alsdann ist durch Angabe der linearen Substitutionen (A), (B), (C), welche der einmaligen Umkreisung der Punkte $z = a$, b, c in bestimmtem, etwa positivem Sinne entsprechen, der Verlauf der s-Function allenthalben bestimmt.

Zwischen den Substitutionen (A), (B), (C) finden hierbei nothwendig gewisse Bedingungen statt, welche es zunächst aufzustellen gilt.

Umkreist z nacheinander die Punkte c, b, a in positivem Sinne, so ist der durchlaufene Weg einer einfachen Umkreisung des Punktes $z = \infty$ in negativem Sinne äquivalent, und da $s(z)$ in der Umgebung dieses Punktes eindeutig vorausgesetzt wird, so wird s zum Ausgangswerthe zurückkehren. Die Substitutionen (C), (B), (A) nacheinander angewandt müssen also zur Identität zurückführen, was durch die symbolische Gleichung

$$(1) \qquad (C)(B)(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ausgedrückt wird.

Die Fundamentalwerthe s_a, s_b, s_c gehen ihrer Definition zufolge bei einem positiven Umlaufe von z um $z = a, b, c$ resp. über in:

$$s_a \cdot e^{-2\lambda\pi i}, \quad s_b \cdot e^{-2\mu\pi i}, \quad s_c \cdot e^{-2\nu\pi i}.$$

Bezeichnet man diese speciellen linearen Substitutionen durch (A'), (B'), (C'), setzt überdies:

$$(2) \qquad s_a = (b)(s_b) = (c)(s_c)$$

und denkt sich die Substitutionen (A), (B), (C) auf den Fundamentalwerth s_a angewandt, so ergiebt sich:

$$(3) \qquad \begin{cases} (A) = (A'), \\ (B) = (b)(B')(b)^{-1}, \\ (C) = (c)(C')(c)^{-1}. \end{cases}$$

Aus der Fundamentalrelation (1) fliessen dann drei Bedingungen für die acht Coefficienten in (b) und (c).

Aus der mit (1) äquivalenten Relation

$$(C) = (A)^{-1}(B)^{-1}$$

hat man unmittelbar:

$$\frac{c_1 e^{-2\nu\pi i} \cdot s_c + c_2}{c_3 e^{-2\nu\pi i} \cdot s_c + c_4} = \frac{b_1 e^{2\mu\pi i} \cdot s_b + b_2}{b_3 e^{2\mu\pi i} \cdot s_b + b_4} \cdot e^{2\lambda\pi i}$$

oder:

$$(b_1 c_3 \cdot e^{(\lambda+\mu-\nu)\pi i} - b_3 c_1 \cdot e^{(-\lambda+\mu-\nu)\pi i})\, s_b s_c$$
$$+ (b_1 c_4 \cdot e^{(\lambda+\mu+\nu)\pi i} - b_3 c_2 \cdot e^{(-\lambda+\mu+\nu)\pi i})\, s_b$$
$$+ (b_2 c_3 \cdot e^{(\lambda-\mu-\nu)\pi i} - b_4 c_1 \cdot e^{(-\lambda-\mu-\nu)\pi i})\, s_c$$
$$+ (b_2 c_4 \cdot e^{(\lambda-\mu+\nu)\pi i} - b_4 c_2 \cdot e^{(-\lambda-\mu+\nu)\pi i}) = 0.$$

Andererseits hat man infolge der Relationen (2) die Gleichung:

$$(b_1 c_3 - b_3 c_1)\, s_b s_c + (b_1 c_4 - b_3 c_2)\, s_b + (b_2 c_3 - b_4 c_1) s_c + (b_2 c_4 - b_4 c_2) = 0.$$

Durch Vergleichung gelangt man zu folgenden drei Bedingungen:

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{b_1 c_3 \cdot e^{(\lambda+\mu-\nu)\pi i} - b_3 c_1 \cdot e^{(-\lambda+\mu-\nu)\pi i}}{b_1 c_3 - b_3 c_1} \\ = \dfrac{b_1 c_4 \cdot e^{(\lambda+\mu+\nu)\pi i} - b_3 c_2 \cdot e^{(-\lambda+\mu+\nu)\pi i}}{b_1 c_4 - b_3 c_2} \\ = \dfrac{b_2 c_3 \cdot e^{(\lambda-\mu-\nu)\pi i} - b_4 c_1 \cdot e^{(-\lambda-\mu-\nu)\pi i}}{b_2 c_3 - b_4 c_1} \\ = \dfrac{b_2 c_4 \cdot e^{(\lambda-\mu+\nu)\pi i} - b_4 c_2 \cdot e^{(-\lambda-\mu+\nu)\pi i}}{b_2 c_4 - b_4 c_2}. \end{cases}$$

Diese bestimmen drei von den acht Coefficienten $b_1, b_2, \ldots, c_4$; die übrigen bleiben willkürlich. Da indess lediglich die Verhältnisse $b_1 : b_2 : b_3 : b_4$ und $c_1 : c_2 : c_3 : c_4$ in Frage kommen, so sind jene restirenden fünf Coefficienten drei willkürlichen Constanten äquivalent. In der That bemerkt man leicht, dass die drei Fundamentalwerthe s_a, s_b, s_c nur bis auf constante Factoren bestimmt sind, sobald die Function s gegeben ist.

Die Form der Bedingungen (4) gestattet eine bemerkenswerthe Folgerung, welche sogleich zu benutzen sein wird, um die verwandten s-Functionen zu definiren. Die Gleichungen (4) bleiben nämlich ungeändert, wenn die Grössen λ, μ, ν in $\lambda + l, \mu + m, \nu + n$ übergehen, wo l, m, n irgendwelche reelle ganze Zahlen bezeichnen, deren Summe einer geraden Zahl $2k$ gleich ist. Denn in diesem Falle ändern sich auch alle die oben auftretenden Aggregate

$$(\lambda+\mu-\nu),\ (-\lambda+\mu-\nu),\ \ldots,\ (-\lambda-\mu+\nu)$$

um gerade ganze Zahlen. Für die Functionen

$$s(\lambda, \mu, \nu, z) \quad \text{und} \quad s(\lambda+l, \mu+m, \nu+n, z),$$
$$l + m + n = 2k$$

können daher die Substitutionen (b) und (c) gleich angenommen werden, da die Gleichheit der fünf willkürlichen Grössen b_i und c_i die der drei bestimmten nach sich zieht.

3.

Man betrachte zwei s-Functionen s und s_1 mit den nämlichen Verzweigungswerthen und den zugehörigen Exponenten

$$\lambda,\ \mu,\ \nu \quad \text{und} \quad \lambda + l,\ \mu + m,\ \nu + n.$$

Um den Uebergang zu den zugeordneten P-Functionen zu gewinnen, setzen wir einmal:

$$e^{-\int p\,dz} = (z-a)^{\alpha+\alpha'-1} \cdot (z-b)^{\beta+\beta'-1} \cdot (z-c)^{\gamma+\gamma'-1},$$

sodann:

$$e^{-\int p_1 dz} = (z-a)^{\alpha+\alpha'+\alpha_1+\alpha_1'-1} \cdot (z-b)^{\beta+\beta'+\beta_1+\beta_1'-1} \cdot (z-c)^{\gamma+\gamma'+\gamma_1+\gamma_1'-1}$$

und hierbei:

$$(1)\qquad \begin{cases} \lambda = \alpha' - \alpha, \quad \mu = \beta' - \beta, \quad \nu = \gamma' - \gamma, \\ l = \alpha_1' - \alpha_1, \quad m = \beta_1' - \beta_1, \quad n = \gamma_1' - \gamma_1, \\ \qquad \alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1, \\ \qquad \alpha_1 + \alpha_1' + \beta_1 + \beta_1' + \gamma_1 + \gamma_1' = 0. \end{cases}$$

Dann vermitteln die Formeln (7) des § 1 den Uebergang zu den beiden P-Functionen

$$P\begin{pmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P\begin{pmatrix} a & b & c & \\ \alpha+\alpha_1 & \beta+\beta_1 & \gamma+\gamma_1 & z \\ \alpha'+\alpha_1' & \beta'+\beta_1' & \gamma'+\gamma_1' & \end{pmatrix}.$$

Aus den angeschriebenen Relationen (1) folgt durch Combination:

$$(2)\qquad \begin{cases} 2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) = (l + m + n), \\ 2(\alpha_1' + \beta_1' + \gamma_1') = -(l + m + n). \end{cases}$$

Sind daher die Grössen l, m, n ganze (positive oder negative) reelle Zahlen von gerader Summe, so lassen sich auch die Grössen α_1, α_1', β_1, β_1', γ_1, γ_1' als *ganze Zahlen* wählen, und zwar noch auf mannichfache Weise. Dies vorausgesetzt werden aber die Functionen P und P_1 als *verwandte P-Functionen* bezeichnet; es mögen daher auch die Functionen s und s_1 unter der Bedingung, dass l, m, n ganze Zahlen von gerader Summe

$$l + m + n = 2k$$

darstellen, als *verwandte s-Functionen* bezeichnet werden.

Betrachtet man einerseits eine Function $s(\lambda, \mu, \nu, z)$, welche die Halbebene z auf ein gewisses Kreisbogendreieck der s-Ebene mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ abbildet*), andererseits eine solche Function s_1, welche die Abbildung der Halbebene z auf irgend ein anderes von den nämlichen drei Kreisen begrenztes Dreieck der s-Ebene mit den Winkeln

*) Man vergl. Schwarz, a. a. O. p. 311.

$\lambda'\pi, \mu'\pi, \nu'\pi$ vermittelt, so ist bei passender Wahl der Vorzeichen*) das System der Winkelzahlen

$$\lambda', \mu', \nu'$$

immer einem der vier Systeme

$$\begin{array}{ccc} \lambda\;, & \mu\;, & \nu\;; \\ \lambda\;, & \mu-1, & \nu-1; \\ \lambda-1, & \mu\;, & \nu-1; \\ \lambda-1, & \mu-1, & \nu \end{array}$$

nach dem Modul 2 congruent. Dies besagt aber: die sämmtlichen Functionen $s(\lambda', \mu', \nu', z)$ stehen zu $s(\lambda, \mu, \nu, z)$ also auch zu einander in der Beziehung der *Verwandtschaft.* Umgekehrt erkennt man leicht, dass durch dieselben die *Gesammtheit* aller mit $s(\lambda, \mu, \nu, z)$ verwandten s-Functionen erschöpft wird.

Bezeichnen jezt wieder s_h und s_i zwei verwandte s-Functionen mit den Exponenten

$$\lambda, \mu, \nu \quad \text{und} \quad \lambda+l, \; \mu+m, \; \nu+n,$$
$$l+m+n=2k,$$

und resp. $s_h^a, s_h^b, s_h^c, s_i^a\; s_i^b, s_i^c$, die zugehörigen Fundamentalwerthe, so ist ersichtlich, dass die Verhältnisse

$$\frac{s_h^a}{s_i^a}, \quad \frac{s_h^b}{s_i^b}, \quad \frac{s_h^c}{s_i^c}$$

in der Umgebung der Stellen $z=a, b, c$ *eindeutig* bleiben.

Gestützt auf diese Bemerkung und den früher schon hervorgehobenen Umstand, dass für verwandte s-Functionen die linearen Substitutionen (b) und (c), welche den Uebergang von den zum Punkte $z=a$ gehörigen Fundamentalwerthen zu den zu $z=b$ und $z=c$ gehörigen vermitteln, gleichlautend angenommen werden dürfen, kann leicht gezeigt werden, dass zwischen irgend vier verwandten s-Functionen eine einfache Relation stattfindet.

Es seien s_1, s_2, s_3, s_4 vier verwandte s-Functionen, deren singuläre Punkte der Einfachheit halber bei $z=0, \infty, 1$ angenommen werden mögen. Man betrachte das *Doppelverhältniss der Fundamentalwerthe*

$$D(s^a) = \frac{s_1^a - s_2^a}{s_1^a - s_4^a} \cdot \frac{s_3^a - s_4^a}{s_3^a - s_2^a}. \tag{3}$$

Aus der Gleichheit der Substitutionen (b) und (c) folgt:

$$D(s^a) = D(s^b) = D(s^c). \tag{4}$$

---

*) Die Vorzeichen der Exponenten λ, μ, ν in $s(\lambda, \mu, \nu, z)$ können willkürlich festgesetzt werden, da die Differentialgleichung nur λ^2, μ^2, ν^2 enthält.

Da ferner $D(s^a)$ nur von den Verhältnissen $s_1^a : s_2^a : s_3^a : s_4^a$ abhängt, so ist dieser Ausdruck in der Umgebung von $z = a$ eindeutig, ebenso aber bei $z = b$, c und folglich in der ganzen Ebene. Gelingt es daher zu zeigen, dass er nur für eine endliche Anzahl von Werthen und zwar von endlicher Ordnung unendlich wird, so ist die Existenz einer Relation von der Form:

$$D(s^a) = R(z) \tag{5}$$

erwiesen, wo $R(z)$ eine *rationale Function von z* bezeichnet.

Um diesen Nachweis zu erbringen, greift man am einfachsten auf die Beziehungen zur P-Function zurück. Man bezeichne durch die Symbole P_i, wo $i = 1, 2, 3, 4$, verwandte P-Functionen mit den Exponenten $\alpha_i, \beta_i, \ldots, \gamma_i'$, ferner durch $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}$ von den Grössen

$$\alpha_i + \alpha_k' \text{ und } \alpha_k + \alpha_i',$$
$$\beta_i + \beta_k' \text{ und } \beta_k + \beta_i',$$
$$\gamma_i + \gamma_k' \text{ und } \gamma_k + \gamma_i'$$

diejenigen Grössen jedes Paares, welche um eine positive ganze Zahl l_{ik}, m_{ik}, n_{ik} kleiner sind, als die anderen $\alpha_{ik}', \beta_{ik}', \gamma_{ik}'$. Alsdann schreibe man $D(s^a)$ in der Form:

$$D(s^a) = \frac{P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2'} - P_1^{\alpha_1'} P_2^{\alpha_2}}{P_1^{\alpha_1} P_4^{\alpha_4'} - P_1^{\alpha_1'} P_4^{\alpha_4}} \cdot \frac{P_3^{\alpha_3} P_4^{\alpha_4'} - P_3^{\alpha_3'} P_4^{\alpha_4}}{P_3^{\alpha_3} P_2^{\alpha_2'} - P_3^{\alpha_3'} P_2^{\alpha_2}}$$

und beachte, dass, wie Riemann zeigt*), der Ausdruck

$$(P_i^{\alpha_i} P_k^{\alpha'_k} - P_i^{\alpha'_i} P_k^{\alpha_k}) \cdot z^{-\alpha_{ik}} \cdot (1 - z)^{-\gamma_{ik}}$$

eine *ganze Function* in z vom Grade

$$-(\alpha_{ik} + \beta_{ik} + \gamma_{ik}) = \frac{1}{2}(l_{ik} + m_{ik} + n_{ik} - 1)$$

darstellt. Dann zeigt sich, dass die Function

$$D(s^a) \cdot z^{n_1}(1 - z)^{n_2},$$

in welcher

$$\begin{cases} n_1 = \alpha_{14} + \alpha_{32} - \alpha_{12} - \alpha_{34}, \\ n_2 = \gamma_{14} + \gamma_{32} - \gamma_{12} - \gamma_{34} \end{cases} \tag{6}$$

zu setzen ist, der Quotient zweier ganzen Functionen von z ist, deren Grade resp. durch die ganzen Zahlen:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{2}(l_{12} + l_{34} + m_{12} + m_{34} + n_{12} + n_{34}) - 2, \\ m_2 &= \frac{1}{2}(l_{14} + l_{32} + m_{14} + m_{32} + n_{14} + n_{32}) - 2 \end{aligned} \tag{7}$$

gegeben sind. Die Exponenten n_1 und n_2 sind aber bei unseren Voraussetzungen ebenfalls ganze Zahlen

*) a. a. O. § 6. Ges. W. p. 73.

Mithin ist nicht nur die *Existenz* einer Relation

$$(8)\qquad D(s^a) = z^{-n_1} \cdot (1-z)^{-n_2} \cdot \frac{\varphi_{m_1}(z)}{\varphi_{m_2}(z)} = R(z)$$

erwiesen, sondern es ist auch nach dem Gesagten in jedem Falle der *Grad* der beiden ganzen Functionen, welche Zähler und Nenner von $R(z)$ abgeben, leicht festzustellen. Zur wirklichen Berechnung von $R(z)$ aber hat man stets das Mittel der Substitution hypergeometrischer Reihen in dem Ausdruck $D(s^a)$, worauf man durch eine Coefficientenvergleichung die unbestimmt hingeschriebenen Coefficienten von φ_{m_1} und φ_{m_2} auswerthen kann.

Die als gegeben zu betrachtenden verwandten s-Functionen s_i hängen mit den Fundamentalwerthen s_i^a durch Relationen von der Form zusammen:

$$s_i = \frac{A_i s_i^a + B_i}{C_i s_i^a + D_i}, \qquad i = 1, 2, 3, 4;$$

substituirt man die Auflösungen derselben nach s_i^a in die Gleichung (8), so geht eine Relation von der Form

$$(9)\qquad \frac{a s_1 s_2 + b s_1 + c s_2 + d}{a' s_1 s_4 + b' s_1 + c' s_4 + d'} \cdot \frac{a'' s_3 s_4 + b'' s_3 + c'' s_4 + d''}{a''' s_3 s_2 + b''' s_3 + c''' s_2 + d'''}$$
$$= z^{-n_1} \cdot (1-z)^{-n_2} \cdot \frac{\varphi_{m_1}(z)}{\varphi_{m_2}(z)}$$

hervor, mit constanten Coefficienten $a, b, \ldots, d'''$. Man kann daher sagen:

Zwischen je vier verwandten s-Functionen findet eine quadrilineare Relation mit ganzen Functionen von z als Coefficienten statt.

Eine entsprechende *Relation zwischen s-Functionen höherer Ordnung* (mit einer grösseren Anzahl von Verzweigungspunkten) wird immer stattfinden, sobald sich *verwandte Functionen* in solcher Weise definiren lassen, dass für dieselben die *Gruppe der Substitutionen, welche ihre Verzweigung bestimmen*, oder mit anderen Worten *die Gesammtheit der zwischen den Periodicitätssubstitutionen stattfindenden Fundamentalrelationen identisch* ausfällt.

Leipzig, Juni 1884.

Ueber eindeutige Functionen mit mehreren, nicht vertauschbaren Perioden. III.

Von

Otto Rausenberger in Frankfurt a. M.

Die von mir in den gleichnamigen Abhandlungen im 20. und 21. Bande der Annalen behandelten Periodicitätsgruppen wurden alle in der Art erzeugt, dass die Periode $y = x + 1$ mit einer zweiten, die sich auf die Form $y = -\frac{a}{x+b}$ reduciren liess, zusammengestellt wurden. Für reelle a und b wurde die Untersuchung vollständig erledigt, complexe Gruppen dagegen kamen — einige leicht als unzulässig erweisbare Fälle abgerechnet — nur insoweit zur Behandlung, als sie aus den reellen Gruppen durch Variation der Parameter ins Complexe abgeleitet werden konnten. Bei weiteren complexen Gruppen führen die angewandten Methoden auf Schwierigkeiten, weshalb ich diesen Theil der Untersuchung, der übrigens kaum zu positiven Resultaten führen dürfte, vorläufig beiseite lassen will. Im Folgenden soll der zweite Hauptfall, die Gruppe

$$y = px,\ |p| < 1;\quad y = \varphi_1(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

in Angriff genommen und zunächst für reelle Coefficienten durchgeführt werden. Die reellen Gruppen des ersten Hauptfalles werden uns hier in neuer Form wieder begegnen, sowie wir auch zu den unendlichen Gruppen geführt werden, die aus der Zusammenstellung zweier elliptischer Perioden hervorgehen; die Aufsuchung der letzteren in dieser Form ist zweckmässiger, wie die Transformation der einen Periode zu $y = e^{\frac{2\pi i}{m}} x$, da hierdurch complexe Grössen, welche die Formeln ungemein compliciren, in die Rechnung gebracht werden.

Trotz der mannichfachen Arbeiten über Transformationsgruppen, welche die Herren **Klein**, **Poincaré** und **Dyck** in der letzten Zeit

veröffentlichten und die mehr von geometrischen Gesichtspunkten ausgehen, fehlt es doch immer noch an einer ins Detail gehenden und wirklich durchgeführten Behandlung der höheren periodischen Functionen, und ich darf daher hoffen, dass die folgenden specielleren Untersuchungen zur Klarstellung und zum Ausbau dieser Theorie nicht überflüssig sind.

§ 1.

Reduction des Problems.

1. Bei

$$y = px,\ |p| < 1;\ y = \varphi_1(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

darf vorausgesetzt werden, dass a, c und d sämmtlich von Null verschieden sind. $c = 0$ ist nach Früherem unmöglich; gleichzeitiges Verschwinden von a und d oder b und c führt auf ebenfalls früher behandelte Fälle. Ist nur $a = 0$, also

$$\varphi_1(x) = \frac{b}{cx+d},$$

so folgt

$$p^n \varphi_1(p^n x) = \frac{bp^n}{cp^n x + d},$$

woraus für unendlich wachsende negative n

$$\psi_1(x) = \frac{b}{cx}$$

wird;

$$\psi_1 \varphi_1(x) = \frac{cx+d}{c} = x + \frac{d}{c}$$

ist aber in Verbindung mit $y = px$ unmöglich.

Beachten wir, dass im allgemeinen

$$\varphi_{-1}(x) = \frac{dx-b}{-cx+a}$$

ist, so folgt hieraus auch die Unzulässigkeit von $d = 0$.

2. Setzen wir λy statt y, λx statt x, so bleibt $y = px$ ungeändert, während aus $y = \varphi_1(x)$

$$y = \frac{ax + \frac{b}{\lambda}}{c\lambda x + d}$$

wird. Wählen wir

$$\lambda = \frac{a}{c},$$

so folgt

$$y = \frac{ax + \frac{bc}{a}}{ax+d} = \frac{x + \frac{bc}{a^2}}{x + \frac{d}{a}}$$

oder nach Aenderung der Bezeichnung

$$y = \frac{x-a}{x-b}.$$

Weiter schreiben wir hierfür

$$y = 1 - \frac{a-b}{x-b},$$

und wenn wir nochmals die Bezeichnung ändern, erhalten wir die *Normalform* der Gruppe:

$$(1) \qquad y = px, \quad y = \varphi_1(x) = 1 - \frac{a}{x-b}.$$

a ist die *Determinante* von $\varphi_1(x)$.

3. Es ist

$$(2) \qquad \varphi_{-1}(x) = b - \frac{a}{x-1}$$

und nach vorgenommener Reduction im obigen Sinne

$$(3) \qquad y = 1 - \frac{\frac{a}{b^2}}{x - \frac{1}{b}}.$$

4. Da wir $\varphi_1(x)$ durch

$$\varphi_1(p^k x) = 1 - \frac{ap^{-k}}{x - bp^{-k}},$$

ersetzen dürfen und k immer so gewählt werden kann, dass

$$|p| < |bp^{-k}| \leqq 1$$

ist, so dürfen wir b innerhalb der Grenzen

$$|p| < |b| \leqq 1$$

voraussetzen. Da aber $\varphi_1(x)$ auch durch seine Umkehrung ersetzt werden kann, in der $\frac{1}{b}$ an die Stelle von b tritt, so dürfen wir sogar

$$\left|p^{\frac{1}{2}}\right| \leqq |b| \leqq 1$$

annehmen; denn ist

$$|p| < |b| < \left|p^{\frac{1}{2}}\right|,$$

so ist

$$\left|p^{-\frac{1}{2}}\right| < \left|\frac{1}{b}\right| < |p^{-1}|,$$

also

$$\left|p^{\frac{1}{2}}\right| < \left|\frac{p}{b}\right| < 1.$$

§ 2.

Herleitung nothwendiger Bedingungen für reelle Gruppen.

1. Unter der Annahme, dass p reell und positiv, a und b reell sind, untersuchen wir nunmehr, wann

$$\varphi_1(x) = 1 - \frac{a}{x-b}$$

eine elliptische, parabolische oder hyperbolische Periode ist. Aus früheren Formeln (Band XX, pag. 189) folgt:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) \text{ ist elliptisch, wenn } 4a &> (1-b)^2, \\ \text{parabolisch, wenn } 4a &= (1-b)^2, \\ \text{hyperbolisch, wenn } 4a &< (1-b)^2 \end{aligned}$$

ist.

2. Ausser der Beschaffenheit von $\varphi_1(x)$ ist diejenige der Perioden $\varphi_1(p^k x)$ für die Zulässigkeit und den Charakter der Gruppe wesentlich; man erhält die Kriterien, wenn man in den letzten Formeln a und b durch ap^{-k} und bp^{-k} ersetzt. Man findet:

$$\begin{aligned} \varphi_1(p^k x) \text{ ist elliptisch, wenn } 4a &> p^k(1-bp^{-k})^2, \\ \text{parabolisch, wenn } 4a &= p^k(1-bp^{-k})^2, \\ \text{hyperbolisch, wenn } 4a &< p^k(1-bp^{-k})^2 \end{aligned}$$

ist.

3. *Ist bei $k \geqq 0$ $\varphi_1(p^k x)$ hyperbolisch, so ist es auch $\varphi_1(p^{-k}x)$; ist $\varphi_1(p^{-k}x)$ hyperbolisch, so ist das Gleiche mit $\varphi(p^{k+1}x)$ der Fall.*

Beweis: Da $b^2 \leqq 1$, also

$$b^2(p^{-k} - p^k) \leqq p^{-k} - p^k$$

oder

$$p^k + b^2p^{-k} \leqq p^{-k} + b^2p^k$$

oder

$$p^k - 2b + b^2p^{-k} \leqq p^{-k} - 2b + b^2p^k$$

oder

$$p^k(1-bp^{-k})^2 \leqq p^{-k}(1-bp^k)^2$$

ist, so folgt aus

$$4a \leqq p^k(1-bp^{-k})^2$$

auch

$$4a \leqq p^{-k}(1-bp^k)^2.$$

Ferner folgen aus $b^2p^{-1} \leqq 1$ die Ungleichheiten

$$\begin{aligned} p^{-k} - p^{k+1} &\leqq b^2p^{-1}(p^{-k} - p^{k+1}), \\ p^{-k} + b^2p^k &\leqq p^{k+1} + b^2p^{-k-1}, \\ p^{-k}(1-p^k b)^2 &\leqq p^{k+1}(1-p^{-k-1}b)^2 \end{aligned}$$

u. s. w.

Geben wir k der Reihe nach die Werthe

$$k = 0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3, \ldots,$$

so kann $\varphi_1(p^k x)$ nicht elliptisch (resp. parabolisch) sein, wenn es für das in der Reihe vorhergehende k nicht elliptisch (resp. parabolisch) war; auf eine parabolische Periode kann in der Reihe, wie ebenfalls leicht zu sehen, keine elliptische folgen.

Hieraus ergiebt sich eine erste Unterscheidung von Hauptfällen.

4. *Erster Hauptfall:* Kein $\varphi_1(p^k x)$ ist elliptisch oder parabolisch; die einzige Bedingung hierfür ist

$$4a < (1-b)^2. \tag{1}$$

Bei *negativem* a trifft dies immer zu.

5. *Zweiter Hauptfall:* $\varphi_1(x)$ ist elliptisch oder parabolisch; die übrigen $\varphi_1(p^k x)$ sind hyperbolisch; alsdann muss

$$4a \geq (1-b)^2, \tag{2}$$

$$4a < p(1-p^{-1}b)^2 \tag{3}$$

sein. Damit die elliptische Periode rational sei, setzen wir (nach Band XX, pag. 188)

$$-1 + \frac{1}{2}\,\frac{(1-b)^2}{a} = \cos\frac{2\pi}{m}. \tag{4}$$

Wäre der linksstehende Ausdruck $= \cos\frac{2kr}{m}$, so könnte man durch Iteration von $\varphi_1(x)$ zu einem $\varphi_1'(x)$ mit $k = 1$ gelangen.

Aus (4) wird weiter

$$(1-b)^2 = 2a\left(1 + \cos\frac{2\pi}{m}\right) = 4a\cos^2\frac{\pi}{m},$$

also, wenn für $\sqrt{a}$ der positive Werth gewählt wird,

$$1 - b = 2\cos\frac{\pi}{m}\sqrt{a}. \tag{5}$$

Mithin ist

$$\varphi_1(x) = 1 - \frac{\dfrac{(1-b)^2}{4\cos^2\frac{\pi}{m}}}{x-b} = 1 - \frac{a}{x - \left(1 - 2\cos\frac{\pi}{m}\sqrt{a}\right)}. \tag{6}$$

Ist $\varphi_1(x)$ parabolisch, so wird $m = \infty$, also

$$\varphi_1(x) = 1 - \frac{\dfrac{(1-b)^2}{4}}{x-b} = 1 - \frac{a}{x-(1-2\sqrt{a})}. \tag{7}$$

6. *Dritter Hauptfall:* $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ sind elliptisch oder parabolisch, die übrigen $\varphi_1(p^k x)$ hyperbolisch, sodass die Ungleichheiten

$$4a \geqq (1-b)^2, \tag{8}$$

$$4a \geqq p(1-bp^{-1})^2, \tag{9}$$

$$4a < p^{-1}(1-bp)^2 \tag{10}$$

statthaben. Zu (4) kommt dann die weitere Gleichung (dass $\cos\frac{k\pi}{n}$ an Stelle von $\cos\frac{\pi}{n}$ auszuschliessen ist, zeigt schon die folgende geometrische Darstellung)

$$(1-bp^{-1})^2 = 4\cos^2\frac{\pi}{n}\,p^{-1}a. \tag{11}$$

Da $|b|\,p^{-1} > 1$ ist, so müssen beim Wurzelausziehen aus (11) zwei Fälle unterschieden werden.

a) $b > 0$; dann ist

$$bp^{-1} - 1 = 2\cos\frac{\pi}{n}\,p^{-\frac{1}{2}}\sqrt{a}; \tag{12}$$

aus (5) und (12) berechnen wir

$$\sqrt{a} = \frac{p^{-\frac{1}{2}} - p^{\frac{1}{2}}}{2\left(p^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi}{m} + \cos\frac{\pi}{n}\right)}, \tag{13}$$

$$b = \frac{p^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi}{m} + \cos\frac{\pi}{n}}{p^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi}{m} + \cos\frac{\pi}{n}}, \tag{14}$$

worin $p^{\frac{1}{2}}$ und $p^{-\frac{1}{2}}$ positiv zu nehmen sind. — Aus der Ungleichheit $b \geqq p^{\frac{1}{2}}$ wird

$$p^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi}{m} + \cos\frac{\pi}{n} \geqq \cos\frac{\pi}{m} + p^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi}{n}$$

oder

$$\cos\frac{\pi}{n} \geqq \cos\frac{\pi}{m},$$

d. h.

$$n \geqq m. \tag{15}$$

b) $b < 0$; dann ist

$$-bp^{-1} + 1 = 2\cos\frac{\pi}{n}\,p^{-\frac{1}{2}}\sqrt{a}, \tag{16}$$

also

$$(17)\qquad \sqrt{a} = \frac{p^{-\frac{1}{2}} - p^{\frac{1}{2}}}{2\left(p^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi}{m} - \cos\frac{\pi}{n}\right)},$$

$$(18)\qquad -b = \frac{\cos\frac{\pi}{n} - p^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi}{m}}{p^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi}{m} - \cos\frac{\pi}{n}},$$

wobei wieder die Bedingung (15) und ausserdem

$$(19)\qquad p^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi}{m} > \cos\frac{\pi}{n}$$

statthat.

Für $m = n$ haben wir im Falle a)

$$(20)\qquad \begin{cases} \sqrt{a} = \dfrac{1 - p^{\frac{1}{2}}}{2\cos\frac{\pi}{m}}, \\ b = p^{\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

im Falle b)

$$(21)\qquad \begin{cases} \sqrt{a} = \dfrac{1 + p^{\frac{1}{2}}}{2\cos\frac{\pi}{m}}, \\ -b = p^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

$m = n = 2$ ist unmöglich; dagegen liefert $m = 2$, das nur im Falle a) zulässig ist,

$$(22)\qquad \begin{cases} \sqrt{a} = \dfrac{p^{-\frac{1}{2}} - p^{\frac{1}{2}}}{2\cos\frac{\pi}{n}}, \\ b = 1. \end{cases}$$

Eine parabolische Periode giebt nichts Bemerkenswerthes; *zwei* dagegen geben für a)

$$(23)\qquad \begin{cases} \sqrt{a} = \dfrac{1 - p^{\frac{1}{2}}}{2p^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{p^{-\frac{1}{2}} - 1}{2}, \\ b = p^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

für b)

$$(24)\qquad \begin{cases} \sqrt{a} = \dfrac{1+p^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{p^{-\frac{1}{2}}+1}{2}, \\ -b = p^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Die Untersuchung weiterer $\varphi(p^k x)$ mag vorläufig unterbleiben; es wird in der Folge nöthig, die Behandlung positiver und negativer b bei positiven a vollständig zu trennen, da die entsprechenden Gruppen und deren geometrische Darstellungen wesentliche Verschiedenheiten aufweisen.

§ 3.

Gruppen mit positivem a und positivem b.

1. Das weitere Studium der bis jetzt wenigstens nicht als unmöglich erkannten Gruppen hängt wieder mit der Construction einer geeigneten Gebietseintheilung der Ebene der complexen Zahlen zusammen, die wir zunächst für positive a und b vornehmen. Der Periode $y = px$ werden bei den Begrenzungen der Periodicitätsparcellen Kreise auftreten, die den Nullpunkt einschliessen — wir werden denselben auch als deren Mittelpunkt annehmen dürfen; im letzteren Falle sind ihre Radien cp^k, worin c noch geeignet gewählt werden kann. Der Periode $y = \varphi_1(x)$ halber führen wir ganz analog wie Band XXI, pag. 62 einen primären und einen secundären Fundamentalkreis ein; der secundäre Kreis soll durch $y = \varphi_1(x)$ in den primären transformirt werden, während durch diese Periode ein innerhalb, resp. ausserhalb des secundären Kreises gelegener Punkt in einen ausserhalb, resp. innerhalb des primären gelegenen übergeführt wird, oder auch das umgekehrte Verhältniss statthat. Ist $\varphi_1(x)$ elliptisch, so sollen sich beide Fundamentalkreise in denjenigen Punkten schneiden, die durch $\varphi_1(x)$ in sich selbst transformirt werden; ist $\varphi_1(px)$ ebenfalls elliptisch, so wird die Abbildung des secundären Kreises mittelst $y = p^{-1}x$, die durch $\varphi_1(px)$ in den primären Kreis übergeführt wird, mit dem letzteren die Punkte gemeinsam haben, die durch $\varphi_1(px)$ in sich selbst transformirt werden. Bei parabolischen Perioden gehen die Schnittpunkte paarweise in einen Berührungspunkt über. Der primäre Kreis enthält demnach im dritten Hauptfalle 4 festbestimmte Punkte, die eventuell theilweise zusammenfallen, und ist daher nebst dem secundären Kreise vollkommen bestimmt. Berechnen wir nach diesen Angaben Radius und Lage dieser Kreise, so werden sich dann die gefundenen Beziehungen ohne Weiteres auf die beiden andern Hauptfälle übertragen lassen.

2. Die 4 Punkte, durch die der primäre Kreis hindurchgeht (dessen

Mittelpunkt offenbar in der Axe der reellen Zahlen liegt), sind nach dem Vorhergehenden die Wurzeln der beiden Gleichungen

$$x_1 = 1 - \frac{a}{x_1 - b}$$

und

$$x_2 = 1 - \frac{a}{px_2 - b},$$

also

$$(1) \qquad x_1 = \frac{1 + b \pm i\sqrt{4a - (1-b)^2}}{2}$$

und

$$(2) \qquad x_2 = \frac{b + p \pm i\sqrt{4ap - (b-p)^2}}{2p}.$$

Bezeichnen wir den Radius des primären Kreises mit r, den Abstand seines Centrums vom Nullpunkte mit d, den Abstand der Punkte x_1 und x_2 von der Abscissenaxe mit ξ_1 und ξ_2, den Abstand ihrer Projectionen auf diese von dem Centrum des Kreises mit η_1 und η_2, so haben wir

$$(3) \qquad \xi_1 = \frac{\sqrt{4a - (1-b)^2}}{2}, \quad \xi_2 = \frac{\sqrt{4ap - (b-p)^2}}{2p},$$

$$(4) \qquad \eta_1 = d - \frac{1+b}{2}, \quad \eta_2 = \frac{b+p}{2p} - d;$$

ferner

$$(5) \qquad r^2 = \eta_1^2 + \xi_1^2 = \eta_2^2 + \xi_2^2,$$

woraus

$$\xi_2^2 - \xi_1^2 = (\eta_1 + \eta_2)(\eta_1 - \eta_2)$$

oder

$$\eta_1 - \eta_2 = \frac{\xi_2^2 - \xi_1^2}{\eta_1 + \eta_2}$$

folgt. Setzen wir hierin

$$(6) \qquad \eta_1 + \eta_2 = \frac{b}{2p}(1-p),$$

so wird daraus

$$(7) \qquad \eta_1 - \eta_2 = \frac{2p(\xi_2^2 - \xi_1^2)}{b(1-p)},$$

und die Zusammenstellung von (6) und (7) liefert

$$(8) \qquad \eta_1 = \frac{p(\xi_2^2 - \xi_1^2)}{b(1-p)} + \frac{b}{4p}(1-p),$$

was mit (3) und (4) zusammen

$$(9) \qquad r = \frac{\sqrt{a(a+b)}}{b} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b}},$$

$$(10) \qquad d = \frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + 1$$

giebt, Ausdrücke, die nur von dem Quotienten $\frac{a}{b}$ abhängen.

3. Die Punkte, in denen der primäre Kreis die Axe der reellen Zahlen schneidet, sind

$$\frac{a+b}{b} \pm \frac{\sqrt{a(a+b)}}{b};$$

wendet man die Transformationen $y = \varphi_{-1}(x)$ auf dieselben an, so findet man die Schnittpunkte

$$a + b \pm \sqrt{a(a+b)}$$

des secundären Kreises mit dieser Axe; Radius und Centraldistanz (vom Nullpunkte) dieses Kreises sind daher

(11) $$r' = \sqrt{a(a+b)} \quad \text{und} \quad d' = a + b.$$

Construirt man noch die Abbildungen dieser beiden Kreise mittelst $y = p^k x$, so erhält man eine fortlaufende Reihe von Kreisen, deren Radien und Centraldistanzen sich verhalten wie $\left(\text{man beachte } p^{\frac{1}{2}} \leqq b \leqq 1\right)$

$$\ldots p^2, \frac{p^2}{b}, p, \frac{p}{b}, 1, \frac{1}{b}, \frac{1}{bp}, \frac{1}{p^2}, \ldots$$

4. Die Bedingung dafür, dass sich der durch (9), (10) und (11) bestimmte primäre und secundäre Kreis schneiden, berühren oder nicht schneiden, ist durch die Ungleichheiten

$$a + b + \sqrt{a(a+b)} \gtreqless \frac{a+b}{b} - \frac{\sqrt{a(a+b)}}{b}$$

gegeben, die man leicht in

$$4a \gtreqless (1-b)^2$$

transformirt. Die 3 Fälle treten also ein, jenachdem $\varphi_1(x)$ elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch ist.

Zwischen dem primären Kreise und der Abbildung des secundären durch $y = p^{-1}$ findet Schneiden, Berühren oder Nichtschneiden statt, jenachdem

$$\frac{a+b}{b} + \frac{\sqrt{a(a+b)}}{b} \gtreqless \frac{a+b}{p} - \frac{\sqrt{a(a+b)}}{p}$$

oder

$$4a \gtreqless p(1 - bp^{-1})^2$$

ist, d. h. je nachdem $\varphi_1(px)$ elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch ist. Hieraus geht hervor, dass (9), (10) und (11) nicht bloss in dem dritten Hauptfalle, sondern allgemein zur Bestimmung der beiden Fundamentalkreise dienen können.

5. Die Bedingung, unter der die Fundamentalkreise ihre Abbildungen durch $y = px$ schneiden oder berühren, ist

$$p(a+b) + p\sqrt{a(a+b)} \geqq a + b - \sqrt{a(a+b)}$$

oder

$$(1+p)\sqrt{a(a+b)} \geqq (1-p)(a+b),$$

aus der durch Quadriren und Vereinfachen

$$(12) \qquad 4ap \geqq b(1-p)^2$$

oder

$$(13) \qquad 1 \geqq \cos^2\frac{\pi}{m} + \cos^2\frac{\pi}{n} + \left(p^{-\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{2}}\right)\cos\frac{\pi}{m}\cos\frac{\pi}{n}$$

hervorgeht. Da $p^{-\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{2}} > 2$ ist, so ist umsomehr

$$1 > \left(\cos\frac{\pi}{m} + \cos\frac{\pi}{n}\right)^2$$

oder

$$(14) \qquad 1 > \cos\frac{\pi}{m} + \cos\frac{\pi}{n},$$

was nur für $m = 2$ möglich ist. In diesem Falle ist der primäre Kreis mit dem secundären identisch. Die neuen Schnittpunkte fallen mit den Punkten x_2 zusammen.

Dass dieser Fundamentalkreis mit seiner Abbildung durch $y = p^2x$ keinen Punkt gemeinsam hat, ist aus der Unmöglichkeit der Ungleichung (vgl. § 2, (22))

$$p^2(a+b) + p^2\sqrt{a(a+b)} \geqq a + b - \sqrt{a(a+b)}$$

oder

$$4ap^2 \geqq b(1-p^2)^2$$

oder

$$p \geqq (1+p)^2\cos^2\frac{\pi}{n}$$

oder

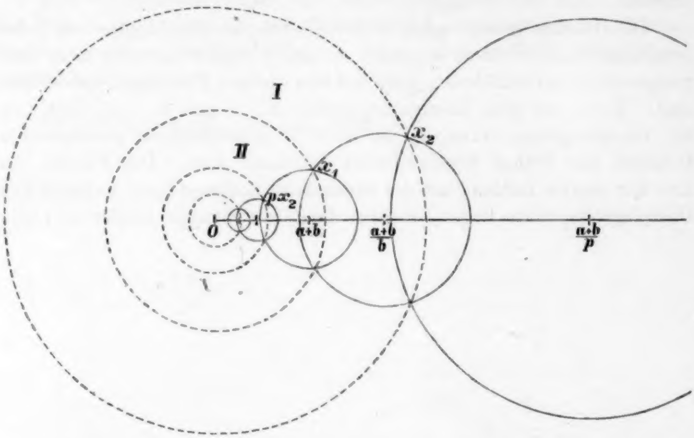
$$0 \geqq 1 + p^2 + p\cos\frac{2\pi}{n}$$

ersichtlich.

Weiter geht aus dieser Untersuchung hervor, dass, $m = 2$ ausgenommen, die Periode $\varphi_1(p^{-1}x)$ nicht elliptisch oder parabolisch sein kann, da dies das Schneiden oder Berühren des primären Kreises mit der Abbildung des secundären durch $y = px$ erfordern würde, was aber ohne ein Schneiden des primären Kreises mit seiner Abbildung durch $y = px$ nicht möglich ist.

6. Um einen Ausgangsraum (zunächst für den dritten Hauptfall) vollständig abzugrenzen, müssen wir ein Kreissystem hinzufügen, welches den Nullpunkt zum Mittelpunkte hat und dessen Glieder durch $y = p^k x$ in einander übergehen. Je zwei benachbarte Kreise des Systems umgrenzen in der That mit der äusseren Grenze des durch die Fundamentalkreise nebst ihren Abbildungen durch $y = p^k x$ erzeugten Complexes zusammen einen Ausgangsraum; doch muss hervorgehoben

werden, dass ohne weitere Festsetzung die Kreise des Systems keineswegs in ihrem *Gesammtumfange* als Parcellengrenzen dienen können, sondern dass nur einzelne Theile derselben zur Verwendung kommen. Um ein wirklich organisch zusammenhängendes Begrenzungssystem herzustellen, beschreibt man vom Nullpunkte aus Kreise durch die Punkte $p^k x_1$ und $p^k x_2$; je zwei nebeneinander und ausserhalb des Fundamentalkreissystems liegende Ringstücke (z. B. in nebenstehender Figur die Gebiete I und II) liefern dann zusammengenommen einen



Ausgangsraum, dessen Abbildungen die gesammte Ebene bedecken. Nach (1) und (2) berechnet man für die Radien der Kreise, die durch x_1 und x_2 gehen,

$$(15) \qquad \varrho_1 = \sqrt{a+b}, \quad \varrho_2 = p^{-\frac{1}{2}}\sqrt{a+b}.$$

Dieselben halbiren in x_1 und x_2 die Winkel $\frac{2\pi}{m}$ und $\frac{2\pi}{n}$, welche hier durch das Fundamentalkreissystem gebildet werden. Bezeichnet man nämlich beispielsweise den Winkel, welchen der Kreis mit dem Radius ϱ_1 mit dem secundären Fundamentalkreise bildet, durch α, so berechnet man aus dem Dreiecke 0, $a+b$, x_1 (vgl. § 2 (5))

$$(a+b)^2 = a + b + a\,(a+b) - 2(a+b)\sqrt{a}\cos\alpha$$

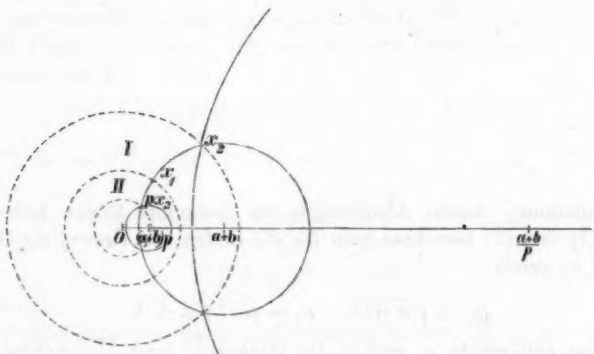
oder

$$\cos\alpha = \frac{1-b}{2\sqrt{a}} = \cos\frac{\pi}{m}.$$

Bei der angewandten Zerlegung des Ausgangsraumes in zwei Theile können alle vorkommenden Kreise in ihrem ganzen Umfange als Grenzlinien benutzt werden.

7. Man überzeugt sich nun leicht, dass der aus I und II (in der letzten Figur) zusammengesetzte Ausgangsraum durch die Perioden $y = px$, $y = p^{-1}x$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_1(px)$ und $p\varphi_1(x)$ (letztere durch Transformation aus $\varphi_1(px)$ hervorgegangen) in Parcellen transformirt wird, die sich theils an die Grenzlinien des Ausgangsraumes anlegen, theils um die Punkte x_1, x_2, px_2 gruppiren, ohne dass eine Ueberdeckung stattfindet; die genauere Beschreibung dieser Verhältnisse bei ganz analogen Gruppen überhebt uns der Aufgabe, noch weiter auf diesen Gegenstand einzugehen.

Die Gesammtgruppe enthält zwei Gattungen von elliptischen (oder parabolischen) Perioden, die nach m- und n-facher Iteration zum Ausgangswerthe zurückführen, während alle übrigen Perioden hyperbolisch sind. Auch aus den Elementarperioden $\varphi_1(x)$ und $\varphi_1(px)$ lässt sich die Gesammtgruppe erzeugen, die im Falle vorkommender parabolischer Perioden mit früher beschriebenen identisch wird. Die Punkte der Axe der reellen Zahlen, auf der sämmtliche nothwendigen wesentlichen Unstetigkeitspunkte liegen, werden durch die Gruppe wieder in reelle



Punkte transformirt. Die durch die Abscissenaxe getrennten Halbebenen correspondiren durch Periodicität nicht miteinander, wenn schon auf der negativen Seite der Axe keine nothwendige Stetigkeitsunterbrechung vorhanden ist.

Der bemerkenswerthe Specialfall $m = 2$, bei dem der primäre und secundäre Fundamentalkreis zusammenfallen, ist durch vorstehende Figur dargestellt.

7. Die Gebietseintheilung für den ersten und zweiten Hauptfall geht aus der beschriebenen dadurch hervor, dass sich die Kreise nur theilweise oder gar nicht schneiden; die Grössenbestimmungen bleiben dieselben, wie in (9), (10), (11) und (15). Bei der vollständigen Analogie mit früheren Gruppen ist eine besondere Darstellung überflüssig.

Beim zweiten Hauptfalle tritt nur *eine* Gattung von elliptischen oder parabolischen Perioden auf, während im ersten alle Perioden hyperbolisch sind.

Der weit merkwürdigere und mannichfaltigere Fall $b < 0$, ferner der Fall $a < 0$, sowie die auf eigenthümliche Schwierigkeiten führenden verwandten complexen Gruppen mögen einer späteren Darstellung vorbehalten bleiben.

Frankfurt a. M., im Juli 1884.

Ueber Flächen 2. Grades, welche zu sich selbst polar sind.

Von

Rudolf Sturm in Münster i./W.

1. *Wenn eine Fläche 2. Grades $\mathfrak{A}^2$ in Bezug auf eine andere $\mathfrak{B}^2$ zu sich selbst polar ist, so berühren sich beide längs eines Kegelschnitts*).*

In der That, es sei P ein Punkt der Schnittcurve beider Flächen, p die Tangente an diese Curve in ihm, p' die (reciproke) Polare von p nach $\mathfrak{B}^2$; so muss dieselbe $\mathfrak{B}^2$ ebenfalls in P berühren, und weil $\mathfrak{A}^2$ nach $\mathfrak{B}^2$ zu sich selbst polar ist, muss p' auch $\mathfrak{A}^2$ tangiren, also in P. Die beiden Flächen haben demnach in P zwei Tangenten, mithin auch die Berührungsebene gemein.

Es sei β die Ebene des Berührungskegelschnittes und B ihr Pol, der Scheitel des gemeinsamen Tangentialkegels.

Ein Strahl b durch B treffe die beiden Flächen in A_1, A_2; B_1, B_2. Die Tangentialebene von $\mathfrak{A}^2$, welche zu A_1 nach $\mathfrak{B}^2$ polar ist, muss durch die Polare von b nach $\mathfrak{B}^2$ gehen; diese ist aber auch Polare von b nach $\mathfrak{A}^2$ und demnach der Schnitt der Tangentialebene von $\mathfrak{A}^2$ in A_1 mit β; folglich ist jene Tangentialebene die in A_2 berührende. Also jeder Punkt von $\mathfrak{A}^2$ und der Berührungspunkt der zu ihm nach $\mathfrak{B}^2$ polaren Tangentialebene liegen mit B in gerader Linie; und jede Tangentialebene von $\mathfrak{A}^2$ und die in ihrem Pole nach $\mathfrak{B}^2$ berührende Ebene schneiden sich auf β.

Jeder Strahl durch B schneidet $\mathfrak{A}^2$ und $\mathfrak{B}^2$ in vier harmonischen Punkten; von jedem Strahl in β gehen an sie vier harmonische Berührungsebenen.

Ferner ergiebt sich, dass *auch $\mathfrak{B}^2$ zu sich selbst polar ist in Bezug auf $\mathfrak{A}^2$.*

2. Die Punkte A_1, A_2 und B_1, B_2 sind harmonisch zu B und (b, β); also bilden B_1, B_2 das gemeinsame Paar der beiden Involutionen, welche B und (b, β), bez. A_1, A_2 zu Doppelpunkten haben.

*) Vergl. eine Bemerkung in der Note des Herrn Tarry (Nouv. Ann. Ser. III., Bd. III, S. 270), durch welche ich zu der folgenden Untersuchung angeregt worden bin.

Folglich sind B_1, B_2 reell, wenn A_1, A_2 imaginär sind, und wenn A_1, A_2 reell sind, so greifen sie und B, (b, β) in einander über, also sind B_1, B_2 imaginär.

Von den beiden Schnittpunktenpaaren jedes Strahls durch B mit $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$ ist stets eins, aber nur eins reell.

Ist also $\mathfrak{A}^2$ reell und schneidet β sie reell, so treffen nur die Strahlen durch B, welche $\mathfrak{A}^2$ imaginär schneiden, $\mathfrak{B}^2$ reell; sodass die beiden Flächen reell sind und auf verschiedenen Seiten des gemeinsamen Tangentialkegels liegen.

Schneidet β die $\mathfrak{A}^2$ imaginär und also jeder Strahl durch B die $\mathfrak{A}^2$ reell, so ist $\mathfrak{B}^2$ imaginär, und ist $\mathfrak{A}^2$ imaginär (mit reellem Polarsystem), so ist $\mathfrak{B}^2$ reell.

3. Es sei $\mathfrak{A}^2$ eine feste Fläche eines Büschels sich längs eines Kegelschnitts berührender Flächen 2. Grades; so befindet sich die zu jeder andern Fläche $\mathfrak{C}^2$ desselben in Bezug auf $\mathfrak{A}^2$ polare $\mathfrak{D}^2$ im Büschel, weil die ∞^3 gemeinsamen Polartetraeder von $\mathfrak{A}^2$ und $\mathfrak{C}^2$ auch zu $\mathfrak{D}^2$ gehören. Durch diese Paare $\mathfrak{C}^2$, $\mathfrak{D}^2$ entsteht im Büschel eine Involution; Doppelelemente derselben (sind die in Bezug auf sich selbst zu sich selbst polare Fläche $\mathfrak{A}^2$ und die Fläche $\mathfrak{B}^2$, die zu sich selbst nach $\mathfrak{A}^2$ polar ist oder nach welcher $\mathfrak{A}^2$ zu sich selbst polar ist*).

4. *Für die gegebene Fläche $\mathfrak{A}^2$ liefert somit jede Ebene β (und ihr Pol B) einen Büschel sie längs des Schnittes von β berührender Flächen und darin stets eine Fläche $\mathfrak{B}^2$, in Bezug auf welche $\mathfrak{A}^2$ zu sich selbst polar ist oder welche in Bezug auf $\mathfrak{A}^2$ zu sich selbst polar ist;* dieselbe ist reell, wenn $\mathfrak{A}^2$ imaginär ist (mit reellem Polarsystem) oder wenn $\mathfrak{A}^2$ reell ist und von β reell geschnitten wird; hingegen imaginär (mit reellem Polarsysteme), wenn $\mathfrak{A}^2$ reell ist, aber von β imaginär geschnitten wird.

Das System der Flächen 2. Grades, in Bezug auf welche eine gegebene Fläche $\mathfrak{A}^2$ zu sich selbst polar ist oder, was nach Obigem dasselbe ist, *welche nach $\mathfrak{A}^2$ zu sich selbst polar sind, ist dreifach unendlich.*

Zwei solche Systeme haben im Allgemeinen keine Fläche gemein.

5. Sei B_1 ein beliebiger Punkt, β_1 seine Polarebene nach $\mathfrak{A}^2$, ferner $\mathfrak{B}^2$ eine durch B_1 gehende und also auch β_1 tangirende Fläche

*) Bezogen auf eins der genannten Polartetraeder ist die Gleichung einer Fläche des Büschels:

$$\lambda x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0;$$

ihre Polarfläche in Bezug auf die Fläche λ_0 des Büschels ist:

$$\frac{\lambda_0^2}{\lambda} x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0;$$

also ist jede der beiden Flächen λ_0 und $-\lambda_0$ in Bezug auf die andere zu sich selbst polar.

dieses Systems, welche sich vermittelst der Ebene β und ihres Pols B ergeben habe; B_2 der zweite Schnitt von BB_1 mit $\mathfrak{B}^2$, der auf β_1 liegen muss; B und (BB_1, β) sind auch harmonisch zu B_1 und $B_2 = (BB_1, \beta_1)$ und zu den Schnitten von BB_1 mit $\mathfrak{A}^2$; folglich liegen jene auf der Fläche $\mathfrak{B}_1{}^2$, die zu sich selbst nach $\mathfrak{A}^2$ polar ist und vermittelst β_1 und B_1 sich ergiebt, und β ist deren Tangentialebene in (BB_1, β).

Ist demnach ein Punkt B_1 gegeben und β_1 seine Polarebene nach $\mathfrak{A}^2$, so ist die nach $\mathfrak{A}^2$ zu sich selbst polare Fläche $\mathfrak{B}_1{}^2$, welche sich bei β_1 und B_1 ergiebt, der Ort der Punkte B und die Enveloppe der Ebenen β, bei denen sich die nach $\mathfrak{A}^2$ zu sich selbst polaren Flächen $\mathfrak{B}^2$ (oder die Flächen $\mathfrak{B}^2$, nach denen $\mathfrak{A}^2$ zu sich selbst polar ist), welche durch B_1 gehen und deshalb β_1 tangiren oder β_1 tangiren und deshalb durch B_1 gehen.

6. Aus der in Nr. 1 gefundenen Lage eines Punktes A_1 von $\mathfrak{A}^2$ und des Berührungspunktes der ihm nach $\mathfrak{B}^2$ polaren Tangentialebene ergiebt sich, dass *die Fläche $\mathfrak{A}^2$ auch zu sich selbst collinear ist* (mit B als Centrum und β als Ebene der Collineation) und zwar so, dass je die genannten Punkte, so wie auch die ihnen zugehörigen Berührungsebenen sich entsprechen. Und umgekehrt, *hat man $\mathfrak{A}^2$ vermittelst eines Punktes B und seiner Polarebene β zu sich selbst (perspectiv-involutorisch) collinear gemacht, so ist sie auch zu sich selbst polar und zwar sind je ein Punkt der Fläche und die Tangentialebene des ihm in der Collineation entsprechenden Punktes polar;* die Basisfläche der Polarität ist eine gewisse von den Flächen, welche $\mathfrak{A}^2$ längs des Schnittes von β berühren.

7. Zwei Tangenten von $\mathfrak{A}^2$, welche nach einer $\mathfrak{B}^2$ zu einander polar sind, berühren in Punkten A_1, A_2, welche mit B in gerader Linie liegen, während die zugehörigen Tangentialebenen α_1, α_2 sich auf β schneiden. Die Ebenen, welche sie mit $b = BA_1A_2$ verbinden, sind conjugirt in Bezug auf $\mathfrak{A}^2$ und $\mathfrak{B}^2$. Zu jeder der beiden Geraden von $\mathfrak{A}^2$, die durch A_1 gehen, ist die durch A_2 gehende aus der andern Schaar polar; so dass je die zwei Geraden von $\mathfrak{A}^2$, deren Verbindungsebene durch B geht (oder deren Schnittpunkt auf β liegt), zugleich polar und entsprechend in der Collineation sind.

8. Es seien b_1, b_2 zwei Polaren in Bezug auf $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$ eine zu sich selbst nach $\mathfrak{A}^2$ polare Fläche, welche b_1 und deshalb auch b_2 tangirt. Sie sei construirt vermittelst B und β. Die Gerade b aus B, welche b_1, b_2 trifft, geht nach Nr. 7 durch die beiden Berührungspunkte B_1, B_2 von b_1, b_2. Demnach sind diese Punkte, in denen sie b_1, b_2 schneidet, harmonisch zu B und (b, β).

Construirt man folglich auf allen Strahlen b der Congruenz, deren Leitlinien b_1, b_2 sind, die Doppelpunkte der Involution, die

durch diese Schnitte B_1, B_2 mit b_1, b_2 und durch die Schnitte A_1, A_2 mit $\mathfrak{A}^2$ constituirt wird, so erhält man die Punkte B, vermittelst deren sich die Flächen $\mathfrak{B}^2$ ergeben, welche b_1 (und b_2) tangiren; die duale Construction führt zu den zugehörigen Ebenen β. Lassen wir einen Punkt sich auf einer Geraden c bewegen, so bilden die von ihm ausgehenden Geraden b die eine Schaar des Hyperboloids $[cb_1b_2]$ und der jenem Punkte zugeordnete vierte harmonische Punkt in Bezug auf die Schnitte mit b_1, b_2 durchläuft eine Gerade c' aus der Leitschaar. Der vierte harmonische Punkt aber in Bezug auf die Schnitte mit $\mathfrak{A}^2$ erzeugt eine cubische Raumcurve auf $[cb_1b_2]$; sie entsteht durch 3 projective Ebenenbüschel, von denen zwei diejenigen sind, welche die Regelschaar von $[cb_1b_2]$ erzeugen, während der dritte der Büschel der Polarebenen der Punkte von c nach $\mathfrak{A}^2$ ist. Diese Curve trifft die Axen der beiden ersten Büschel zweimal, mithin auch die zu derselben Schaar gehörige c'. Demnach giebt es zwei Punkte auf c, von denen jeder auf der von ihm ausgehenden Geraden b den nämlichen vierten harmonischen in Bezug auf die Schnitte mit b_1, b_2 und in Bezug auf diejenigen mit $\mathfrak{A}^2$ hat; also ist die oben erwähnte Fläche der Punkte B von der 2. Ordnung und die der zugehörigen Ebenen β von der 2. Classe. Dies sind in diesem Falle nicht identische Flächen; denn fielen sie in eine Fläche zusammen, so wäre diese zu sich selbst polar nach $\mathfrak{A}^2$ und hätte in jedem Punkte B, den sie mit $\mathfrak{A}^2$ gemein hat, auch die nämliche Tangentialebene wie $\mathfrak{A}^2$. Auf dem Strahle b aus B nach b_1, b_2 fällt dann aber der eine Doppelpunkt B mit einem der Punkte A_1, A_2 zusammen; d. h. diese vereinigen sich und b tangirt $\mathfrak{A}^2$; der andere Doppelpunkt ist der vierte harmonische von B in Bezug auf die Schnitte mit b_1, b_2, die für einen beliebigen gemeinsamen Punkt beider Flächen beide von B verschieden sind; also berührt b nicht die jetzige Fläche.

Die Punkte B, vermittelst deren die Flächen $\mathfrak{B}^2$ sich ergeben, welche nach der gegebenen Fläche $\mathfrak{A}^2$ zu sich selbst polar sind und eine gegebene Gerade b_1 (und deren Polare b_2 nach $\mathfrak{A}^2$) tangiren, erzeugen eine Fläche 2. Grades B^2, *die in diesem Falle nicht zu den Flächen $\mathfrak{B}^2$ gehört; die zugehörigen Ebenen β umhüllen ihre (von ihr verschiedene) Polarfläche nach $\mathfrak{A}^2$.*

Die Flächen B^2 sind vierfach unendlich.

9. Beide Flächen berühren einander und die Fläche $\mathfrak{A}^2$ in den 4 Punkten, wo diese von den beiden Geraden b_1, b_2 getroffen wird, und es haben also alle drei Flächen die 4 Geraden gemein, welche diese 4 Punkte verbinden. In der That, ist B der eine Schnitt von b_1 mit $\mathfrak{A}^2$, so liegen die Geraden b in der Ebene von ihm nach b_2, welche, weil b_2 zu b_1 polar ist nach $\mathfrak{A}^2$, in B diese Fläche $\mathfrak{A}^2$ berührt; demnach fallen auf jeder von ihnen in B die beiden Punkte

A_1, A_2 und der Schnitt mit b_1 zusammen, also vereinigen sich auch die beiden Doppelpunkte der Involution in B; d. h. die Gerade b tangirt in B auch die Fläche B^2 und, wie die Polarisirung ergiebt, auch die Polarfläche.

Da die vier Schnitte nicht in dieselbe Ebene fallen, so sieht man nochmals, dass B^2 sich nicht mit $\mathfrak{A}^2$ längs eines Kegelschnitts berührt.

10. Weil sich aber doch als Ort der Punkte B, die zu Flächen $\mathfrak{B}^2$ führen, welche die Gerade b_1 tangiren, auch eine Fläche 2. Ordnung ergeben hat, *so haben wir*, dies mit dem Resultate von Nr. 5 combinirend, *folgende interessante Eigenschaft des dreifach unendlichen in sich dualen Systems von Flächen* $\mathfrak{B}^2$, *welche nach* $\mathfrak{A}^2$ *zu sich selbst polar sind (oder nach denen* $\mathfrak{A}^2$ *zu sich selbst polar ist).*

Welches auch die Zerlegung von 3 *in* 3 *Summanden* h, i, k *ist, das System hat stets* 8 *Flächen, welche durch* h *gegebene Punkte gehen,* i *gegebene Geraden und* k *gegebene Ebenen berühren. Oder alle* 10 *dreifachen Charakteristiken*

$$\mu^3,\ \mu^2\nu,\ \mu^2\varrho,\ \mu\nu^2,\ \mu\nu\varrho,\ \mu\varrho^2,\ \nu^3,\ \nu^2\varrho,\ \nu\varrho^2,\ \varrho^3$$

dieses Systems sind 8. —

Die Besprechung der analogen Sätze über zu sich selbst polare Kegelschnitte erscheint unnöthig.

Münster i/W., Anfang August 1884.

[Weitere Untersuchungen haben mir gezeigt, dass noch auf èine andere Weise zu einer gegebenen Fläche 2. Grades sich andere Flächen 2. Grades ergeben, in Bezug auf welche sie zu sich selbst polar ist. Wiederum ist dann auch jede dieser Flächen zu sich selbst polar in Bezug auf die gegebene; das System derselben ist sogar vierfach unendlich: durch jedes der windschiefen Vierseite auf der gegebenen Fläche geht eine von diesen Flächen. In dem Falle, dass die beiden Flächen $\mathfrak{A}^2$ und $\mathfrak{B}^2$ sich in einem solchen Vierseite durchschneiden, wird der Beweis in Nr. 1 illusorisch. Ich behalte mir eine weitere Veröffentlichung hierüber vor.

Neujahr 1885.]

Ueber den Inhalt von Punktmengen.

Von

Axel Harnack in Dresden.

Die allgemeine Definition, welche ich für discrete Punktmengen innerhalb eines geschlossenen linearen Intervalles gegeben habe, will ich im folgenden durch eine Reihe von Erläuterungen und Lehrsätzen entwickeln. Diese Sätze ergänzen theils die Theoreme, welche Herr G. Cantor inzwischen über den gleichen Gegenstand auf Grund einer etwas anderen Definition veröffentlicht hat (Math. Ann. Bd. 21 und 23), theils fallen sie mit diesen zusammen. Ich formulire dieselben für Punktmengen innerhalb des linearen Continuums der geradlinigen Strecke, sie gelten aber auch nebst ihren Beweisen innerhalb höherer ebener Mannigfaltigkeiten, wenn die Definition entsprechend erweitert wird. Auf die Möglichkeit und die Art dieser Erweiterung, die zunächst in der Theorie der Doppelintegrale nothwendig wird, habe ich schon in meiner Schrift: „Elemente der Differential- und Integralrechnung, Leipzig 1881" hingewiesen.

Eine Punktmenge innerhalb eines linearen Intervalles von endlicher Länge heisst discret (vom Inhalt Null), wenn sich sämmtliche Punkte in eine *endliche* Anzahl von Intervallen einschliessen lassen, deren Summe s beliebig klein gemacht werden kann, mag dabei auch die Anzahl der Intervalle über jede Grenze hinaus wachsen. Letzteres tritt immer ein, wenn man es mit einer unendlichen Menge von Punkten zu thun hat.

Um für eine im Intervall von der Länge l gegebene Menge überhaupt den Inhalt, d. h. die Grenze ihrer Intervallsumme zu bestimmen, kann man folgendermassen vorgehen. Ist die Punktmenge nicht überall dicht im ganzen Intervall (hierbei würde die Grösse l selbst die Grenze sein), so fixire man zunächst eine Länge, etwa $\frac{l}{2}$, und construire die Intervalle, welche gleich oder grösser sind als $\frac{l}{2}$, und keinen Punkt der Menge in ihrem Innern enthalten. Ist solch ein Intervall vorhanden, und hat man dasselbe fixirt, so scheide man aus den übrigen Theilen des Intervalles l diejenigen aus, welche gleich oder grösser

sind als $\frac{l}{3}$, und keinen Punkt der Menge in ihrem Innern enthalten. Man erkennt allgemein: es giebt immer nur eine endliche Anzahl von Intervallen, welche gleich oder grösser sind als $\frac{l}{n}$, und keinen Punkt der gegebenen Menge in ihrem Innern enthalten, wobei n irgend eine ganze positive Zahl ist. Die Gesammtlänge der auf diese Weise ausgeschiedenen Intervalle, welche gleich oder grösser sind als $\frac{l}{n}$, sei gleich N; so liegen die Punkte der Menge (abgesehen von der endlichen Anzahl derer, die etwa mit den Endpunkten zweier an einander stossender, ausgeschiedener Intervalle zusammenfallen, und isolirte Punkte sind), im Innern oder an den Grenzen einer endlichen Anzahl von Intervallen, deren Gesammtlänge $l - N$ ist. Sie können also auch in eine endliche Anzahl von Intervallen *eingeschlossen* werden, deren Gesammtlänge von $l - N$ beliebig wenig abweicht. Man braucht nämlich bloss die herausgehobenen Intervalle beliebig wenig zu verkleinern, da es sich hierbei immer nur um eine endliche Anzahl von Intervallen handelt. Der Grenzwerth der Differenz $l - N$ für $n = \infty$ ist die gesuchte Intervallgrenze. Die Punktmenge ist folglich eine discrete, falls $\lim N = l$ ist.

Dieselbe Methode kann bei der Inhaltsbestimmung innerhalb begrenzter ebener Mannigfaltigkeiten höherer Dimension, die man durch ein sphärisches Gebilde vom Radius l vollständig umschlossen hat, befolgt werden, indem man successive sphärische Gebilde ausscheidet, deren Radius gleich oder grösser ist als $\frac{l}{n}$, und welche keinen Punkt der gegebenen Menge in ihrem Innern enthalten.

Aus der Zusammensetzung mehrerer discreter Mengen in endlicher Anzahl folgt immer wieder eine discrete Menge. Dagegen gilt der Satz nicht mehr ohne weiteres, sobald man eine unendliche Reihe von discreten Mengen hat; wie schon das Beispiel der arithmetisch rationalen Zahlenreihe zwischen 0 und 1 lehrt, die aus den Mengen

$$P_1 \equiv \left(\tfrac{1}{2}\right), \quad P_2 \equiv \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right), \quad P_3 \equiv \left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}\right), \quad P_4 \equiv \left(\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}\right), \ldots$$

zusammengesetzt werden kann.

Um Missverständnisse zu vermeiden, bemerke ich hier gelegentlich, dass in gewissem Sinne jede „abzählbare" Punktmenge die Eigenschaft hat, dass sich sämmtliche Punkte in Intervalle einschliessen lassen, deren Summe beliebig klein ist. So kann man z. B. alle rationalen Zahlen zwischen 0 und 1, trotzdem dass sie auf der Strecke überall dicht liegen, mit Intervallen umschliessen, deren Summe beliebig klein ist. Denn hat man eine abzählbare Punktmenge $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ so umschliesse man die Punkte bezüglich mit Intervallen von der

Länge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ und wähle diese Grössen derart, dass $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots + \varepsilon_n + \cdots$ kleiner wird als eine beliebig kleine Grösse δ. Führt man diesen Process z. B. bei den oben genannten rationalen Zahlen aus, und betrachtet man dabei von jedem Intervalle ε immer nur die Strecken, welche nicht schon in vorhergehende Intervalle hineinfallen, so gelangt man schliesslich zu einer Bedeckung der Länge von 0 bis 1 mit einer unendlichen Reihe von auseinander liegenden Intervallen, deren Summe kleiner ist als δ. Die Punkte, welche nicht von diesen Intervallen überdeckt werden, liegen zwar in keinem Intervalle überall dicht, bilden aber eine Punktmenge, deren Inhalt grösser ist als $1 - \delta$. (Math. Annal. Bd. 19, pag. 239.)

Es liegt die Frage nahe: Wenn eine Punktmenge l durch eine *unendliche* Reihe von Intervallen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ eingeschlossen ist, die ganz aus einander liegen (höchstens in ihren Endpunkten zusammenstossen), und deren Summe $s < l$ ist, unter welchen Bedingungen kann man dann folgern, dass sie auch in eine *endliche* Anzahl von Intervallen eingeschlossen werden kann, deren Summe beliebig wenig von s abweicht? Zweierlei ist dazu erforderlich. Hebt man aus dem Intervall l die Intervalle (ε) heraus, so muss eine abzählbare Reihe von Intervallen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ nachbleiben, und die Summe derselben muss $l - s$ sein. Wenn nämlich dieses der Fall ist, so kann man umgekehrt eine beliebig grosse, aber endliche Anzahl von Intervallen η herausheben, deren Summe gleich $l - s - \delta$ ist, und alsdann sind die Punkte der ursprünglichen Menge in eine endliche Anzahl von Intervallen eingeschlossen, deren Summe $s + \delta$ beträgt. Damit aber die Summe $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \cdots$ gleich $l - s$ werde, ist nothwendig und hinreichend, dass die Grenzpunkte der Endpunkte der Intervalle η ihrerseits eine discrete Menge bilden; denn nur wenn dieses der Fall ist, erhält man, nachdem man diese Grenzpunkte mit Intervallen von der Gesammtlänge δ umschlossen hat, in den übrigen Theilen des Intervalles l eine endliche Anzahl von Intervallen ε, deren Längensumme beliebig wenig von s abweicht, etwa gleich $s - \delta_1$ ist, und ausserdem eine endliche Anzahl von Intervallen η, deren Gesammtlänge $l - s - (\delta - \delta_1)$ wird. Bilden dagegen jene Grenzpunkte ein System mit dem Inhalt s_1, so ist

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \cdots = l - s - s_1,$$

und es wird demnach der Inhalt der ursprünglichen Menge gleich $s + s_1$, trotzdem dass sie in eine unendliche Reihe von Intervallen mit der Gesammtlänge s einschliessbar ist.

Man kann daher den Satz auch so fassen: hat man eine Punktmenge durch eine unendliche Reihe von Intervallen eingeschlossen, deren Gesammtlänge s ist, und bildet die Ableitung des Systemes der Endpunkte dieser Intervalle eine Menge, deren Inhalt s_1 ist, so kann

man die ursprüngliche Menge in eine endliche Anzahl von Intervallen einschliessen, deren Summe beliebig wenig von $s + s_1$ abweicht.*)

Wir können nun folgende Sätze auf Grund der einfachen, anfangs gegebenen Definition beweisen.

1. *Ist die Ableitung einer Punktmenge P discret, so ist P gleichfalls discret.*

Die Punkte der Ableitung P' umschliesse man mit Intervallen, deren Summe der Voraussetzung nach beliebig klein ist; ausserhalb dieser Intervalle kann nur noch eine endliche Anzahl von Punkten der Menge P liegen.

2. *Jede Punktmenge der ersten Gattung und $n$ter Art ist discret.*

Der Satz, den ich schon früher („Elemente" pag. 261) bewiesen habe, ergiebt sich am einfachsten durch Induction. Nimmt man an, dass er für eine Menge $n - 1$ter Art bereits bewiesen ist, und ist P eine Menge der $n$ten Art, so ist die Ableitung P' eine Menge $n - 1$ter Art. Da nun diese discret ist, so folgt nach dem vorigen Satze, dass auch P discret sein muss.

Mit Hülfe der weiteren von Herrn Cantor gegebenen Begriffe lassen sich nun diese Sätze ausdehnen.**)

---

*) Bemerkenswerth ist also folgendes Paradoxon: Hebt man aus einem begrenzten (linearen, ebenen, oder räumlichen u. s. w.) Gebiete von bestimmter Grösse a eine unendliche Anzahl von Theilgebieten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ heraus, deren Summe b kleiner als a ist, und bleiben auf diese Weise noch unendlich viele Theilgebiete nach, so ist die Summe dieser nachbleibenden Gebiete zwar niemals grösser als $a - b$, sie kann jedoch kleiner sein.

**) Indem ich hier die neuen von Herrn Cantor eingeführten Bezeichnungen verschiedener Classen der unendlichen Zahlen benutze, möchte ich mir die Bemerkung erlauben, dass ich der allgemeinen Unterscheidung desselben zwischen dem „Uneigentlich-Unendlichen" und dem „Eigentlich-Unendlichen" nicht zuzustimmen vermag (Math. Ann. Bd. XXI). Zum Begriff des Unendlichen gelangen wir auf zwei verschiedenen Wegen: erstens durch die unbegrenzte Addition (Multiplication) von Grössen (Einheiten oder absoluten Zahlen), zweitens durch den unbegrenzt fortsetzbaren Process der Theilung einer Grösse, der zu der Erkenntniss führt, dass jede Grösse als aus unendlich vielen Theilen bestehend aufgefasst werden kann. In beiden Fällen bezeichnet es das *Wachsthum einer Grösse über jede denkbare Grenze.* In diesem Sinne ist der Raum, sowie die Zeit für unsere Vorstellung unendlich, und nichts anderes liegt auch unserem Urtheile zu Grunde, wenn wir in der Functionentheorie von dem Verhalten der Function im Unendlichen, oder von dem unendlich klein oder gross Werden des Zählers und Nenners in einem Quotienten sprechen. Ist sonach jeder unendliche Process für sich betrachtet unvollendbar, so vermögen wir doch einen Abschluss desselben zu vollziehen hinsichtlich des Resultates, zu welchem er führt. Gerade die zweite Art der Entstehung des Unendlichen giebt zu solcher Festsetzung besonders Anlass, wenn wir umgekehrt die Zusammensetzung einer endlichen Grösse aus unendlich vielen Theilen ins Auge fassen. Die Summation der Glieder einer convergenten unendlichen Reihe z. B. ist ein unvollendbarer Process, aber die Grösse, zu welcher

3. *Jede Punktmenge, für welche $P^{(\omega)}$ discret ist, ist selbst discret.*

Denn schliesst man die Punkte der Menge $P^{(\omega)}$ in Intervalle ein, deren Summe beliebig klein ist, so kann ausserhalb dieser Intervalle nur solch ein Theil P_1 von Punkten der Menge P liegen, für welchen $P_1^{(\omega)} \equiv 0$ ist, welcher also eine Menge der ersten Gattung bildet. Mithin ist dieser nachbleibende Theil ebenfalls discret, und folglich auch die Gesammtheit der Menge P.

Es sei nun α irgend eine Zahl der zweiten Zahlenclasse, und es

---

er führt, kann angebbar sein. Indem wir mit dieser Grösse weiter operiren, ihr z. B. neue Summanden hinzufügen, ergiebt sich uns die Möglichkeit von einer bestimmten Fortsetzung des unendlichen Processes zu reden, oder den Begriff der unendlich vielen Summanden als einen in sich abgeschlossenen zu behandeln. Das nämliche thun wir, wenn wir von der Gesammtheit aller rationalen Zahlen in einem Intervalle sprechen. Dadurch gewinnen wir die Erkenntniss, dass auch bei einer unendlichen Menge von Dingen noch von Grössenunterschieden die Rede sein kann, und bei weiterer Forschung kommt der Begriff der *Anzahl*, welcher bei einer unendlichen Menge von der Art der Anordnung ihrer Elemente abhängig ist, sowie der Begriff der *Mächtigkeit* zur Geltung, durch welchen die Menge ganz unabhängig von ihrer Anordnung charakterisirt ist. Durch die Anwendbarkeit dieser Attribute wird aber der ursprüngliche Begriff des Unendlichen keineswegs modificirt. Die durch unbegrenzte Addition einer Einheit entstehende Grösse ist, mögen wir sie uns vollendet oder nicht vollendet denken, eine Grösse, die von der ersten Mächtigkeit ist, der unendliche Raum und die unendliche Zeit bestehen ebenso aus einer abzählbaren Menge von Theilen, während sie eine Menge von der zweiten Mächtigkeit werden, wenn wir im Raume die Ebenen oder die Punkte, welche er enthält, und in der Zeit die einzelnen Zeitmomente betrachten. Ein Abschluss des Unendlichen tritt dabei ein, sobald wir diese Elemente in ihrer Gesammtheit erfassen.

Ich brauche wohl kaum erst hinzuzufügen, dass ich mit diesen Gegenbemerkungen keineswegs die Bedeutsamkeit der neuen Begriffsbildung beeinträchtigen möchte. Ich halte es vielmehr für überaus wichtig, dass durch Herrn Cantor der Mächtigkeitsbegriff in die Lehre des Unendlichen eingeführt ist, und das Ergebniss, dass es in unserer Anschauung nur zwei Classen desselben giebt, die abzählbare Reihe, und die Menge der Punkte im stetigen Continuum (unabhängig von seiner Dimension) ist eine merkwürdige und werthvolle Bereicherung unserer Erkenntniss. Mir kam es nur darauf an, zu betonen, dass das Unendliche, welches in den Processen der Analysis auftritt, meines Erachtens durchaus das nämliche ist, wie es in den Begriffen hier gebraucht wird. Diese Begriffe sind aber dadurch von besonderem Werthe, dass sie uns deutlich lehren, wie es in den allermeisten Fällen nothwendig ist, das Unendliche als etwas abgeschlossenes zu betrachten, so dass man nicht damit ausreicht, nur bei dem Unbegrenzten dieser Grössenbegriffe stehen zu bleiben. Im wesentlichen bildet diese Frage schon den Gegenstand fortgesetzter Erörterungen zwischen Leibniz und Joh. Bernoulli (Commercium epistolicum, Juli 1698 bis Februar 1699), wobei letzterer die Nothwendigkeit vertritt, das unendliche als abgeschlossene Grössen zu fixiren. Seine Ausdrucksweise: es existire das Unendlich grosse und das unendlich kleine, ist freilich kaum zulässig. Denn es beginnen dann und erst dann die inneren Widersprüche, wenn man versucht, diesen Grenzbegriffen eine für sich bestehende Realität in unserem Denken oder in der Aussenwelt zuzuerkennen.

sei bekannt, dass $P^{(\alpha)}$ discret ist; es soll bewiesen werden, dass dann auch P discret sein muss. Nehmen wir an, der Satz sei bewiesen für jede Zahl $\alpha' < \alpha$. Die Punkte der Menge $P^{(\alpha)}$ lassen sich der Voraussetzung nach in Intervalle einschliessen, deren Anzahl endlich, und deren Summe beliebig klein ist. Ausserhalb dieser Intervalle kann nur solch ein Theil P_1 von P liegen, für welchen $P_1^{(\alpha)} \equiv 0$ ist. Ist nun α eine zur zweiten Zahlenclasse gehörige Zahl der *ersten* Art, so dass eine ihr nächst kleinere Zahl $\alpha - 1$ vorhanden ist, so erkennt man, dass $P_1^{(\alpha-1)}$ aus einzelnen Punkten besteht, also discret ist, und folglich ist P_1 discret. Ist aber α eine Zahl der *zweiten* Art, so giebt es stets eine kleinere zur ersten oder zweiten Zahlenclasse gehörige Zahl $\alpha' < \alpha$, so dass auch für diese $P_1^{(\alpha')} \equiv 0$; daraus folgt wiederum, dass P_1 discret ist. Sonach ist der Satz bewiesen:

4. *Jede Punktmenge P, für welche $P^{(\alpha)}$ discret ist, wobei α entweder eine der ersten oder eine der zweiten Zahlenclasse angehörige Zahl bedeutet, ist selbst discret.*

Hieraus folgt ohne weiteres der Satz:

5. *Jede reductibele Punktmenge ist eine discrete.*

Bei einer Punktmenge P, deren erste Ableitung $P^{(1)}$ eine höhere Mächtigkeit als die erste hat, lässt sich $P^{(1)}$ immer in eine perfecte Menge S und eine Menge von der ersten Mächtigkeit R zerlegen. S hat die Eigenschaft, dass eine kleinste Zahl α existirt, so dass $P^{(\alpha)} \equiv S$ ist. Von der Zerlegung

$$P^{(1)} \equiv R + S \equiv R + P^{(\alpha)}$$

ausgehend, erhält man nun einen überaus einfachen Beweis des allgemeinen Cantor'schen Satzes:

6. *Der Inhalt der Punktmenge P stimmt immer überein mit dem Inhalt der Punktmenge $P^{(\alpha)}$.*

Da der Inhalt von P und $P^{(1)}$ derselbe ist, so braucht der Satz nur für $P^{(1)}$ bewiesen zu werden. Hat man die Punkte der Menge $P^{(\alpha)}$ in eine endliche Anzahl von Intervallen eingeschlossen, deren Summe beliebig wenig von dem Grenzwerthe abweicht, so umfassen diese Intervalle entweder auch sämmtliche Punkte der Menge R, oder es liegt R ganz oder theilweise ausserhalb derselben. Im ersteren Falle ist die Behauptung ohne weiteres einleuchtend, in anderem kann man leicht einsehen, dass die ausserhalb der construirten Intervalle gelegene Punktmenge R_1 die vollständige Ableitung eines Bestandtheiles von P sein muss. Weil nämlich in der unmittelbaren Nähe der Punkte R_1 von R kein Punkt der Menge $P^{(\alpha)}$ sich befindet, so muss R_1 für sich allein die Ableitung aller derjenigen Punkte von P bilden, die nicht in den anfangs construirten Intervallen liegen. Hieraus folgt, dass R_1 eine reductibele Menge, und weiter nach Satz 5, dass es discret ist.

Der Process, durch welchen oben die Inhaltsbestimmung für jede

Punktmenge innerhalb einer linearen Strecke l definirt wurde, und zwar ohne Benutzung des Integrales, ist ein vollkommen eindeutiger, indem successive die Strecken ausgeschieden werden, welche gleich oder grösser sind als $\frac{l}{n}$, und welche keinen Punkt der Menge in ihrem Innern enthalten. Man wird indessen die Frage aufwerfen, welche zuerst von Herrn Stolz (Math. Annalen Bd. 23) gestellt und beantwortet wurde, ob irgend eine andere Definition des Processes bei der nämlichen Punktmenge auch immer zu derselben Grenze des Inhaltes führt. Diese Frage ist insbesondere für den Inhalt von Punktmengen innerhalb ebener Mannigfaltigkeiten höherer Dimension nicht überflüssig, da bei diesen auch schon der Process des Aushebens von sphärischen Gebilden mit dem Radius gleich oder grösser als $\frac{l}{n}$ auf verschiedene Weisen ausgeführt werden kann.

Wir betrachten zunächst wiederum die lineare Strecke von der Länge l, innerhalb welcher eine Punktmenge definirt ist. Um den Inhalt der letzteren zu bestimmen, verfahren wir nun allgemein so, dass wir nach irgend welchem Gesetz Theilintervalle ausscheiden, welche von endlicher Grösse sind, und keinen Punkt der Menge in ihrem Innern oder an ihren Enden enthalten. Dabei müssen wir jedoch an der Regel festhalten, dass wir jedes Intervall, welches wir durch eine frühere Theilung erhalten haben, und in dem Punkte der Menge liegen, ohne überall dicht daselbst zu sein, weiter in Theile zerlegen, von denen jeder kleiner ist als eine bestimmte Grösse δ, und dass wir alsdann bei der Bestimmung der Summe, welche zu dieser neuen Theilung gehört, alle diejenigen Intervalle weglassen, welche keinen Punkt der Menge in ihrem Innern oder an ihren Grenzen enthalten. Daraus folgt dann, dass jedes Intervall, in welchem die Punkte der Menge nicht überall dicht sind, in Theile zerlegt wird, welche Punkte der Menge enthalten, und deren Längen schliesslich kleiner werden als jede endliche Grösse. Zwei Intervalle, die an einander stossen, können dabei immer als eines betrachtet werden. Jeder Process dieser Art führt zu einer Reihe von Intervallsummen: $s, s', s'', \ldots$, von denen keine grösser ist als die vorhergende: die Reihe hat daher eine bestimmte Grenze σ.

Es seien nun zwei verschiedene Processe gegeben: $s, s', s'', \ldots$ und $t, t', t'', \ldots$ der Grenzwerth des ersten sei σ, der des zweiten sei τ. Es soll bewiesen werden, dass $\sigma = \tau$ ist. Man betrachte ein Glied s in der ersten Reihe, welches so gewählt ist, dass

$$s = \sigma + \delta,$$

wobei δ kleiner ist als eine beliebig klein fixirte Grösse ε; und ebenso ein Glied t, für welches

$$t = \tau + \delta',$$

wobei δ' ebenfalls kleiner ist als ε. Die Summe s besteht aus einer endlichen Anzahl von Intervallen mit endlicher Länge, desgleichen die Summe t. Denkt man sich zuerst die Intervalle der Summe s construirt, und bestimmt man alsdann die Intervalle der Summe t, so liegen diese letzteren entweder ganz innerhalb der Intervalle s, und dann ist $t \leqq s$, oder es fallen gewisse Bestandtheile von t ausserhalb der Intervalle s. Alle diese Bestandtheile enthalten aber keinen Punkt der gegebenen Menge, und kommen daher bei Fortsetzung des Processes t immer mehr zum Wegfall. Denn jedes Intervall, welches einen Endpunkt von s überschreitet, wird schliesslich in seiner Grösse beliebig klein. Hieraus können wir schliessen, dass in der Reihe der Grössen t sicherlich ein Glied t_r vorkommen muss, bei welchem alle Theile, die über s hinausreichen, einen Beitrag zur Summe t_r liefern, welcher kleiner ist als die beliebig kleine Grösse ε, und da die Theile von t_r, welche nicht ausserhalb der Intervalle s liegen, gleich oder kleiner sind als s, so ist

$$t_r < s + \varepsilon.$$

Wenn nun die Theile von t_r, welche in den Intervallen der Summe s liegen, diese Intervalle nicht vollständig ausfüllen, so werden bei Fortsetzung des Processes s die Lücken, in denen kein Punkt der Menge P liegt, immer mehr in Wegfall kommen, und es wird in der Reihe s ein Glied s_μ geben, bei welchem alle Bestandtheile, welche ausserhalb der Intervalle t_r sich befinden, eine Summe liefern, welche kleiner ist als ε. Demnach wird

$$s_\mu < t_r + \varepsilon.$$

Also besteht die Ungleichung

$$s_\mu - \varepsilon < t_r < s + \varepsilon$$

oder, weil s_μ und s kleiner sind als $s + \varepsilon$,

$$\sigma - \varepsilon < t_r < \sigma + 2\varepsilon,$$

woraus folgt, dass die Grenze τ von t gleich σ sein muss.

Dieselbe Methode gilt auch für ebene Mannigfaltigkeiten höherer Dimension; nur für die zweidimensionale Ebene will ich den Beweis noch ausführen. In einem begrenzten Theile der Ebene, welchen wir uns mit einem Kreise vom Radius l umschlossen denken, sei eine Punktmenge definirt. Der ebene Inhalt derselben wird bestimmt, indem wir das Innere des Kreises durch irgend welche Curven in Theilgebiete zerlegen, von denen jedes einen durch die gewöhnliche Integrationsmethode berechenbaren Inhalt hat, der kleiner ist als eine Grösse δ, die schliesslich beliebig klein wird, und in denen auch die Entfernung zweier im Innern oder an den Grenzen gelegenen Punkte ein Maximum hat, welches kleiner ist als eine vorgegebene

Grösse, die schliesslich beliebig klein wird. Von solch einem Gebiet sagen wir, dass es in allen seinen linearen Dimensionen beliebig klein wird. Wir scheiden die Theilgebiete aus, in derem Innern oder an deren Grenzen kein Punkt der gegebenen Menge liegt. Alsdann theilen wir jedes der nachbleibenden Gebiete in Theile mit bestimmtem Inhalt, deren jeder kleiner ist als $\delta' < \delta$, und scheiden wiederum die Gebiete aus, welche keinen Punkt der Menge in ihrem Innern oder an den Grenzen enthalten. Jeder Process dieser Art lässt ein Gebiet von endlichem Inhalt $s, s', s'', \ldots$ nach, und diese Reihe convergirt, da ihre Glieder nicht zunehmen, und nicht kleiner werden als Null, nach einer bestimmten Grenze. Charakteristisch für den Process ist also auch hier, dass ein Theilgebiet, in welchem die Punkte der Menge nicht überall dicht sind, immer in weitere Gebiete zerlegt wird, deren lineare Dimensionen schliesslich kleiner werden als jede endliche Grösse.

Vergleicht man nun wiederum zwei geometrisch verschiedene Processe, von denen der eine die Grenze σ, der andere die Grenze τ hat, so kann man wie vorhin beweisen, dass σ gleich τ sein muss. Denn hat man eine bestimmte Gebietseintheilung mit der Summe s construirt, und betrachtet man nun gleichzeitig die Gebiete mit der Summe t, so liegen die letzteren entweder ganz innerhalb der ersteren, oder sie können die Gebiete von s überschreiten. Die ausserhalb von s gelegenen Bestandtheile von t enthalten aber keinen Punkt der Menge, weder in ihrem Innern noch an ihren Grenzen. Wird also das Gebiet t in immer kleinere Theile zerlegt, so muss sich eine Gebietseintheilung t_r finden lassen, bei welcher alle die Theile, welche über ein Gebiet s hinausragen, in Summa kleiner werden alseine beliebig kleine Grösse ε. Denn die Begrenzungen von s, welche von Gebieten der Summe t überschritten werden, können wir uns von Flächen umschlossen denken, deren Inhalt in Summa kleiner ist als ε, und deren Grenzen eine von Null verschiedene Entfernung von den Grenzen von s haben. Dazu ist nur erforderlich, dass jedes Gebiet, wie wir vorausgesetzt haben, einen Inhalt im gewöhnlichen Sinn der Integralrechnung besitzt. Bei Fortsetzung des Processes t müssen nun alle Gebiete, welche über die Begrenzung von s hinausragen, schliesslich ganz in die Flächen ε hineinfallen, weil alle Gebiete, in denen die Punkte der gegebenen Menge nicht überall dicht sind, in ihren Dimensionen kleiner werden als jede endliche Grösse. Es ist also

$$t_r < s + \varepsilon.$$

Nun kann man umgekehrt auf Grund derselben Ueberlegung beweisen, dass in der Reihe s ein Glied s_μ vorkommen muss, so dass

$$s_\mu < t_r + \varepsilon$$

wird, und aus den beiden Ungleichungen folgt wie früher, dass $\sigma = \tau$ ist.

Im Vorstehenden ist zugleich die allgemeine Definition und Methode der Inhaltsbestimmung jedes geschlossenen, continuirlichen, ebenen Gebietes enthalten, sobald nur die zum Innern des Gebietes gehörigen Punkte, so wie die Grenzpunkte desselben eindeutig definirt sind. Die in der Integralrechnung üblichen Definitionen, vermittelst der Zerlegung der ebenen Fläche in parallele Streifen, oder des ebenen Raumes in prismatische Körper, umfassen nur die Fälle, in denen die Begrenzung eindeutig auf eine Gerade oder eine Ebene projicirt werden kann, und lassen sich dann weiter nur auf solche ausdehnen, in denen die Punkte der Begrenzung den Inhalt Null haben.

Bestimmt man z. B. auf der Abscissenaxe im Intervall von 0 bis 1 eine discrete Punktmenge, und construirt man in den Punkten derselben die rechtwinkligen Ordinaten von der Länge 1, so haben sämmtliche Punkte dieser Ordinaten den ebenen Inhalt Null; wird dagegen auf der Abscissenaxe eine Punktmenge mit der Intervallgrenze l angenommen, so entsteht auf die gleiche Weise eine Punktmenge mit dem ebenen Inhalt l. Wenn nun insbesondere die Punktmenge auf der Abscissenaxe derart gewählt wird, dass sie in keinem Intervall überall dicht ist, so bekommt das ebene Gebiet mit bestimmtem Inhalt die Eigenthümlichkeit, dass *jeder* Punkt desselben zugleich der Begrenzung des Gebietes angehört. Es kann hier also von inneren Punkten im Gegensatz zu Rand- oder Grenzpunkten gar nicht mehr die Rede sein, die Begrenzung hat vielmehr selbst schon einen bestimmten, von Null verschiedenen Flächeninhalt.*)

August 1884.

---

*) Als Nachtrag zu meinen Arbeiten in den vorigen beiden Bänden dieser Annalen möchte ich noch bemerken, dass die Unterscheidung des vor- und rückwärts gebildeten Differentialquotienten zwar schon in dem Bonnet'schen Beweise des Mittelwerthsatzes der Differentialrechnung eine wichtige Rolle spielt, in principieller Weise aber wohl zuerst von Herrn Thomae (Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale) durchgeführt worden ist. Derselbe hat auch bereits die allgemeine Definition des mittleren Differentialquotienten gegeben.

Berechnung der Menge von Primzahlen, welche innerhalb der ersten Milliarde natürlicher Zahlen vorkommen.

Von

Meissel in Kiel.

Die folgende Berechnung bildet die Fortsetzung der im II. Bde. pag. 636 und III. Bde. pag. 523 gegenwärtiger Zeitschrift ausgeführten Berechnungen von Primzahlenmengen. Behalten die daselbst gebrauchten Zeichen ihre Bedeutung, so ergiebt sich für

$$m = 1\,000\,000\,000$$
$$n + \mu = \varphi\sqrt{m} = 3401$$
$$n = \varphi\sqrt[3]{m} = 168$$
$$\mu = 3233$$

$$\varphi(m) = \Phi(m, 168) + 5\;767\;839 - \sum_{169}^{3401} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right).$$

I) Berechnung von $\Phi(m, 168)$.

			60 220 381
Φ(58823529, 6) =	11 282 835	(14925373, 18) =	1 963 655
(52631578, 7) =	9 501 332	(14084507, 19) =	1 825 279
(43478260, 8) =	7 435 827		
(34482758, 9) =	5 640 970	Φ(13698630, 20) =	1 750 220
		(12658227, 21) =	1 595 164
Φ(32258064, 10) =	5 095 069	(12048192, 22) =	1 499 128
(27027027, 11) =	4 131 144	(11235955, 23) =	1 381 338
(24390243, 12) =	3 627 361	(10309278, 24) =	1 253 380
(23255813, 13) =	3 374 294	(9900990, 25) =	1 191 537
(21276595, 14) =	3 015 293	(9708737, 26) =	1 157 070
(18867924, 15) =	2 616 983	(9345794, 27) =	1 103 283
(16949152, 16) =	2 306 412	(9174311, 28) =	1 073 186
(16393442, 17) =	2 192 861	(8849557, 29) =	1 026 045
$\sum$ =	60 220 381	$\sum$ =	77 039 666

	77 039 666
Φ(7874015, 30) =	905 328
(7633587, 31) =	871 079
(7299270, 32) =	826 895
(7194244, 33) =	809 332
(6711409, 34) =	749 910
(6622516, 35) =	735 214
(6369426, 36) =	702 687
(6134969, 37) =	672 706
(5988023, 38) =	652 714
(5780346, 39) =	626 428
Φ(5586592, 40) =	602 043
(5524861, 41) =	592 091
(5235602, 42) =	557 985
(5181347, 43) =	549 262
(5076142, 44) =	535 249
(5025125, 45) =	527 101
(4739336, 46) =	494 393
(4484304, 47) =	465 366
(4405286, 48) =	454 908
(4366812, 49) =	448 777
Φ(4291845, 50) =	438 943
(4184100, 51) =	425 858
(4149377, 52) =	420 348
(3984063, 53) =	401 600
(3891050, 54) =	390 386
(3802281, 55) =	379 713
(3717472, 56) =	369 568
(3690036, 57) =	365 236
(3610108, 58) =	355 706
(3558718, 59) =	349 098
$\sum$ =	93 715 590

	93 715 590
Φ(3533568, 60) =	345 178
(3412969, 61) =	331 916
(3257328, 62) =	315 308
(3215434, 63) =	309 980
(3194888, 64) =	306 759
(3154574, 65) =	301 644
(3021148, 66) =	287 582
(2967359, 67) =	281 332
(2881844, 68) =	272 114
(2865329, 69) =	269 561
Φ(2832861, 70) =	265 508
(2785515, 71) =	260 049
(2724795, 72) =	253 408
(2680965, 73) =	248 382
(2638522, 74) =	243 542
(2610966, 75) =	240 140
(2570694, 76) =	235 563
(2518891, 77) =	229 952
(2493765, 78) =	226 875
(2444987, 79) =	221 630
Φ(2386634, 80) =	215 549
(2375296, 81) =	213 832
(2320185, 82) =	208 161
(2309468, 83) =	206 558
(2277904, 84) =	203 068
(2257336, 85) =	200 575
(2227171, 86) =	197 301
(2188183, 87) =	193 167
(2169197, 88) =	190 920
(2159827, 89) =	189 541
$\sum$ =	101 180 685

	101 180 685		105 658 915
Φ(2141327, 90) =	187 325	Φ(1512859, 120) =	122 825
(2087682, 91) =	182 012	(1485884, 121) =	120 375
(2053388, 92) =	178 461	(1477104, 122) =	119 449
(2036659, 93) =	176 505	(1464128, 123) =	118 193
(2004008, 94) =	173 126	(1447178, 124) =	116 615
(1988071, 95) =	171 253	(1426533, 125) =	114 737
(1964636, 96) =	168 765	(1410437, 126) =	113 267
(1919385, 97) =	164 376	(1390820, 127) =	111 517
(1912045, 98) =	163 311	(1375515, 128) =	110 109
(1848428, 99) =	157 344	(1364256, 129) =	109 053
Φ(1828153, 100) =	155 214	Φ(1353179, 130) =	108 015
(1795332, 101) =	152 009	(1345895, 131) =	107 296
(1776198, 102) =	150 006	(1331557, 132) =	105 997
(1757469, 103) =	148 064	(1321003, 133) =	105 007
(1751313, 104) =	147 187	(1314060, 134) =	104 332
(1733102, 105) =	145 295	(1300390, 135) =	103 125
(1703577, 106) =	142 471	(1293661, 136) =	102 470
(1686340, 107) =	140 695	(1270648, 137) =	100 544
(1669449, 108) =	138 954	(1254705, 138) =	99 157
(1663893, 109) =	138 173	(1236093, 139) =	97 593
Φ(1647446, 110) =	136 492	Φ(1233045, 140) =	97 270
(1631321, 111) =	134 856	(1218026, 141) =	96 019
(1620745, 112) =	133 692	(1215066, 142) =	95 690
(1615508, 113) =	132 979	(1209189, 143) =	95 125
(1584786, 114) =	130 173	(1206272, 144) =	94 826
(1560062, 115) =	127 880	(1191895, 145) =	93 659
(1555209, 116) =	127 225	(1172332, 146) =	92 064
(1545595, 117) =	126 179	(1166861, 147) =	91 586
(1531393, 118) =	124 781	(1164144, 148) =	91 304
(1517450, 119) =	123 427	(1158748, 149) =	90 799
$\sum =$	105 658 915	$\sum =$	108 786 933

	108 786 933
$\Phi(1140250, 150) =$	89 320
$(1135073, 151) =$	88 876
$(1132502, 152) =$	88 616
$(1127395, 153) =$	88 174
$(1102535, 154) =$	86 241
$(1097694, 155) =$	85 839
$(1088139, 156) =$	85 072
$(1076426, 157) =$	84 163
$(1067235, 158) =$	83 433
$(1062699, 159) =$	83 060
$\sum =$	109 649 727

	109 649 727
$\Phi(1055966, 160) =$	82 547
$(1049317, 161) =$	82 046
$(1034126, 162) =$	80 911
$(1029866, 163) =$	80 586
$(1023541, 164) =$	80 110
$(1017293, 165) =$	79 629
$(1009081, 166) =$	79 021
$(1003009, 167) =$	78 568
$\sum =$	110 293 145
$\Phi(10^9, 6) =$	191 808 190
$\Phi(10^9, 168) =$	81 515 045

Jetzt ist $\sum_{169}^{3401} \varphi\left(\frac{10^9}{p_s}\right)$ zu berechnen.

Der leichteren Controle wegen mag diese Summe in Absätzen von je 50 Summanden gebildet werden. Zu dem Ende setzen wir der Kürze wegen

$$\sum_{169}^{50n+49} \varphi\left(\frac{10^9}{p_s}\right) = (n).$$

Dann ergiebt sich:

(3) = 2 228 277	(10) = 14 957 868
(4) = 5 117 875	(11) = 16 016 344
(5) = 7 448 642	(12) = 16 983 837
(6) = 9 384 435	(13) = 17 875 368
(7) = 11 046 408	(14) = 18 701 495
(8) = 12 506 023	(15) = 19 473 903
(9) = 13 793 325	(16) = 20 198 682
	(17) = 20 879 740
	(18) = 21 522 379
	(19) = 22 130 648

(20) = 22 707 401	(40) = 30 552 605
(21) = 23 255 694	(41) = 30 833 234
(22) = 23 780 146	(42) = 31 107 436
(23) = 24 282 602	(43) = 31 374 152
(24) = 24 764 558	(44) = 31 635 005
(25) = 25 227 192	(45) = 31 890 265
(26) = 25 670 826	(46) = 32 139 795
(27) = 26 097 008	(47) = 32 383 938
(28) = 26 507 346	(48) = 32 623 289
(29) = 26 903 870	(49) = 32 858 265
(30) = 27 287 842	(50) = 33 088 579
(31) = 27 659 621	(51) = 33 314 679
(32) = 28 019 460	(52) = 33 536 336
(33) = 28 367 426	(53) = 33 753 878
(34) = 28 705 472	(54) = 33 967 020
(35) = 29 034 097	(55) = 34 176 162
(36) = 29 354 371	(56) = 34 381 480
(37) = 29 666 196	(57) = 34 583 302
(38) = 29 969 576	(58) = 34 781 901
(39) = 30 264 815	(59) = 34 977 140

(60) = 35 168 738
(61) = 35 357 444
(62) = 35 543 374
(63) = 35 726 344
(64) = 35 906 350
(65) = 36 083 243
(66) = 36 257 223
(67) = 36 428 601

$$\sum_{169}^{3401} \varphi\left(\frac{10^9}{p_s}\right) = \underline{36\ 435\ 406.}$$

Durch Zusammenstellung erhält man nun aus der Gleichung:

$$\varphi(10^9) = \Phi(10^9, 168) + 5\ 767\ 839 - \sum_{169}^{3401} \varphi\left(\frac{10^9}{p_s}\right)$$

$$\begin{array}{rcr}
\Phi(10^9, 168) & = & 81\ 515\ 045 \\
 & & +\ \ 5\ 767\ 839 \\
\hline
 & & 87\ 282\ 884 \\
-\sum_{169}^{3401} \varphi\left(\frac{10^9}{p_s}\right) & = & -\ 36\ 435\ 406 \\
\hline
\varphi(10^9) & = & 50\ 847\ 478 \\
\hline
\end{array}$$

Also sind in der ersten Milliarde enthalten
50 847 478 *Primzahlen.*

Die Näherungsformel, welche Gram in seiner schönen Abhandlung „Undersøgelser angaaende Maengden af Primtal under en given Graense, Kjøbenhavn 1884" aus der Formel von Riemann hergeleitet hat, nämlich

$$\varphi(n) = Li(n) - \frac{1}{2}\, Li(\sqrt{n}) - \frac{1}{3}\, Li(\sqrt[3]{n}) \ \text{ etc.}$$

führte Gram auf den Näherungswerth

$$\varphi(m) = 50\ 847\ 455,$$

wie derselbe mir in einem Schreiben vom 12. August d. J. mittheilte. Dieser Werth weicht nur um 23 *Einheiten von dem oben gefundenen* ab. Zur directen Berechnung des Integrallogarithmus

$$Li(z) = \int_{e^\mu}^{z} \frac{dz}{\log z},$$

wo

$$\mu = 0,3725\ 0741\ 0781\ 3666\ 34,$$

bediene ich mich der Formel, in welcher x ein ächter Bruch ist:

$$e^{-n-x}\, Li(e^{n+x}) = \frac{1}{n+x} + \frac{1}{(n+x)^2} + \frac{\Pi(2)}{(n+x)^3} + \cdots$$
$$+ \frac{\Pi(n-2)}{(n+x)^{n-1}} + R_n(x) \cdot \frac{\Pi(n-1)}{(n+x)^n}$$

(n ist hier eine ganze Zahl und $\Pi(n)$ bezeichnet das Product $1.2.3\ldots n$).

Der Restfactor stellt sich folgendermassen dar:

$$R_n(x) = \frac{2}{3} + x + \frac{1}{n}\left[\frac{4}{135} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{3}\right]$$
$$+ \frac{1}{n^2}\left[\frac{8}{2835} - \frac{2x^2}{135} + \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{x^5}{15}\right]$$
$$- \frac{1}{n^3}\left[\frac{16}{8505} + \frac{4x^2}{2835} - \frac{4x^3}{405} + \frac{22}{135}x^4 + \frac{14}{45}x^5 + \frac{x^6}{9} + \frac{x^7}{105}\right] \ \text{etc.}$$

Ausser den bereits im 23. Annalenbande mitgetheilten beiden Fehlern fand ich in den Tafeln von **Burckhardt** die Zahlen

$$1556\,257 = 37 \,.\, 42061$$
$$1619\,173 = 151 \,.\, 10723$$

irrthümlich als Primzahlen aufgeführt.

Den ersten derselben fand ich in B. T. bei der Prüfung der Positionen:

$$\Phi(1560062, 115) = \Phi(a, 115) = 127\,880$$
$$\Phi(1555209, 116) = \Phi(b, 116) = 127\,225.$$

Nun müsste sein $\Phi(a, 116) - \Phi(b, 116)$ gleich der Anzahl aller Zahlen innerhalb der Grenzen b einschl. a ausschl., welche den kleinsten Theiler $643 = p_{117}$ besitzen.

Die Zählung aus B. T. ergab in diesem Intervall 359 Primzahlen und 51 Producte mit den kleinsten Theilern 643. Daher würde man erhalten müssen:

$$\Phi(a, 116) = \Phi(b, 116) + 359 + 51 = \underline{127635.}$$

Es ist aber:

$$\Phi(a, 116) = \Phi(a, 115) - \Phi\left(E\frac{a}{641}, 115\right) = \Phi(a, 115) - \Phi(2433, 115)$$
$$= 127880 - 246 = \underline{127634.}$$

Daher steckt in den B. T. zwischen den Grenzen b und a ein Fehler.

Durch Abzählung aller Zahlen des Intervalls, welche den kleinsten Theiler 31 und aller Zahlen, welche den kleinsten Theiler 53 besitzen, fand ich ferner

$\Phi(a, 10) - \Phi(b, 10) = 768$, mit der Berechnung stimmend

$\Phi(a, 15) - \Phi(b, 15) = 679$, statt nach Rechnung 678.

Also ist in B. T. im genannten Intervall eine durch 31, 37, 41, 43 oder 47 theilbare Zahl irrthümlich als Primzahl aufgeführt, welche sich jetzt leicht als

$$1556257 = 37 \,.\, 42061$$

ergab.

Die Existenz von mehreren anderen Fehlern habe ich durch Controlrechnungen innerhalb gewisser Grenzen festgestellt, aber die Fehler aufzufinden nicht die nöthige Musse gehabt.

Dass die Zahl 1330001 Primzahl ist, hat **Oppermann** bereits gezeigt.

Kiel, den 4. Septbr. 1884.

Ueber die Differentialgleichungen der Mechanik.

Von

A. Voss in Dresden.

Nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten findet bekanntlich für ein System materieller Punkte Gleichgewicht statt, wenn die virtuelle Arbeit der gegebenen Kräfte für jede virtuelle Verschiebung der Angriffspunkte derselben verschwindet, die mit den Bedingungen der Beweglichkeit dieser Punkte verträglich ist. Diese Bedingungen pflegt man bei der vorstehenden allerdings speciellen Fassung des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten in der Form von Gleichungen $\varphi_i = 0$ zwischen den Coordinaten der Angriffspunkte vorauszusetzen, durch deren Variationen $\delta\varphi_i = 0$ die Bedingungen für die Verschiebungen δ gewonnen werden. *Thatsächlich gehen also nur die Bedingungen des Verschwindens jener Variationen in die Behandlung der statischen Probleme ein.* Damit erkennt man aber, dass es ganz gleichgültig ist, ob diese Variationen durch Bildung totaler δ Processe $\delta\varphi_i = 0$ entstanden sind, oder nicht. Man hat daher keinen Grund, die obige Fassung des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten durch die speciellere analytische Formulirung desselben zu beschränken.

Um sich hiervon genauere Rechenschaft zu geben, betrachte man zunächst etwa das Gleichgewicht eines materiellen Punktes unter dem Einflusse beliebiger Kräfte mit den Componenten X, Y, Z, für den die Bedingung

$$P\delta x + Q\delta y + R\delta z = 0$$

bestehen soll. Die letztere aber ist der Ausdruck eines *Punktebenen-Systems*, und das durch sie definirte Gebilde kann in eben demselben Sinne als ein geometrisch vollkommen bestimmtes angesehen werden, wie etwa eine ideale feste Fläche, auf welcher der Punkt gezwungen ist zu bleiben; durch dasselbe wird jedem Punkte eine bestimmte Ebene oder vielmehr ein bestimmtes Flächenelement zugeordnet, in welchem die Verschiebungen vor sich zu gehen haben.*) Von diesem aus können

*) Vgl. über diese Auffassung meine Arbeit im XXIII Bande dieser Annalen S. 45 ff.

also nur, sobald man zunächst von Reibungswiderständen etc. absieht, normale Reactionen ausgehen, und man erhält daher als Gleichgewichtsbedingungen:

$$X - \lambda P = 0,$$
$$Y - \lambda Q = 0,$$
$$Z - \lambda R = 0,$$

oder

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0.$$

Und von hier aus wird man, etwa in derselben Weise, wie dies von Lagrange in der Théorie des fonctions geschehen ist,*) zu dem allgemeinen Falle aufsteigen in welchem für die Coordinaten der Punkte eines Systems eine gewisse Zahl von Bedingungen der Form:

$$\sum_{k=1}^{n} (p_{sk}\,\delta x_k + q_{sk}\,\delta y_k + r_{sk}\,\delta z_k) = 0$$
$$s = 1, 2 \ldots r$$

vorgeschrieben ist. Damit ist aber wieder die Zulässigkeit der Bedingung

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

als Criterium des Gleichgewichts wenigstens im allgemeinen erwiesen.**)

Mit dieser Bemerkung ist für die statischen Probleme höchstens in formaler Beziehung ein neuer Gesichtspunkt gewonnen. Anders aber scheint es in der *Dynamik* zu stehen. In dieser erweist sich die Annahme in den Coordinaten der Systempunkte *expliciter* Gleichungen $\varphi_i = 0$ als eine solche, welche vom wesentlichsten Einflusse auf die ganze weitere Behandlung der dynamischen Untersuchungen wird. Ja, es ist geradezu vermöge der abgeschlossenen Gestalt, welche die analytische Mechanik seit Lagrange gewonnen hat, Gebrauch geworden, als *Differentialgleichungen der Mechanik* gewisse in Bezug auf die zweiten Differentialquotienten der Variabelen nach der unabhängigen Veränderlichen t auflösbare Systeme simultaner Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu bezeichnen, wobei zwischen den unabhängigen Variabelen noch eine Anzahl von in diesen expliciten Relationen (welche auch t enthalten können) bestehen.

Ueber die ganz hervorragende Wichtigkeit jenes eben erwähnten Falles kann sich natürlicherweise keine Frage erheben; doch möchte ich im folgenden wenigstens den *Versuch* machen, darauf hinzuweisen, dass auch in der Dynamik kein principieller Grund vorliegt, durch die übliche analytische Fassung jede andere erweiterte Fragestellung als

*) Lagrange, Théorie des fonctions, Paris 1813, S. 350 ff.

**) Vgl. übrigens die Bemerkung in Jacobi's Vorlesungen über Dynamik, S. 15.

undenkbar auszuschliessen, sondern dass vielmehr auch Bedingungen allgemeinerer Art gar wohl einen dynamisch vollkommen vorstellbaren Inhalt haben können.

Schon bei der Formulirung der dynamischen Differentialgleichungen im Sinne der gebräuchlichen Anschauung, an welcher, soweit mir bekannt ist, von allen Autoren festgehalten ist*), kann der Fall eintreten, dass die Relationen $\delta\varphi = 0$ nicht in der Form *totaler Variationen* gegeben sind, obwohl sie freilich auf solche sich zurückführen lassen. Ich erörtere diesen Fall zunächst etwas näher, von welchem aus ein Fortschreiten zu allgemeineren Annahmen ungezwungen möglich scheint.

Es seien nämlich r lineare Differentialausdrücke mit n Variabelen $x_1, x_2 \dots x_n$

$$\tag{1} \begin{gathered} \sum_1^n{}^i p_{1i}\, dx_i, \\ \sum_1^n{}^i p_{2i}\, dx_i, \\ \vdots \\ \sum_1^n{}^i p_{ri}\, dx_i \end{gathered}$$

gegeben, in denen die p_{ki} nur die x enthalten mögen. Alsdann wird zu fragen sein, wann dieselben ebensoviel totalen Differentialen äquivalent gesetzt werden können. Dazu ist erforderlich, dass durch Multiplication mit gewissen Multiplicatoren λ_s und Addition totale Differentiale aus ihnen herorgehen, d. h. es müssen Gleichungen von der Form

$$\tag{2} \sum_1^r{}^s p_{si}\, \lambda_s = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

bestehen. Wird nun das System der Differentialausdrücke (1) als *linear unabhängig* vorausgesetzt, so können nicht alle partialen Deter-

*) Ich erwähne ausser der Darstellung in Lagrange's analytischer Mechanik selbst nur die von Jacobi, a. a. O. S. 52—57, und die in der Abstraction wohl am weitesten vorgeschrittene in Kirchhoff's Mechanik S. 21. Die erwähnte Annahme ist selbst in denjenigen Fällen festgehalten, wo man die Kräfte als Functionen der Zeit und der Differentialquotienten nach derselben vorauszusetzen sich veranlasst gesehen hat.

Die Darlegungen des Textes, *bei denen auch die Bedingungen von den Geschwindigkeiten abhängig werden*, dürften, selbst wenn man sich nicht entschliessen könnte, sie als der Mechanik angehörige anzusehen, doch zur Erläuterung der analytischen Processe beitragen, welche bei den dynamischen Differentialgleichungen zur Verwendung kommen. Vgl. übrigens die Anmerkung zur Seite 266.

minanten r^{ten} Grades aus den correspondirenden p_{ik} verschwinden. Man kann daher immer die aus den ersten r Gleichungen 2) etwa berechneten Werthe der λ in die letzten $n-r$ einsetzen, und erhält so $n-r$ lineare partielle Differentialgleichungen für die Function φ. Soll nun das System (1) r totalen Differentialen äquivalent sein, so muss demnach das System jener partiellen Differentialgleichungen r von einander unabhängige particuläre Integrale

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_r$$

besitzen. Die Bedingungen hierfür sind aber nach Jacobi und Clebsch bekannt; insbesondere sind sie durch Herrn Frobenius in eine zu algebraischen Untersuchungen sehr geeignete Form gebracht worden*). In Rücksicht auf den vorliegenden Zweck wähle ich indessen das folgende Verfahren, jene Bedingungen zu erhalten.**)

Man bringe die Gleichungen:

$$0 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1r} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2r} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{rr} & \frac{\partial\varphi}{\partial \varphi_r} \\ p_{l1} & p_{l2} & \cdots & p_{lr} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_l} \end{vmatrix}, \quad l = r+1, \ldots n$$

durch die immer mögliche Division mit der nicht verschwindenden Determinante

$$P = \begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{r1} & \cdots & p_{rr} \end{vmatrix}$$

auf die Form:

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_l} + \sum_1^n{}_p \frac{\partial\varphi}{\partial x_p} a_{lp} = (A_l)\varphi\,.$$

Alsdann zieht die Existenz von irgend zwei der Gleichungen

$$(A_l)\varphi = 0, \qquad (A_m)\varphi = 0$$

die neue Gleichung

$$(A_m A_l - A_l A_m)\varphi = 0$$

*) Frobenius, Ueber das Pfaff'sche Problem. Journal v. Borchardt LXXXII, S. 270 ff.

**) Vgl. Boole, Treatise on differential equations, supplementary volume p. 74 ff.

nach sich. Da in derselben weder $\frac{\partial \varphi}{\partial x_l}$ noch $\frac{\partial \varphi}{\partial x_m}$ vorkommen, so kann dieselbe keine Folge aus den übrigen Gleichungen sein, d. h. es müssen ihre sämmtlichen Coefficienten verschwinden. Und die hieraus hervorgehenden Bedingungen sind nothwendig und hinreichend, wenn das System der Differentialausdrücke (1) ein *vollständiges* sein soll,*) oder wenn die $n - r$ Gleichungen $(A_l)\,\varphi = 0$ r von einander in Bezug auf die Variablen $x_1 \ldots x_r$ unabhängige Integrale

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$$

besitzen sollen.

Unter der letzteren Voraussetzung aber giebt es dann auch ebenso viele Systeme von Multiplicatoren λ_s, welche durch $\lambda_{s1}, \lambda_{s2}, \ldots, \lambda_{sr}$ bezeichnet sein mögen, deren Determinante

$$(3) \qquad \Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \ldots & \lambda_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{r1} & \ldots & \lambda_{rr} \end{vmatrix}$$

nicht verschwinden kann. Bezeichnet man nämlich die Functionaldeterminante der φ in Bezug auf die $x_1 \ldots x_r$ durch F, so folgt unmittelbar aus der leicht zu erweisenden Relation

$$P\Lambda = F$$

dass auch Λ nicht Null sein kann, da nach den über die Integrale φ gemachten Voraussetzungen F nicht verschwindet. Sind aber die Bedingungen des vollständigen Systems nicht erfüllt, so kann es möglich sein, dass eine kleinere Anzahl von totalen Differentialen nach dem angegebenen Verfahren sich ermitteln lässt, so dass etwa die gegebenen Ausdrücke (1) sich ersetzen lassen durch die folgenden:

$$d\varphi_1, d\varphi_2, \ldots, d\varphi_h,$$

$$\sum_1^n{}^i\, p_{h+1,i}\, dx_i, \ \ldots \ \sum_1^n{}^i\, p_{ri}\, dx_i.$$

In diesem Falle ist jedoch die Möglichkeit einer weiteren Reduction noch nicht völlig ausgeschlossen, sobald es sich um die gleich Null gesetzten Ausdrücke (1) handelt. Denn da bei der vorliegenden Untersuchung in den Integralen

$$\varphi_1 = \text{const}, \ \varphi_2 = \text{const}, \ldots, \ \varphi_h = \text{const},$$

die Constanten ganz specielle, durch die Anfangspositionen der System-

*) Vgl. insbesondere den hierfür von Herrn A. Mayer gelieferten Beweis in dessen Abhandlung diese Annalen V, S. 450 ff. Nach der daselbst eingeführten Bezeichnungsweise bilden die gleich Null gesetzten Ausdrücke 1) ein *unbeschränkt integrables System*, wenn die obigen Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind.

punkte etwa bestimmte Werthe haben, kann es geschehen, dass durch Elimination von h Variabeln mit Hülfe jener Gleichungen die übrigen Differentialausdrücke wieder einer weiteren Behandlung zugänglich werden. In jedem Falle aber wird sich nach dem obigen Verfahren entscheiden lassen, in welcher Weise das System der Gleichungen $\sum p_{ri}\,dx_i = 0$ durch explicite Gleichungen und andere Differentialrelationen sich ersetzen lässt.

Man übersieht nun leicht, dass, falls überhaupt eine Reduction in dem einen oder anderen Sinne auf r explicite Gleichungen

$$\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_r = 0$$

möglich ist, an Stelle der Differentialgleichungen

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + \sum_1^r \nu_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n$$

auch gleich die direct zu bildenden

$$(4) \qquad m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = m_i x_i'' = X_i + \sum_1^r \mu_s p_{si}$$

angesetzt werden können.*) Diese letztere Form ist die einzig mögliche, wenn, wie im folgenden vorausgesetzt werden soll, das System der gegebenen Differentialrelationen keiner weiteren Reduction fähig ist, oder überhaupt von einer weiteren directen Behandlung derselben zunächst ganz abgesehen werden soll, was im Interesse einer symmetrischen Rechnungsweise vortheilhaft erscheinen kann.

Zur Einführung neuer Variablen kann man sich auch hier des L a g r a n g e - H a m i l t o n'schen Integrals

$$\int \left(T + U + \sum_1^r \mu_s p_s \right) dt$$

bedienen, falls man unter T die lebendige Kraft $\frac{1}{2} \sum (m_i x_i'^2)$ des Systemes, unter U und p_s aber Symbole versteht, welche durch die Gleichungen

$$\delta U = \sum X_i \,\delta x_i,$$
$$\delta p_s = \sum p_{si} \,\delta x_i, \quad s = 1, \ldots, r$$

definirt sind. Dagegen lässt sich die Umformung der Gleichungen nicht mehr auf ein eigentliches Variationsproblem zurückführen, *viel-*

*) Der Einfachheit halber werde ich die Variabelen x_i, y_i, z_i sämmtlich durch das System x_i bezeichnen, in welchem der Index i von 1 bis n geht.

mehr bildet die Eigenschaft des Systemes (1), *ein vollständiges zu sein, hierzu die nothwendige und hinreichende Voraussetzung.*

Soll nämlich die Variation des Integrales

$$\int (T + U)\,dt$$

unter Voraussetzung der zu (1) gehörigen Bedingungen, welche nunmehr in der Form

$$\sum_1^n {}^i\, p_{si}\, x_i' = 0, \quad s = 1, \ldots, r \tag{5}$$

geschrieben werden mögen, verschwinden, so erhält man durch Bildung von

$$\delta \int \left(T + U + \sum_1^n {}^i \sum_1^r {}^s \lambda_s\, p_{si}\, x_i' \right) dt = 0$$

in bekannter Weise die Gleichung

$$0 = \sum_1^n {}^k \left[\frac{\partial T}{\partial x_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x_k'} + X_k - \sum_1^r {}^s \frac{d\lambda_s}{dt}\, p_{sk} \right] \delta x_k$$

$$+ \sum_1^n {}^{i,k} \sum_1^r {}^s \lambda_s\, (sik)\, x_i'\, \delta x_k,$$

in der

$$(sik) = -(ski) = \frac{\partial p_{si}}{\partial x_k} - \frac{\partial p_{sk}}{\partial x_i}$$

gesetzt worden ist. Damit nun dieselbe, falls weitere Relationen zwischen den Variationen δ nicht vorhanden sind, auf die Gleichungen der Mechanik führe, müssen, da alsdann auch die λ_r keiner weiteren Beschränkung unterworfen werden dürfen, die Gleichungen

$$\sum_1^n {}^i\, (sik)\, x_i' = \sum_1^r {}^t\, \mu_t^s\, p_{tk}, \qquad \begin{array}{l} s = 1, \ldots, r, \\ k = 1, \ldots, n \end{array}$$

vermöge der Relationen (5) bestehen. Dazu ist aber das Verschwinden der Covarianten

$$\sum_1^n {}^i \sum_1^n {}^k\, (sik)\, x_i'\, y_k'$$

vermöge der Relationen

$$\sum_1^n {}^i\, p_{si}\, x_i' = 0, \qquad \sum_1^n {}^i\, p_{si}\, y_i' = 0, \quad s = 1, \ldots, r$$

erforderlich. Unter dieser Voraussetzung nun ist das System der Differentialausdrücke (1) ein vollständiges*), gleichzeitig aber wird

$$\frac{\partial T}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x_k'}\right) + X_k - \sum_1^r {}^s \mu_s p_{sk} = 0$$

falls

$$\mu_s = \frac{d\lambda_s}{dt} - \sum_1^r {}^h \lambda_h \mu_s^h$$

gesetzt wird. Dies aber war zu zeigen.

Die Multiplicatoren μ_s in den Gleichungen (4) kann man in der gewöhnlichen Weise aus den durch Differentiation nach t mittelst (5) sich ergebenden Gleichungen

$$(6) \qquad \sum_1^n {}^i \sum {}^k \frac{\partial p_{si}}{\partial x_k} x_i' x_k' + \sum_1^n {}^i X_i \frac{p_{si}}{m_i} + \sum_1^r {}^h \mu_h (hs) = 0$$

bestimmen, in denen zur Abkürzung

$$(sh) = (hs) = \sum_1^n {}^i \frac{p_{hi} p_{si}}{m_i}$$

gesetzt ist. Aus den Gleichungen (6) erhält man die Werthe der μ_s. Denn die Determinante der (hs), als Summe der Quadrate sämmtlicher partialer Determinanten r^{ten} Grades aus dem System der Coefficienten in den Gleichungen (5) kann nur dann verschwinden, wenn jene letzteren gegen die Voraussetzung nicht von einander unabhängig wären.**) Demnach werden die μ_s Functionen der x und gerade rationale ganze Functionen zweiten Grades der x'. Hiernach kann man dann überhaupt von den Relationen (5) ganz absehen, und allein die Differentialgleichungen (4) betrachten, aus denen die r integrabelen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \sum_1^n {}^i p_{si} x_i' = 0,$$

und bei geeigneter Constantenbestimmung wieder die (5) selbst folgen. Auf Grund dieser Festsetzungen wird es möglich, die sämmtlichen höheren Differentialquotienten der x zu bestimmen, sobald nur die Anfangspositionen und Geschwindigkeiten (letztere gemäss den Gleichungen (5)) angenommen sind; d. h. es werden die Lösungen im allgemeinen von der Form

---

*) Frobenius a. a. O.

**) Jacobi, a. a. O., S. 140.

(7) $$x_i = x_{i_0} + t x'_{i_0} + \frac{t^2}{2} x''_{i_0} + \cdots$$

wobei der Index 0 sich auf den Anfangszustand bezieht.

Mit der Eigenschaft der μ_s, gerade Functionen der Geschwindigkeitscomponenten zu sein, hängt der folgende Satz zusammen:

*Substituirt man in einem bestimmten Momente gleichzeitig bei allen Punkten des Systems an Stelle der vorhandenen Geschwindigkeiten die entgegengesetzt gleichen, so durchlaufen alle Punkte in umgekehrter Folge unter denselben Umständen eben diejenigen Bahnen, auf denen sie sich bis zu jenem Momente bewegt hatten.**)

Sind nämlich überhaupt die Gleichungen

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \psi_i$$

gegeben, in denen die ψ_i Functionen der x_i und gerade Functionen der x_i' sind, so werden die dritten Differentialquotienten ungerade Functionen dieser letzteren, die vierten wieder gerade und so fort in derselben Abwechselung. Bei gleichzeitiger Zeichenänderung aller x_i' werden also die Differentialquotienten gerader Ordnung ungeändert bleiben, die ungerader aber sämmtlich entgegengesetzte Werthe annehmen. Nimmt man nun an, dass die Bahnen von irgend einem Momente mit dem Index 0 ab sich für jeden Punkt in der Form (7) darstellen lassen, so ergiebt sich für negative t offenbar dieselbe Bewegung, als wenn man gleichzeitig allen x_i' entgegengesetztes Vorzeichen ertheilt hätte, womit der Satz bewiesen ist.

Im Vorbeigehen sei nur bemerkt, dass die *Principe der Bewegung des Massenmittelpunktes und der Flächen* genau so wie in der gewöhnlichen Mechanik gelten, sobald entsprechende Voraussetzungen über die Coefficienten in den (5) getroffen werden. Von grösserem Interesse scheint es, dass der *Satz der lebendigen Kraft*

$$T - T_0 = \sum_1^n \int_{t_0}^{t} X_i \, dx_i$$

bestehen bleibt**), insbesondere also auch das *Princip der lebendigen*

---

*) Vgl. eine Bemerkung von Loschmidt in den Abh. der Wiener Academie LXXIII, Bd. II, S. 128. Die eigentlichen Bedingungen für die Möglichkeit einer solchen Umkehrbarkeit eines Systems sind daselbst indessen nicht ausgesprochen.

**) Dies gilt auch für die aus dem oben behandelten Variationsproblem entspringenden Differentialgleichungen bei beliebiger Art der Relationen (5); allgemeiner noch, falls die linken Theile derselben durch irgend welche in den x_i' homogene Formen ersetzt werden. Auf Grund dieser Eigenschaft könnte man daran denken, überhaupt diejenigen Gleichungen zu denen man vermöge des

Kraft, sobald eine nur von den Coordinaten x_i abhängige *Kräftefunction* U (um beim einfachsten Falle stehen zu bleiben) vorhanden

---

Hamilton'schen Principes gelangt, als den obigen in gewissem Sinne gleichberechtigt anzusehen. Aber das Hamilton'sche Princip ist überhaupt kein eigentliches Princip der Mechanik, sondern hat — wenigstens zunächst — für dieselbe nur den Charakter einer analytischen Regel, welche *auch* die Differentialgleichungen der Bewegung liefert. Will man nicht von der Forderung abweichen, dass die Flächenelemente an sich nur normale Reactionen ausüben können, so hat man in der That an der obigen Fassung festzuhalten. Dasselbe geht übrigens, wie hier noch angeführt sei, auch aus dem *Princip des kleinsten Zwanges* hervor. Nach demselben muss nämlich die Summe

$$S = \sum_1^n {}^i \left[\frac{1}{m_i} x_i'' - X_i\right]^2$$

ein Maximum-Minimum sein in Rücksicht auf alle diejenigen Werthe der x_i'', welche den Bedingungen

$$F_s = \sum_1^n {}^{i,k} \frac{\partial p_{si}}{\partial x_k} x_i' x_k' + \sum_1^n {}^i p_{si} x_i'' = 0, \quad s = 1, \ldots r$$

genügen. Aus den Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x_k''}\left(S - \sum \lambda_s F_s\right) = 0$$

gehen aber unmittelbar die Gleichungen

$$\frac{1}{m_i} x_i'' = X_i + \sum_1^r {}^s \nu_s p_{si}$$

hervor. In der That besteht der einzige analytische Unterschied zwischen Problemen dieser Art und denen der üblichen Dynamik darin, *dass im ersteren Falle die Bedingungen nicht von vornherein explicite bekannt sind*, *dass aber vermöge der Integration des simultanen Systems zweiter Ordnung dieselben mit bestimmt werden und genau dieselbe Rolle hinsichtlich ihrer dynamischen Wirkung spielen*, *wie in den sonst gebräuchlichen Untersuchungen.*

Betrachtet man die Bewegung eines materiellen Punktes, der durch eine Differentialrelation beschränkt ist, so ergiebt die Integration der Bewegungsgleichungen seine Bahn in Gestalt einer mit Flächenelementen bedeckten Curve, eines *Streifens*, wie man sich ausdrücken kann. Construirt man nun eine Oberfläche $F = 0$, welcher dieser Streifen angehört, *so kann natürlich dieselbe Bewegung auch dadurch hervorgerufen werden*, *dass zu den Bewegungsgleichungen noch* $F = 0$ *als Bedingung hinzutritt*, *sobald nur der Anfangszustand ungeändert bleibt. Eine ähnliche Ueberlegung aber gilt, soweit ich sehe, auch für ein beliebiges Punktsystem,* so, dass man auch sagen kann:

Die Bewegungsvorgänge, *welche durch die erweiterte Form der Bewegungsgleichungen ausgedrückt werden*, *sind keine anderen*, *als diejenigen*, *welche auch mittelst der bisher üblichen Ausdrucksweise beschrieben werden können; aber sie liefern dieselben in einer principiell einfacheren Darstellung*, insofern z. B. an Stelle willkürlicher Flächen, von denen nur Streifen in Betracht kommen, vollkommen bestimmte Differentialrelationen in die Untersuchung eingeführt werden.

ist. Damit gelten dann aber auch diejenigen allgemeinen Sätze, welche unmittelbare Consequenzen dieses letzteren Principes sind (Eigenschaften der Niveauflächen etc. . .) Zu diesen pflegt man insbesondere das *Criterium der Stabilität* zu rechnen, nach welchem stabiles Gleichgewicht nur dann vorhanden ist, wenn die Kräftefunction für die Gleichgewichtslage des Systemes ein Maximum ist.

In der Theorie der Maxima und Minima wird freilich der Fall nicht behandelt, in dem die Function U der x ein Maximum oder Minimum sein soll in Rücksicht auf gegebene Differentialrelationen von der Form (5). In der That würde auch eine solche Forderung im allgemeinen keinen Sinn haben. Aber in Rücksicht auf alle Bahnen, welche von einer Gleichgewichtslage aus das System im Einklange mit jenen Bedingungen einschlagen kann, kann die Function U dieser Eigenschaft sehr wohl fähig sein. Denn bezeichnet man den Zuwachs irgend einer Coordinate von dem durch den Index 0, welcher der Gleichgewichtslage entsprechen möge, fixirten Momente an gerechnet, durch

$$tx'_{i_0} + \frac{t^2}{2} x''_{i_0} + \cdots,$$

so wird der Zuwachs ΔU von U, unter Voraussetzung der Gleichgewichtsbedingungen

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)_0 + \sum_1^r {}^s h_s p_{s i_0} = 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

die Form

$$\Delta U = \frac{t^2}{2} \sum_1^n {}^i \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} x_i'' + \sum_1^n {}^k \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} x_i' x_k' \right]_0 + \cdots$$

annehmen. Da aber

$$\sum_1^n {}^i p_{r i_0} x''_{i_0} + \sum_1^n {}^i \sum {}^k \left(\frac{\partial p_{ri}}{\partial x_k}\right)_0 x'_{i_0} x'_{k_0} = 0$$

ist, so erhält man

$$\Delta U = \frac{t^2}{2} \sum_1^n {}^i \sum {}^k \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_1^r {}^s h_s \frac{\partial p_{si}}{\partial x_k} \right]_0 x'_{i_0} x'_{k_0} + \cdots$$

Wofern nun die hier auftretende quadratische Form

$$\sum_1^n {}^i \sum {}^k \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_1^r {}^s h_s \frac{\partial p_{si}}{\partial x_k} \right]_0 x_i' x_k'$$

oder

(8) $$\sum a_{ik} x_i' x_k'$$

in Rücksicht auf die Relationen (5) *von definit negativem Charakter ist,*

kann man U die Maximumeigenschaft in Beziehung auf alle möglichen von der Gleichgewichtslage ausgehenden Bewegungen des Systems zuschreiben.

Im Anschluss an eine bekannte Schlussfolgerung der theoretischen Mechanik scheint somit das Paradoxon aufzutreten, dass auch hier dieser definite Charakter zur Stabilität des Gleichgewichtes nothwendig und hinreichend sei. Indessen ist es leicht, sich von der Unrichtigkeit dieser Behauptung zu überzeugen. Denn eine aufmerksame Betrachtung des Dirichlet'schen Beweises*) auf den sich jene Untersuchung zu stützen hat, zeigt, *dass derselbe nicht allein jene Maximumeigenschaft voraussetzt, sondern ausserdem verlangt, dass unabhängig von den beständig negativen Werthen des ΔU für die lebendige Kraft in der Anfangsposition* (als welche hier die Gleichgewichtslage selbst der grösseren Uebersichtlichkeit halber gedacht ist) *ein Werth festgesetzt werden könne, der kleiner als gewisse in jenem Beweise definirte Werthe von $-\Delta U$ ist.* Dies ist aber in dem vorliegenden Falle nicht möglich, wo ΔU (bis auf Glieder höherer Ordnung) durch eine mit t^2 multiplicirte quadratische Function der Anfangsgeschwindigkeiten ausgedrückt ist.

Eine nähere Untersuchung zeigt, dass jene quadratische Form (8) überhaupt mit der Frage der Stabilität in keinem entscheidenden Zusammenhange mehr steht, sobald man die in der Mechanik üblichen Voraussetzungen fallen lässt, (d. h. die Relationen (5) kein vollständiges System mehr bilden). Die wahren Bedingungen für eine stabile Bewegung erhält man dagegen durch *Untersuchung der kleinen Schwingungen des Systemes.*

Behufs derselben werde angenommen, dass in jeder Coordinate $x = x_0 + \xi$ die Zunahmen ξ so klein seien, dass die zweiten Potenzen derselben gegen die ersten zu vernachlässigen sind und dass auch die Geschwindigkeiten ξ' von der Ordnung dieser Kleinheit seien.

Aus den Differentialgleichungen

$$m_i x_i'' = \frac{\partial U}{\partial x_i} + \sum_1^r {}^s \mu_s p_{si}$$

wird nunmehr, wenn $x = x_0 + \xi$, $\mu_s = \mu_s^0 + \eta_s$ gesetzt wird,

---

*) Journal v. Crelle XXXII, S. 85, vgl. auch Schell, Mechanik S. 540. Die im Texte entwickelte Betrachtung scheint mir nicht überflüssig, weil namentlich in denjenigen Vorstellungen, die durch das Princip der Energie in die Fundamentaltheoreme der Mechanik eingeführt sind, lediglich mit dem Begriffe des Maximums operirt wird. Vgl. z. B. Thomson und Tait, Treatise on natural philosophy Vol I, § 292 (1883). Diese Betrachtungsweise ist allerdings völlig ausreichend, weil in der That die Kräftefunction dann ganz unabhängig von den x' und der Zeit in die Untersuchung eingeht.

$$m_i \xi_i'' = \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)_0 + \sum_1^r {}^s (\mu_s p_{si})_0 + \sum_1^n {}^i \sum {}^k \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_1^r {}^s \mu_s \frac{\partial p_{si}}{\partial x_k}\right)_0 \xi_k$$

$$+ \sum_1^r {}^s \eta_s p_{si_0},$$

während aus den Bedingungsgleichungen

$$\sum_1^n {}^i \sum {}^k \frac{\partial p_{si}}{\partial x_k} \xi_i' \xi_k' + \sum_1^n {}^i \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial x_i} p_{si} + \sum_1^r {}^h \mu_h (sh) = 0,$$

in Verbindung mit den Gleichungen des Gleichgewichts folgt, dass

$$\mu_s^0 = h_s,$$

bis auf Grössen, welche von der Kleinheit der ξ sind, zu setzen ist. Damit reducirt sich aber das obige System auf das folgende, in welchem die ζ wieder Grössen von derselben Ordnung der Kleinheit sind, wie vorhin,

$$m_i \xi_i'' = \sum_1^n {}^k \alpha_{ik} \xi_k + \sum_1^r {}^s \zeta_s p_{si_0}, \quad i = 1, \ldots, n$$

falls

$$\alpha_{ik} = \left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} + \sum h_s \frac{\partial p_{si}}{\partial x_k}\right\}_0$$

gesetzt wird, welches nun in Verbindung mit den Gleichungen

$$\sum_1^n {}^i \xi_i' p_{si_0} = 0, \quad s = 1, \ldots, r$$

aufzulösen sein wird. Zur Darstellung der ξ durch particuläre Integrale von der Form

$$\xi_i = e^{\lambda t} y_i$$

ist die Determinantengleichung $n - r^{\text{ten}}$ Grades aufzulösen:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - m_1 \lambda^2 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & p_{11} & \cdots & p_{r1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - m_2 \lambda^2 & \cdots & \alpha_{2n} & p_{12} & \cdots & p_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} - m_n \lambda^2 & p_{1n} & \cdots & p_{rn} \\ p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{rn} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung hat, wenn die quadratische Form (8) *definit negativ*

ist, Wurzeln, von denen vermöge einer bekannten von **Cauchy** herrührenden Ueberlegung nur behauptet werden kann, dass sie *im reellen Theile negativ sind.* Im vorliegenden Falle der Existenz stabiler Schwingungen ist aber zu verlangen, dass alle Wurzeln überhaupt reell und negativ seien.*) Ist diese Bedingung erfüllt, so erhält man in bekannter Weise für die ξ und ξ' Ausdrücke, welche fortwährend beliebig klein bleiben und gleichzeitig mit der der Betrachtung zu Grunde liegenden Annäherung den Bewegungszustand des Systemes vorstellen.

Es sind nun, wie man weiss, sämmtliche Wurzeln der obigen Gleichung reell, wenn die Determinante der α_{ik} eine symmetrische ist. Dies findet zunächst nur statt, wenn die sämmtlichen (sik) verschwinden. Es lässt sich aber auch dann diese symmetrische Anordnung in der obigen Gleichung herstellen, wenn die Differentialrelationen (5) zu einem vollständigen System gehören. Denn alsdann kann man in Rücksicht auf die unter 3) bemerkte Eigenschaft der Determinante Λ die μ_s^0 in der Gestalt

$$\mu_s^0 = \sum_1^r{}^h \lambda_{sh}^0 \nu_h$$

voraussetzen, wo die λ_{sh}^0 die der Gleichgewichtslage entsprechenden Werthe der Multiplicatoren des vollständigen Systemes sind. Nun ist aber:

$$\sum_1^r{}^h \lambda_{hs}\, p_{hi} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i}, \qquad \sum_1^r{}^k \lambda_{hs}\, p_{hk} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_k},$$

also auch

$$\sum^s \sum_1^r{}^h \nu_s \left(\frac{\partial \lambda_{hs}}{\partial x_k} p_{hi} - \frac{\partial \lambda_{hs}}{\partial x_i} p_{hk} \right) + \sum^s \sum_1^r{}^h \nu_s \lambda_{hs} (hik) = 0$$

$$i,\, k = 1, \ldots n$$

oder

$$\sum_1^r{}^h \mu_h^0 \left(\frac{\partial p_{hi}}{\partial x_k}\right)_0 + \sum^s \sum_1^r{}^h \nu_s \left(\frac{\partial \lambda_{hs}}{\partial x_k} p_{ri} \right)_0 = \sum_1^r{}^h \mu_h^0 \left(\frac{\partial p_{hk}}{\partial x_i}\right)_0 + \sum^s \sum_1^r{}^h \nu_s \left(\frac{\partial \lambda_{hs}}{\partial x_i} p_{hk} \right)_0$$

und durch diese Relationen lässt sich, wie man leicht sieht, bewirken, dass die obige Determinante zu einer symmetrischen umgewandelt wird; man hat nur die letzten r Reihen des horizontalen und verticalen Randes mit geeigneten Factoren multiplicirt zu den α_{ik} hinzugefügt

*) Vgl. auch **Thomson** und **Tait** a. a. O. § 344, § 385.

sich vorzustellen. Alsdann sind aber alle Wurzeln sicher reell und die vollständigen Criterien der Stabilität lassen sich also auch hier ohne weitergehende Untersuchungen *algebraisch* aus den p_{ik} und deren Differentialquotienten ermitteln.*)

Das *Princip des Jacobi'schen Multiplicators*, angewandt auf die Differentialgleichungen (4), (5), erfordert, dass sich für die partielle Differentialgleichung

$$\frac{d\log M}{dt} + \sum_1^r{}_s \sum_1^n{}_i \frac{1}{m_i} \frac{\partial \mu_s p_{si}}{\partial x_i'} = 0$$

ein (particuläres) Integral angeben lasse. Für die in derselben auftretenden Differentialquotienten der μ_s erhält man durch die von Jacobi gelehrte partielle Differentiation der (6) die r Gleichungen:

$$(9) \qquad \sum_1^r{}_h (sh) \frac{\partial \mu_h}{\partial x_i'} + 2\frac{dp_{si}}{dt} + \sum_1^n{}_k (ski)\, x_k' = 0$$

$$s = 1, \ldots r.$$

Bezeichnet man zur Abkürzung nun

$$\sum_1^r{}_s \frac{1}{m_i} \cdot \frac{\partial \mu_s p_{si}}{\partial x_i'}$$

durch H_i, so folgt zur Bestimmung dieser Grösse die Gleichung

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} (11) & \ldots & (1r) & 2\dfrac{dp_{1i}}{dt} + \sum_1^n{}_k (1ki)\, x_k' \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ (r1) & \ldots & (rr) & 2\dfrac{dp_{ri}}{dt} + \sum_1^n{}_k (rki)\, x_k' \\ p_{1i} & \ldots & p_{ri} & -\mathsf{H}_i m_i \end{vmatrix} = 0.$$

Werden die Determinante der (rs) durch Δ, ihre Unterdeterminanten durch Δ_{rs} bezeichnet, so erhält man aus (10)

$$\Delta \mathsf{H}_i + \sum_1^n{}_{k,h} \sum_1^r{}_s \left\{ 2\frac{dp_{hi}}{dt} + (hki)\, x_k' \right\} \frac{p_{si}}{m_i} \Delta_{hs} = 0,$$

---

*) Für diesen letzteren Fall enthält die obige Darstellung eine formell erweiterte Darlegung der Theorie der kleinen Schwingungen, welche seit Lagrange immer nur unter Voraussetzung expliciter unabhängiger Coordinaten behandelt zu sein scheint.

also wenn man nach i summirt und den Werth in die Multiplicatorgleichung einträgt

$$\Delta \frac{d \lg \mathsf{M}}{dt} = \sum_{1}^{r}{}^{h,s} \Delta_{hs} \frac{d(hs)}{dt} + \sum_{1}^{n}{}^{i,k} \sum_{1}^{r}{}^{h,s} (hki)\, x_k' \frac{p_{si}}{m_i} \Delta_{hs};$$

oder

$$(11) \qquad \Delta \frac{d \lg \mathsf{M}}{dt} = \frac{d\Delta}{dt} + \mathsf{A},$$

indem man die vierfache Summe rechts durch A bezeichnet. Hieraus ergiebt sich nur dann das Jacobi'sche Resultat $\mathsf{M} = \Delta$*), wenn die Form A identisch oder vermöge der Gleichungen (5) verschwindet, d. h. wenn entweder alle (hki) Null sind, oder wenn es r Grössen h_s giebt, welche die n Gleichungen

$$\sum_{1}^{n}{}^{i} \sum_{1}^{r}{}^{s,h} (hki) \frac{p_{si}}{m_i} \Delta_{hs} = \sum_{1}^{r}{}^{s} h_s p_{sk},$$

$$k = 1, \ldots, n$$

befriedigen. Multiplicirt man dieselben mit den Ausdrücken

$$\sum_{1}^{r}{}^{j} \frac{p_{jk}}{m_k} \Delta_{tj}$$

und summirt nach k, so entsteht

$$h_t \Delta = \sum_{1}^{n}{}^{i,k} \sum_{1}^{r}{}^{s,h,j} \Delta_{th} \Delta_{js} \frac{p_{hk} p_{si}}{m_i m_k} (jik).$$

Die rechte Seite aber wird, wenn man i mit k und dann h mit s vertauscht

$$\frac{1}{2} \sum (\Delta_{th} \Delta_{js} - \Delta_{ts} \Delta_{jh}) \frac{p_{hk} p_{si}}{m_i m_k} (jik);$$

somit entsteht, wenn man beiderseits den Factor Δ entfernt, vermöge einer bekannten Determinantenformel

$$h_t = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}^{i,k} \sum_{1}^{r}{}^{h,j,s} \frac{p_{hk} p_{si}}{m_i m_k} (jik)\, \Delta_{th,js},$$

wo nun $\Delta_{th,js}$ eine zweite Unterdeterminante von Δ bedeutet. Man hat damit die Bedingungen für die Existenz dieses Jacobi'schen Multiplicators in expliciter Form, falls man den gefundenen Werth von h_t in die obigen n Bedingungen einträgt.

---

*) Jacobi a. a. O. S. 132—141.

Ich untersuche jetzt die Form des Multiplicators unter der Voraussetzung, dass die Relationen (5) überhaupt ein vollständiges System bilden. Da die Determinante Λ nicht verschwindet, so kann man auch setzen

$$p_{si} = \sum_1^r{}^h \lambda'_{hs} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i}, \tag{12}$$

wo nunmehr die λ'_{hs} die Coefficienten der zur Substitution λ_{hs} reciproken Substitution bedeuten, deren Determinante $\Lambda' = \frac{1}{\Lambda}$ ist. Ferner wird

$$(st) = \sum_1^n{}^i \frac{p_{si}\,p_{ti}}{m_i} = \sum_1^r{}^j \lambda'_{hs}\lambda'_{jt} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\frac{1}{m_i} = \sum_1^n{}^{j,h} \lambda'_{hs}\lambda'_{jt}[hj],$$

so dass, wenn man mit Δ' die Determinante der

$$\sum_1^n{}^i \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\frac{1}{m_i} = [hj] = [jh]$$

bezeichnet, $\Delta = \Delta'\Lambda'^2$ sein wird. Führt man nun die Ausdrücke (12) in die Form A (11) ein, so ergiebt sich

$$\mathsf{A} = \sum_1^n{}^{i,k} \sum_1^r{}^{h,j,s} \left\{ (hki)\, x_k' \,\Delta_{hs}\, \lambda'_{js} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\frac{1}{m_i} \right\}.$$

Aus (12) findet man ferner

$$(hki) = \sum_1^r{}^t \left(\frac{\partial \lambda'_{th}}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_t}{\partial x_k} - \frac{\partial \lambda'_{th}}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi_t}{\partial x_i} \right),$$

also, da nach (12) und (5) die $\frac{d\varphi_t}{dt}$ sämmtlich Null sind

$$\sum_1^n{}^k (hki)\, x_k' = -\sum_1^r{}^t \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_i}\frac{d\lambda'_{th}}{dt}.$$

Darnach wird

$$\mathsf{A} = -\sum_1^n{}^i \sum_1^r{}^{h,s,j,t} \left\{ \frac{\Delta_{hs}}{m_i} \lambda'_{js} \frac{d\lambda'_{th}}{dt} \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right\},$$

oder, wenn man s mit h vertauscht und nach i summirt

$$\mathsf{A} = -\frac{1}{2} \sum_1^r{}^{h,s,j,t} \left\{ \Delta_{hs}[tj] \frac{d(\lambda'_{js}\lambda'_{th})}{dt} \right\}.$$

Diesen letzteren Ausdruck kann man aber leicht so umformen, dass die Formel für M (11) integrabel wird. Denn aus der Gleichung

$$\Delta = \Delta' \Lambda'^2$$

folgt durch totale Differentiation nach t

$$\Lambda'^2 \frac{d\Delta'}{dt} + \Delta' 2 \frac{\Lambda' d\Lambda'}{dt} = \sum_1^r {}^{h,s,j,t} \Delta_{hs} \lambda'_{js} \lambda'_{th} \frac{d[tj]}{dt}$$

$$+ \sum_1^r {}^{h,s,t,j} \Delta_{hs} [tj] \frac{d(\lambda'_{js} \lambda'_{th})}{dt}.$$

Beachtet man, dass in dieser Gleichung der erste Theil rechts dem ersten Theile links für sich gleich sein muss, da die Differentiation sich beidemale gar nicht auf die Substitutionscoefficienten erstreckt, so hat man

$$\Delta' 2 \frac{\Lambda' d\Lambda'}{dt} = \sum_1^r {}^{h,s,t,j} \Delta_{hs} [tj] \frac{d(\lambda'_{js} \lambda'_{th})}{dt},$$

oder

$$\mathsf{A} = - \frac{d\Lambda'}{dt} \frac{\Delta}{\Lambda'},$$

also

$$\frac{d \log \mathsf{M}}{dt} = \frac{d \log \Delta}{dt} - \frac{d \log \Lambda'}{dt},$$

mithin

$$\mathsf{M} = \frac{\Delta}{\Lambda'} = \Delta \Lambda$$

als Multiplicator, welcher freilich die Kenntniss der Determinante Λ voraussetzt, die im Allgemeinen ohne Integration des vollständigen Systems nicht zu ermitteln sein wird.

Die Form derselben giebt aber zu einer weiteren Bemerkung Veranlassung, welche, wie ich glaube, bei Untersuchungen über Multiplicatoren transformirter Systeme von Differentialgleichungen von Nutzen sein kann.

Das System der Differentialgleichungen

$$(13) \qquad m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + \sum_1^r {}^s \nu_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n$$

mit den Bedingungen

$$\varphi_1 = c_1, \cdots, \varphi_r = c_r,$$

in denen die c auch willkürliche Constanten sein mögen, hat nämlich den aus der Multiplicatorgleichung

$$\frac{d \log N}{dt} + \sum_1^n {}^i \sum_1^r {}^s \frac{1}{m_i} \frac{\partial \nu_s}{\partial x'_i} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} = 0$$

folgenden Jacobi'schen Multiplicator $N = \Delta'$, falls die Grössen v_s und deren Differentialquotienten durch die Gleichungen $\frac{d^2 \varphi_s}{dt^2} = 0$ bestimmt werden. Führt man nun an Stelle der Relationen $d\varphi_s = 0$ vermöge der Gleichungen (12) das äquivalente System (5) ein, so erhält die transformirte Multiplicatorgleichung

$$(14) \qquad \frac{d \log \mathsf{M}'}{dt} + \sum_1^n{}^i \sum_1^r{}^s \frac{1}{m_i} \frac{\partial \mu_s p_{si}}{\partial x_i'} = 0$$

unter der Voraussetzung, dass die partiellen Differentialquotienten der μ_s aus den transformirten Relationen $\frac{d^2 \varphi_h}{dt^2} = 0$, oder

$$(15) \qquad \sum_1^n{}^i x_i' \frac{dp_{hi}}{dt} - \sum_1^n{}^i \sum_1^r{}^s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} x_i' \frac{d\lambda'_{sh}}{dt} + \sum_1^r{}^s \mu_s [sh] + \sum_1^n{}^i \frac{X_i}{m_i} p_{hi} = 0,$$

bestimmt werden, die Form

$$\Delta \frac{d \log \mathsf{M}'}{dt} = \frac{d\Delta}{dt} - 2\Delta \frac{d \log \Lambda'}{dt},$$

also wird

$$\mathsf{M}' = \frac{\Delta}{\Lambda'^2} = \Delta' = N.$$

Der Multiplicator bleibt mithin, wie zu erwarten war, *ungeändert*. Anders aber ist es, wenn in den Gleichungen (15) der zweite Term links, welcher vermöge der Gleichungen $d\varphi_s = 0$ verschwindet, fortgelassen wird; man erhält dann die Gleichungen (9) und aus diesen, wie gezeigt, den neuen Multiplicator $\mathsf{M} = \Delta \Lambda$. Dies auf den ersten Anblick paradox erscheinende Resultat erklärt sich daraus, dass die Differentialgleichungen (13) nebst den Bedingungen $\frac{d^2 \varphi_s}{dt^2} = 0$ mit den 4) nebst den Bedingungen $\frac{d}{dt} \sum_1^r{}^i p_{si} x_i' = 0$ eben nicht durch blosse Transformation identisch werden, obwohl sie denselben völlig äquivalent sind.

In der That ergiebt sich aus der allgemeinen Jacobi'schen Theorie des Multiplicators ebenfalls — und diese Erkenntniss nebst der hierauf bezüglichen im Folgenden gegebenen Untersuchung verdanke ich einer gütigen Mittheilung des Herrn A. Mayer — *dass beide Formeln genau zu demselben Multiplicatorwerthe für die vermöge der Bedingungsgleichungen reducirten und dann nothwendigerweise mit einander identischen Systeme* (13) *und* (4) *führen.*

Dazu benutze man den bekannten Jacobi'schen Satz:

Sind von den n Differentialgleichungen:

$$\text{(A)} \qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \cdots, \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

k Integrale

$$\text{(B)} \qquad \varphi_1 = c_1, \cdots, \varphi_k = c_k$$

bekannt, so dass, indem man $x_1, \cdots, x_k$ aus (B) berechnet und die Substitution ihrer Werthe durch Einschliessung in Klammern [] anzeigt, mittelst dieser Integrale das System zurückgeführt wird auf $n - k$ Differentialgleichungen

$$\text{(C)} \qquad \frac{dx_{k+1}}{dt} = [X_{k+1}], \cdots, \frac{dx_n}{dt} = [X_n],$$

so liefert jeder Multiplicator M des Systemes (A) den Multiplicator

$$M' = \left[\frac{M}{\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k}}\right].$$

des Systemes (C), und dieser Satz gilt unverändert auch dann, wenn man den willkürlichen Constanten c bestimmte constante Werthe, z. B. sämmtlich den Werth Null beilegt, wenn man also nur diejenigen Lösungen des gegebenen Systemes (A) betrachtet, welche den particulären Integralen

$$\varphi_1 = 0, \cdots, \varphi_k = 0$$

genügen.

Nun besitzen die Jacobi'schen Differentialgleichungen (13) oder

$$\text{(16)} \qquad \frac{dx_i}{dt} = x_i', \quad \frac{dx_i'}{dt} = \frac{1}{m_i}\left\{X_i + \sum_1^r{}_s\, \nu_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i}\right\}, \quad i = 1, \cdots, n,$$

in denen die ν_s als Functionen der x und x' durch diejenigen Gleichungen definirt sind, welche durch die Substitutionen (16) aus den r Gleichungen

$$\text{(16')} \qquad \frac{d^2\varphi_s}{dt^2} = 0, \quad s = 1, \cdots, r$$

hervorgehen, die $2r$ Integrale

$$\frac{d\varphi_s}{dt} = c_s; \quad \varphi_s - t\frac{d\varphi_s}{dt} = \gamma_s.$$

Setzt man die c und γ hier gleich Null, so folgt aus dem angeführten Satze:

Ist M ein Multiplicator des Systemes (16), und hat man dann aus den r Gleichungen

$$\varphi_1 = 0 \cdots \varphi_r = 0$$

etwa $x_1 \ldots x_r$ als Functionen von $x_{r+1} \ldots x_n$ bestimmt und so das System (16) reducirt auf $n-r$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung zwischen $t, x_{r+1}, \ldots, x_n$, so wird nach Substitution der erhaltenen Werthe von $x_1 \ldots x_r$

$$M' = \frac{M}{\left(\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r}\right)^2} \tag{17}$$

ein Multiplicator dieses reducirten Systemes.

Wählt man andererseits willkürlich r^2 Functionen λ'_{hk} von $x_1 \ldots x_n$, deren Determinante Λ' nicht verschwindet, und setzt

$$\sum_1^r{}^k \lambda'_{hk} \frac{d\varphi_k}{dt} = \sum_1^n{}^i p_{hi} x'_i, \quad h = 1, \cdots, r, \tag{18}$$

so kann man die Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = x'_i, \quad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{1}{m_i}\left\{X_i + \sum_1^r{}^s \mu_s p_{si}\right\} \tag{19}$$

bilden, in denen die μ_s sich aus den r Gleichungen bestimmen, die durch die Substitutionen (19) aus den Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \sum_1^r{}^i (p_{hi} x'_i) = 0, \quad h = 1, \cdots, r \tag{19'}$$

entspringen, und diese Gleichungen (19), die an sich nicht identisch sind mit den (16), besitzen die r Integrale

$$\psi_h = \sum_1^r{}^k \lambda'_{hk} \frac{d\varphi_k}{dt} = c_h. \tag{20}$$

Bezeichnet man die Substitution der Werthe von $x'_1 \ldots x'_r$ aus diesen Integralen durch [ ], so lässt sich das System (19) zurückführen auf die $2n-r$ Differentialgleichungen

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = [x'_1], \cdots, \frac{dx_r}{dt} = [x'_r], \\ &\frac{dx_\tau}{dt} = x'_\tau, \quad \frac{dx'_\tau}{dt} = \frac{1}{m_\tau}\left\{X_\tau + \sum_1^r{}^s \mu_s p_{s\tau}\right\}, \quad \tau = r+1, \cdots, n. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Ist daher M ein Multiplicator des Systems (19), so ist wieder

$$N = \left[\frac{\mathsf{M}}{\sum \pm \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \psi_r}{\partial x_r}}\right] = \left[\frac{\mathsf{M}}{\Lambda' \sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r}}\right]$$

ein Multiplicator des reducirten Systemes (21). Dies gilt auch noch

wenn man von vornherein alle c in (20) gleich Null nimmt; dann aber folgt aus den particulären Integralsn $\psi_h = 0$ wiederum $\frac{d\varphi_k}{dt} = 0$ und das reducirte System (21) erhält also selbst wieder die r Integrale

$$(22) \qquad \varphi_k = \gamma_k$$

so dass weiter folgt:

Ist M ein Multiplicator von (19), und hat man dann die r Gleichungen $\varphi_1 = 0 \ldots \varphi_r = 0$ etwa nach $x_1 \ldots x_r$ aufgelöst und damit unter diesen Bedingungen das System (19), oder was nunmehr auf dasselbe führen muss, das System (16) zurückgeführt auf $n-r$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung zwischen $t, x_{r+1} \ldots x_n$, so wird durch Substitution der Auflösungen $x_1 \ldots x_r$

$$(23) \qquad \mathsf{M}' = \frac{\mathsf{M}}{\Lambda'\left(\sum \pm \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_r}\right)^2}$$

ein Multiplicator dieses reducirten Systemes.

Nach der Substitution der aus (22) folgenden Werthe von $x_1 \ldots x_r$ liefern ferner die Formeln (17) und (23) jeden beliebigen Multiplicator eines und desselben Systemes von Differentialgleichungen, sobald man für M und M passende Multiplicatoren der Systeme (16) und (19) setzt. Bei gegebenem M muss es also nothwendig ein M geben, für welches

$$[\mathsf{M}'] = [M']$$

oder

$$[\mathsf{M}] = [\Lambda' M]$$

wird, und diese Identität wird nicht aufgehoben, wenn man darin rückwärts jedes $\gamma_k = \varphi_k$ setzt. Also folgt endlich:

Jedem Multiplicator M des Jacobi'schen Systemes (16) *gehört ein durch die Formel*

$$\mathsf{M} = \frac{M}{\Lambda}$$

bestimmter Multiplicator des äquivalenten Systemes (19) *zu und umgekehrt;* welcher Satz für den Fall $M = \Delta' = \Delta\Lambda^2$ mit dem oben erhaltenen Resultate übereinkommt. —

Ich mache noch auf einen Fall aufmerksam, in dem der Multiplicator unmittelbar angegeben werden kann. Die Gleichungen (9) kann man auch in der Gestalt

$$\sum_1^r{}^h (sh) \frac{\partial\mu_k}{\partial x_i'} + \sum_1^r{}^h \sum_1^n{}^i \left(\frac{\partial p_{hi}}{\partial x_k} + \frac{\partial p_{hk}}{\partial x_i}\right) x_i' = 0$$

schreiben. Der Multiplicator kann daher jederzeit gleich Eins genommen werden, sobald für alle Werthe der Indices

$$\frac{\partial p_{hi}}{\partial x_k} + \frac{\partial p_{hk}}{\partial x_i} = 0$$

ist. Dann ist $\frac{\partial p_{ri}}{\partial x_i} = 0$ und $\frac{\partial^2 p_{hk}}{\partial x_i^2} = 0$; d. h. die p_{hi} müssen lineare Functionen der x sein. Man erhält

$$p_{hi} = \sum_1^n {}^k (a_{hik} x_k) + b_{hi},$$

wobei die Constanten a die Bedingungen $a_{hik} + a_{hki} = 0$ befriedigen müssen, und die Gleichungen $\sum p_{hi} x_i' = 0$ lauten in diesem Falle

$$\sum_1^n {}^{i,k} a_{hik}(x_k x_i' - x_i x_k') + \sum_1^n {}^i b_{hi} x_i' = 0;$$

bei der einfachsten Annahme von 3 Variabeln hat man

$$(a_1 + b_2 x_3 - b_3 x_2) x_1' + (a_2 + b_3 x_1 - b_1 x_3) x_2' + (a_3 + b_1 x_2 - b_2 x_1) x_3' = 0$$

d. h. *die Bewegung im linearen Complexe.**)

Bei dem immerhin abstracteren Charakter, welchen dynamische Probleme annehmen, falls man sich entschliesst, die bisher üblichen Annahmen über die Natur der Bedingungen eines unfreien Systems in dem im vorigen besprochenen Sinne zu erweitern,**) kann es sich hier nicht darum handeln, eine grössere Zahl von Beispielen solcher Bewegungen ausführlicher zu erörtern. Im folgenden werde ich daher zunächst nur von der Bewegung eines materiellen Punktes in einem P-E-System

$$p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + p_3\, dx_3 = 0$$

handeln, welcher Fall mit den typischen Beispielen der theoretischen Mechanik die grösste Uebereinstimmung zeigt.

Sind zunächst keine äusseren Kräfte vorhanden, so haben die Gleichungen der Bewegung eines Punktes, der mit beliebiger Anfangsgeschwindigkeit c in dem System sich bewegt, die Form

$$x_i'' = \lambda p_i,$$

die Bahn wird dann mit der constanten Geschwindigkeit c beschrieben, und die Normale des P-E-Systems liegt stets in der Krümmungsebene derselben; diese Curven geben zugleich die Gestalt eines im System gespannten im Gleichgewicht befindlichen vollkommen biegsamen unausdehnbaren Fadens an, sind aber nicht mehr geodätische Curven im System, was damit zusammenhängt, dass jene Lage natürlich nicht

---

*) Vgl. diese Annalen XXIII, S. 52.

**) Vgl. das in der Anmerkung S. 267 gesagte.

mehr durch die wirkliche Spannung des Fadens so wie bei einer Oberfläche erzielt werden kann.

Für den Krümmungshalbmesser ϱ derselben erhält man den Werth

$$\varrho = \frac{c^2}{\lambda \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$$

oder wenn

$$(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\lambda = -\sum \frac{\partial p_i}{\partial x_k} x_i' x_k' = P$$

gesetzt wird,

$$\varrho = \frac{c^2 \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}{P}.$$

Bei der Bewegung im linearen Complex ist der Nenner P gleich Null, in der That werden dann ja auch die Strahlen des Complexes selbst beschrieben werden müssen; im allgemeinen wird aber die Bahncurve eine Inflexion erhalten, wenn die Richtung der Geschwindigkeit mit einer der *Haupttangenten* des Systems zusammenfällt für welche P verschwindet.*) Ferner erhält man aus der Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_1' \\ x_1'' \\ x_1''' \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} x_1' \\ p_1 \\ \frac{dp_1}{dt} \end{vmatrix}$$

(in den Determinanten sind nur die ersten Verticalreihen angedeutet) für den Torsionsradius der Curve den Ausdruck

$$\frac{1}{c^2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)} \begin{vmatrix} x_i' \\ p_1 \\ \frac{dp_1}{dt} \end{vmatrix}.$$

Der hier auftretende Factor bestimmt gleich Null gesetzt die Richtungen der *Krümmungslinien* des P-E-Systems**) und damit diejenigen Richtungen mit denen die Geschwindigkeit zusammenfallen muss, damit die Bahn eine Wendungsebene erhält.

Unterliegt der Punkt der Wirkung beliebiger Kräfte mit den Componenten X, und bezeichnet man die Incremente seiner Coordinaten durch ξ_i, so findet man durch eine einfache Rechnung:

$$\sum_1^3{}^i \xi_i p_i + \frac{1}{2}\sum_1^3{}^{i,k} \xi_i \xi_k \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \frac{1}{6}\sum_1^3{}^{ikl} \xi_i \xi_k \xi_l \frac{\partial^2 p_i}{\partial x_k \partial x_l}$$

$$= \frac{t^3}{12}\sum_1^3{}^{i,k} (x_i' x_k'' - x_k' x_i'') \left(\frac{\partial p_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial x_i}\right).$$

*) a. a. O. S. 49.

**) Ebenda S. 71.

Bezeichnet man nun die linke Seite durch F, so muss jede Curve welche überhaupt beschrieben werden kann, mit der Fläche $F=0$ eine Osculation eingehen, welche zur Berührung dritten Grades wird, sobald die Schmiegungsebene der Bahn die Richtung in sich enthält, deren Cosinus den 3 Differenzen

$$\frac{\partial p_2}{\partial x_3}-\frac{\partial p_3}{\partial x_2},\quad \frac{\partial p_3}{\partial x_1}-\frac{\partial p_1}{\partial x_3},\quad \frac{\partial p_1}{\partial x_2}-\frac{\partial p_2}{\partial x_1}$$

oder

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \alpha_3$$

proportional sind. Die Normalkrümmungen und das Krümmungsmass jener Fläche geben gerade diejenigen Ausdrücke, welche ich in meiner früheren Betrachtung als Krümmungen des P-E-Systems bezeichnet*) und liefern für diese Grössen eine weitere anschauliche Bedeutung.

Die Gleichungen der geodätischen Linien ergeben sich dagegen durch ein eigentliches Variationsproblem in der Form:

$$\begin{aligned}
x_1'' &= -p_1\lambda' + \lambda[\alpha_2 x_3' - \alpha_3 x_2'],\\
x_2'' &= -p_2\lambda' + \lambda[\alpha_1 x_3' - \alpha_3 x_1'],\qquad \lambda' = \frac{d\lambda}{dt},\\
x_3'' &= -p_3\lambda' + \lambda[\alpha_3 x_1' - \alpha_1 x_3'],
\end{aligned}\tag{12}$$

auch sie werden mit constanter Geschwindigkeit beschrieben.**)

Handelt es sich darum, die Bewegung im *linearen Complex* zu untersuchen, so kann man die Gleichung desselben gleich in der vereinfachten Form

$$(x_2x_1' - x_1x_2') + a x_3' = 0 \tag{13}$$

voraussetzen. Die Bewegung eines schweren materiellen Punktes, bei welchem die Richtung der Beschleunigung der Schwere mit der Axe des Complexes parallel ist, erfolgt nach den Gleichungen

$$\begin{aligned}
x_1'' &= +\lambda x_2,\\
x_2'' &= -\lambda x_1,\\
x_3'' &= g + \lambda a.
\end{aligned}$$

Dabei wird

$$\lambda = -\frac{ag}{x_1^2 + x_2^2 + a^2}.$$

Bezeichnet man $x_1^2 + x_2^2$ durch r^2, so findet man vermöge des Principes der lebendigen Kraft

$$2gx_3 + \text{const.} = \frac{r^3 r''}{a^2} + r'^2 + rr''$$

während x_1 und x_2 den beiden Differentialgleichungen

$$x_1'' = -\frac{agx_2}{r^2+a^2},\qquad x_2'' = +\frac{agx_1}{r^2+a^2}$$

zu entnehmen sind.

---

*) a. a. O. S. 70.

**) Vgl. S. 266, Anmerkung.

Die Bewegung im linearen Complex unter dem Einflusse einer Kraft R, deren Richtungslinie auf der Axe senkrecht steht und dieselbe schneidet, bestimmt sich durch die Gleichungen

$$x_1'' = R\frac{x_1}{r} + \lambda x_2,$$
$$x_2'' = R\frac{x_2}{r} - \lambda x_1,$$
$$x_3'' = \lambda a.$$

Dabei wird $\lambda = 0$; es entstehen also hier Schraubenlinien im linearen Complexe, insbesondere auch eigentliche Complexschraubenlinien, sobald R dem Radiusvector proportional ist.

Die geodätischen Linien des linearen Complexes sind gegeben durch

$$x_1'' = -\lambda' x_2 - 2\lambda x_2',$$
$$x_2'' = +\lambda' x_1 + 2\lambda x_1',$$
$$x_3'' = -\lambda' a.$$

Bezeichnet man mit c_1, c_2, c_3 willkürliche Constanten, so ergiebt sich

$$x_3' = c_2 - \lambda a,$$
$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = c_1^2,$$
$$\lambda = \frac{c_3}{r^2 + a^2}$$

oder bei Einführung von Polarcoordinaten r, φ an Stelle von x_1 und x_2

$$r^2\varphi' = a x_3' = a\left(c_2 - \frac{c_3 a}{r^2 + a^2}\right).$$

Hieraus erhält man für $r^2 + a^2 = \varrho$

$$\frac{1}{2}\,\frac{d\varrho}{\sqrt{c_1^2\varrho - c_1^2 a^2 - \left(c_2 - c_3\frac{a}{\varrho}\right)^2\varrho}} = dt,$$

$$d\varphi = \frac{a}{\varrho - a^2}\left(c_2 - c_3\frac{a}{\varrho}\right)dt,$$

$$dx_3 = dt\left(c_2 - c_3\frac{a}{\varrho}\right).$$

In dem speciellen Falle, $\lambda = c_3$, $\lambda' = 0$ erhält man die Gleichungen der Complexschraubenlinien; für $\lambda = 0$ ergeben sich, wie es sein muss, die Geraden des Complexes selbst. Im allgemeinen wird t ein elliptisches Integral zweiter Gattung, während

$$x_3 - c_2 t = -c_3\frac{a}{2}\int\frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho^3(c_1^2 - c_2^2) + \varrho^2(2c_2c_3a - c_1^2a^2) - c_3^2a^2\varrho}}$$

ein elliptisches Integral erster Gattung wird. Auf eine nähere Untersuchung dieser transcendenten Curven soll hier nicht eingegangen werden; hervorzuheben wäre etwa der Fall $c_3 = c_2 a$, in welchem

$$d\varphi = a c_2 \frac{dt}{\varrho},$$

also

$$x_3 = c_2 t - a\varphi + c_4$$

wird. Ist endlich noch ausserdem $c_1^2 = c_2^2$, so wird

$$t = \frac{1}{2c_2 a}\int \frac{d\varrho\,\varrho}{\sqrt{\varrho(\varrho - a^2)}}, \quad d\varphi = \frac{1}{2}\int \frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho(\varrho - a^2)}},$$

und setzt man wieder $\varrho = r^2 + a^2$, so hat man

$$\frac{2r}{a} = e^{\varphi + c} - e^{-\varphi - c},$$

$$t = \frac{1}{2c_2 a}\left[r\sqrt{r^2 + a^2} + a^2\varphi\right] + c_5,$$

womit die Gleichungen dieser Bahncurven völlig bestimmt sind.

Ich erwähne endlich noch ein anderes Beispiel. Für die Bewegung zweier materieller Punkte, deren Massen — was übrigens gleichgültig ist — beide der Einheit gleich sind, mit den Coordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 sei die Gleichung

$$(x_1 - x_2)x_1' + (y_1 - y_2)y_1' + (z_1 - z_2)z_1' = 0$$

vorgeschrieben. Dann ist

$$x_2 = at, \quad y_2 = bt, \quad z_2 = ct$$

zu setzen, und für

$$\xi = x_1 - at, \quad \eta = y_1 - bt, \quad \zeta = z_1 - ct$$

hat man als Gleichungen, von denen die Bewegung des ersten Punktes abhängt

$$\text{(24)} \qquad \begin{aligned} \xi'' &= \lambda\xi, \\ \eta'' &= \lambda\eta, \\ \zeta'' &= \lambda\zeta, \end{aligned}$$

mit der Bedingung

$$\text{(25)} \qquad \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' + a\xi + b\eta + c\zeta = 0.$$

Aus (24) folgt

$$\text{(26)} \qquad \begin{aligned} \eta\zeta' - \zeta\eta' &= c_1, \\ \zeta\xi' - \xi\zeta' &= c_2, \\ \xi\eta' - \eta\xi' &= c_3, \\ c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta &= 0. \end{aligned}$$

Ferner ist nach dem Princip der lebendigen Kraft

$$\text{(27)} \quad \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 + 2(a\xi + b\eta + c\zeta) + a^2 + b^2 + c^2 = \text{const.} = h^2.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 &= r^2, & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= B^2, \\ a\xi + b\eta + c\zeta &= p, & ac_1 + bc_2 + cc_3 &= C, \\ a^2 + b^2 + c^2 &= A^2, \end{aligned}$$

$$q = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}, \quad q^2 = r^2(A^2B^2 - C^2) - p^2B^2$$

so wird aus (25) und (26)

$$(28) \qquad \begin{aligned} r^2\xi' &= -\xi p + c_2\zeta - c_3\eta, \\ r^2\eta' &= -\eta p + c_3\xi - c_1\zeta, \\ r^2\zeta' &= -\zeta p + c_1\eta - c_2\xi \end{aligned}$$

und aus (24), (25)

$$\lambda r^2 + \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 + a\xi' + b\eta' + c\zeta' = 0.$$

Aus (27), (28) findet man

$$\begin{aligned} r^2(a\xi' + b\eta' + c\zeta') &= q - p^2, \\ \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 &= h^2 - A^2 - 2p, \end{aligned}$$

also

$$(29) \qquad \lambda r^2 + h^2 - A^2 - 2p = \frac{p^2 - q}{r^2},$$

während aus (26) durch Quadriren und Addiren entsteht

$$(30) \qquad r^2[h^2 - A^2 - 2p] = B^2 + p^2.$$

Somit ist p und also auch q und λ eine bekannte Function von r. Die Integration der Gleichungen (24) ist damit auf die Ermittelung einer Centralbewegung zurückgeführt; die Bewegung selbst ist die eines Punktes $x_1\,y_1\,z_1$, der von einem beweglichen Centrum $x_2\,y_2\,z_2$ nach einem gewissen Gesetze angezogen wird. Zur Bestimmung der ξ, η, ζ bedient man sich indessen bequemer der folgenden Formeln.

Aus der Gleichung

$$r\frac{dr}{dt} = \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = -p$$

und der aus (30) folgenden

$$2r\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{B^2 + p^2}{h^2 - A^2 - 2p}\right)$$

findet man ohne weiteres t als Function von p, also damit auch r^2 aus (30), und endlich q aus der Gleichung

$$q = p^2 + r^2\frac{dp}{dt};$$

d. h. man kann ξ, η, ζ aus der letzten Gleichung (26) und den Werthen von p, q linear berechnen, wobei die 5 Constanten c_1, c_2, c_3, h, und die letzte Integrationsconstante aus den Anfangsbedingungen zu entnehmen sind.

Ich schliesse mit der folgenden Bemerkung. Bisher wurde vorausgesetzt, dass die p_{ik} in den gegebenen Differentialrelationen die Zeit

explicite nicht enthalten. Es werden aber die Gleichungen der Bewegung dieselbe Form beibehalten, wenn diese Beschränkung fallen gelassen wird. Im einfachsten Falle hat man ein mit der Zeit veränderliches P-E-System, und bei der Anwendung des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten hat man dasselbe in bekannter Weise als ruhend zu betrachten. Und von hier aus kann man zu dem allgemeineren Falle übergehen, wo Gleichungen von der Form

$$\sum_1^n{}^i p_{ri}\,dx_i + T_r dt = 0$$

gegeben sind, in denen die p_{ri} und T_r Functionen der x und der Zeit t sind. Die Bewegungsgleichungen erfahren auch hier keine Aenderung. In dieser Allgemeinheit hat man dann überhaupt den Fall, dass für das betreffende Problem eine gewisse Anzahl von ersten in den Differentialquotienten x_i' linearen Integralen vorgeschrieben ist. Andererseits aber ist dieser lineare Charakter nothwendig, wenn überhaupt eine Analogie mit den Gleichungen der Mechanik bestehen bleiben soll.

Dresden, Anfang September 1884.

Einige allgemeine Sätze über Raumcurven.

Von

ADOLF HURWITZ in Königsberg i. Pr.

I.

Werden die rechtwinkligen Coordinaten von vier Punkten P_0, P_1, P_2, P_3 durch die entsprechenden Indices von einander unterschieden, so stellt die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

bekanntlich das sechsfache Volumen des Tetraeders $P_0 P_1 P_2 P_3$ vor und zwar (bei bestimmter Orientirung der Coordinatenaxen) positiv oder negativ genommen, je nachdem ein Beobachter, dessen Füsse sich bei P_0 befinden und welcher gegen $P_0 P_1$ gelehnt nach P_2 hinsieht, den Punkt P_3 zur Linken oder zur Rechten hat.

Es mögen nun P_2 und P_3 als zwei unendlich nahe Punkte einer Curve angenommen und dementsprechend ihre Coordinaten mit x, y, z resp. $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ bezeichnet werden, so ist die obige Determinante gleich

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ dx & dy & dz & 0 \end{vmatrix}.$$

Hiernach stellt das Integral

$$\frac{1}{6}\int \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ dx & dy & dz & 0 \end{vmatrix},$$

erstreckt über einen Curvenbogen, das positiv oder negativ genommene Volumen des Körpers dar, welcher begrenzt wird durch die den Curvenbogen aus P_0 und P_1 projicirenden Kegelstücke und durch die beiden Ebenen, welche die Endpunkte des Bogens mit der Geraden $P_0 P_1$ verbinden.

Hierbei ist jedoch zunächst vorausgesetzt, dass diese Begrenzungstheile nur ein *einziges* Stück des Raumes einschliessen. Trifft diese Voraussetzung nicht zu, so dass also die genannten Kegelstücke und Ebenen mehrere Stücke des Raumes vom Volumen $S_1, S_2, \ldots$ resp. vollständig begrenzen, so ist das obige Integral gleich einer linearen Combination aus S_1, S_2, ..., wobei die Coefficienten ganze Zahlen sind. Diese Zahlen sind in jedem Falle leicht durch Zerlegung des Bogens und entsprechende Zerlegung des Integrals in einzelne Theile zu ermitteln*).

Beschreibt der Punkt (x, y, z) eine geschlossene Curve im Raume, so giebt das durch die ganze Curve erstreckte Integral

$$\frac{1}{6}\int\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ dx & dy & dz & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\int\begin{vmatrix} x_0 - x_1, & y_0 - y_1, & z_0 - z_1 \\ x\ , & y\ , & z \\ dx\ , & dy\ , & dz \end{vmatrix},$$

das Volumen, welches von den beiden die Curve von P_0 und P_1 aus projicirenden Kegeln eingeschlossen wird.

Wird der Punkt P_1 festgehalten, so hat dieses Volumen den constanten Werth $\varkappa$ für alle Punkte P_0, welche in der Ebene

$$\varkappa = (X - x_1)\,\frac{1}{6}\int(y\,dz - z\,dy) + (Y - y_1)\,\frac{1}{6}\int(z\,dx - x\,dz) + (Z - z_1)\,\frac{1}{6}\int(x\,dy - y\,dx)$$

liegen, wenn X, Y, Z die laufenden Coordinaten bezeichnen. Die Stellung dieser Ebene ist aber unabhängig von $\varkappa$ wie auch von x_1, y_1, z_1, sie ist also durch die geschlossene Curve vollständig bestimmt. Hieraus folgert man den

Satz 1. *„Zu jeder geschlossenen Curve im Raume gehört eine bestimmte Schaar paralleler Ebenen von folgender Eigenschaft. Nimmt man in irgend zwei Ebenen Σ_0 und Σ_1 dieser Schaar je einen Punkt P_0 resp. P_1 an, so begrenzen die Kegel, welche die geschlossene Curve von P_0 und P_1 aus projiciren, ein Raumstück, welches dasselbe Volumen hat, wo auch immer der Punkt P_0 in der Ebene Σ_0 und der Punkt P_1 in der Ebene Σ_1 angenommen werden mag."*

---

*) Aehnliches ist im Folgenden mehrfach zu bemerken.

Wählt man die Gerade $P_0 P_1$ zur z-Axe, so ergiebt sich für das betrachtete Volumen der Ausdruck

$$\frac{z_0 - z_1}{3} \int \frac{x\,dy - y\,dx}{2} = \frac{\varrho}{3} \cdot F,$$

wo ϱ die Entfernung der Punkte P_0 und P_1 von einander und F den Inhalt der Projection der geschlossenen Curve auf eine zu $P_0 P_1$ senkrechte Ebene bedeutet.

Nach dem vorhergehenden Satze bleibt daher das Product $\varrho \cdot F$ constant, wenn der Punkt P_1 festgehalten wird, während P_0 sich in Σ_0 bewegt. Es verhalten sich daher die verschiedenen Projectionen F der Curve umgekehrt, wie die entsprechenden Entfernungen $\varrho = P_1 P_0$. Die Projection wird demnach am grössten, wenn $P_1 P_0$ am kleinsten wird, d. h. wenn $P_1 P_0$ zu Σ_0 senkrecht ist. Also folgt

Satz 2. *„Die Projection der geschlossenen Curve auf die Ebenen der im Satze* 1 *genannten Schaar hat eine grössere Fläche als die Projection der Curve auf irgend eine nicht zu jener Schaar gehörige Ebene"* *).

Da das Product $\varrho \cdot F$ mit ϱ und F constant bleibt, so ergiebt sich unmittelbar der

Satz 3. *„Zeichnet man auf einen Cylinder von beliebiger Basis eine geschlossene (jede Erzeugende des Cylinders im Allgemeinen nur einmal treffende) Curve und projicirt dieselbe von irgend zwei Punkten aus, deren Verbindungsgerade zu den Erzeugenden des Cylinders parallel läuft, so ist das von den Projectionskegeln eingeschlossene Volumen dasselbe für alle überhaupt möglichen Curven der genannten Art."*

Schliesslich sei noch bemerkt, dass man den wesentlichen Inhalt des Satzes 1. auch so formuliren kann:

„Man denke sich eine beliebige geschlossene Fläche (z. B. eine Kugel) und auf dieser eine in sich zurücklaufende Curve C gezeichnet. Einen der beiden Theile, in welche die Fläche durch diese Curve zerfällt, entferne man, so dass eine Art offener Schale übrig bleibt, deren Rand von der Curve C gebildet wird. Nun projicire man die Curve von irgend einem Punkte P aus durch einen geradlinigen Kegel und beachte das Volumen des Raumstückes, welches von der Kegelfläche und jener Schale eingeschlossen wird. Der Ort aller Punkte P, für welche dieses Volumen einen gegebenen Werth besitzt, ist eine bestimmte Ebene Σ, und die zu wechselnden Werthen des Volumens gehörenden Ebenen Σ sind sämmtlich unter einander parallel."

Für den Fall, dass die Curve C eine *ebene* Curve ist, leuchtet die Richtigkeit des Satzes unmittelbar ein.

---

*) Die Existenz einer solchen Maximalprojection ist bekannt. Siehe z. B. R. Hayward in den Proceedings of the London Mathem. Society Bd. 4, pag. 289.

II.

Ein Curvenbogen $P_0 P_1$ habe die Eigenschaft, dass jede durch seine Endpunkte P_0 und P_1 gehende Ebene den Bogen ausser in P_0 und P_1 höchstens noch *ein* Mal schneidet. Dann werden die Kegelstücke, welche den Bogen von P_0 und P_1 aus projiciren, ein einziges Raumstück vollständig begrenzen. *Das Volumen dieses Raumstückes möge mit V_b bezeichnet werden.*

Sind x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten der Punkte P_0 und P_1 resp., so ist der analytische Ausdruck des genannten Volumens

$$V_b = \pm \frac{1}{6} \int \begin{vmatrix} x_0 - x_1, & y_0 - y_1, & z_0 - z_1 \\ x \quad , & y \quad , & z \\ dx \quad ; & dy \quad , & dz \end{vmatrix},$$

das Integral erstreckt über den Curvenbogen von P_0 bis P_1.

Andererseits betrachte man die Tangenten und Schmiegungsebenen des Bogens in den Endpunkten P_0 und P_1. Die Tangente in P_0 treffe die Schmiegungsebene von P_1 in dem Punkte Q_0, die Tangente in P_1 treffe die Schmiegungsebene von P_0 in dem Punkte Q_1. *Das Volumen des von den vier Punkten P_0, Q_0, P_1, Q_1 gebildeten Tetraeders möge mit V_t bezeichnet werden.*

Die beiden Volumina V_b und V_t stehen nun in einer beachtenswerthen Beziehung zu einander, welche in folgendem Satze ausgesprochen ist:

„*Nimmt man auf einer beliebigen Curve irgend einen nicht singulären Punkt P_0 an und lässt einen zweiten, veränderlichen Punkt P_1 der Curve allmählich dem festbleibenden Punkte P_0 unendlich nahe kommen, so ist der Grenzwerth, welchem das Verhältniss der zu dem Bogen $P_0 P_1$ gehörenden Volumina V_b und V_t zustrebt, gleich $\frac{3}{10}$, also unabhängig sowohl von der Natur der Curve als auch von der Wahl des festen Punktes P_0 auf derselben.*“

Zum Beweise möge der Punkt P_0 als Anfangspunkt der Coordinaten, die Tangente resp. Schmiegungsebene in P_0 als x-Axe resp. xy-Ebene angenommen werden. Die Gleichungen der Curve auf dieses Coordinatensystem bezogen seien:

$$\begin{aligned} x &= A \cdot t + \cdots, \\ y &= B \cdot t^2 + \cdots, \\ z &= C \cdot t^3 + \cdots, \end{aligned}$$

und es möge dem Punkte P_1 der Parameter t_1 zugehören. Die Coefficienten A, B, C werden von Null verschieden sein, da P_0 als ein nicht singulärer Punkt der Curve vorausgesetzt ist. Das Volumen V_b, welches zum Bogen $P_0 P_1$ gehört, ist nun in erster Annäherung:

$$V_b = \pm \frac{1}{6} \int_0^{t_1} \begin{vmatrix} At_1, & Bt_1^2, & Ct_1^3 \\ At\ , & Bt^2\ , & Ct^3 \\ A\ , & 2Bt, & 3Ct^2 \end{vmatrix} dt$$

$$= \pm \frac{1}{5.6.6} \cdot A \cdot B \cdot C \cdot t_1^6.$$

Die Coordinaten der Eckpunkte des Tetraeders $P_0\,Q_0\,P_1\,Q_1$ sind resp.

$$\begin{array}{llll} (P_0) & x = 0\ , & y = 0\ , & z = 0\ , \\ (P_1) & x = At_1 + \cdots, & y = Bt_1^2 + \cdots, & z = Ct_1^3 + \cdots, \\ (Q_0) & x = \frac{1}{3} At_1 + \cdots, & y = 0\ , & z = 0\ , \\ (Q_1) & x = \frac{2}{3} At_1 + \cdots, & y = \frac{1}{3} Bt_1^2 + \cdots, & z = 0\ . \end{array}$$

Also das Volumen V_t desselben in erster Annäherung:

$$V_t = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0\ , & 0\ , & 0\ , & 1 \\ At_1\ , & Bt_1^2\ , & Ct_1^3, & 1 \\ \frac{2}{3} At_1, & \frac{1}{3} Bt_1^2, & 0\ , & 1 \\ \frac{1}{3} At_1, & 0\ , & 0\ , & 1 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{9} \cdot A \cdot B \cdot C \cdot t_1^6.$$

Folglich ist

$$\lim \frac{V_b}{V_t} = \frac{1}{5.6.6} : \frac{1}{6.9} = \frac{3}{10},$$

was zu beweisen war.

Dieser Satz ist das räumliche Analogon zu einem bekannten Satze aus der Geometrie der Ebene:

Das Verhältniss eines unendlich kleinen Curvensegments zu der Fläche des Dreiecks, welches aus der begrenzenden Sehne und den Tangenten in den Endpunkten der letzteren gebildet wird, besitzt den Werth $\frac{2}{3}$ *).

Die Analogie lässt sich noch weiter verfolgen. In der Ebene giebt es eine Curve, nämlich die Parabel, für welche jener Satz nicht nur für unendlich kleine Segmente, sondern auch für beliebige endliche Segmente gilt. Im Raume besteht der entsprechende Satz:

„*Die zu einem beliebigen Bogen einer cubischen Parabel* (*Raumcurve* 3. *Ordnung*, *welche die unendlich ferne Ebene osculirt*) *gehörenden Volumina* V_b *und* V_t *verhalten sich wie* 3 *zu* 10."

---

*) Siehe z. B. Völler, Grunert's Archiv Bd. 31, — Schlömilch, Zeitschrift für Mathem. u. Physik Bd. 4, pag. 163.

Zum Beweise bemerke man, dass irgend zwei cubische Parabeln affin stets so aufeinander bezogen werden können, dass zwei beliebig gewählten Punkten der einen Curve zwei beliebig gewählte Punkte der andern Curve entsprechen. Daraus geht hervor, dass das im Satze genannte Verhältniss dasselbe ist für irgend zwei verschiedene Bogen derselben oder verschiedener cubischen Parabeln. Da das Verhältnis für unendlich kleine Bogen den Werth $\frac{3}{10}$ besitzt, so ist es allgemein gleich $\frac{3}{10}$.

Die letzten beiden Sätze lassen sich noch dadurch ergänzen, dass man das Volumen V_b' in Betracht zieht, welches die Ebenen $Q_0 Q_1 P_0$, $Q_0 Q_1 P_1$ und die den Bogen $P_0 P_1$ von Q_0 und Q_1 aus projicirenden Kegelstücke einschliessen. Es gilt nämlich die Proportion

$$V_b : V_b' : V_t = 3 : 9 : 10$$

für jeden Bogen einer cubischen Parabel und für unendlich kleine Bogen einer beliebigen Curve.

Göttingen, Mai 1883.

Metrische Eigenschaften der cubischen Parabel (Raumcurve 3. O.)

Von

H. Schroeter in Breslau.

Unter den Raumcurven dritter Ordnung besitzt die cubische Parabel, welche die unendlich-entfernte Ebene zur Schmiegungsebene hat, eine Anzahl metrischer Eigenschaften analog denen der ebenen Parabel, welche die unendlich-entfernte Gerade zur Tangente hat. Der Bestimmung eines Parabelsegments von Archimedes und den von Moebius*) entdeckten Eigenschaften über ein- und umbeschriebene Dreiecke der Parabel stehen analoge Beziehungen der cubischen Parabel zur Seite, welche im Folgenden abgeleitet werden sollen.

1. Bekanntlich wird eine festgehaltene Schmiegungsebene der cubischen Parabel von der Gesammtheit ihrer Schmiegungsebenen in den Tangenten einer ebenen Parabel (Schmiegungskegelschnitt) durchschnitten, und die sämmtlichen Tangenten der cubischen Parabel durchbohren die festgehaltene Schmiegungsebene in den Punkten dieser Schmiegungsparabel. Die Schnittlinie zweier Schmiegungsebenen $\alpha\,\beta$ einer cubischen Parabel ist daher gleichzeitig Tangente der beiden Schmiegungsparabeln $\alpha^{(2)}\ \beta^{(2)}$ in diesen Ebenen.

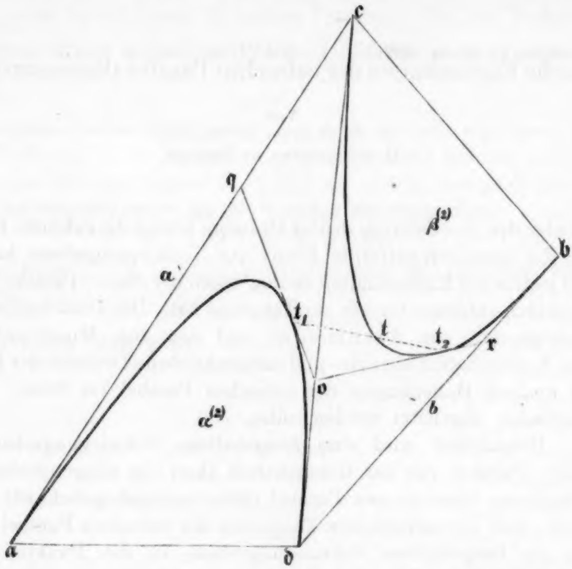
Nimmt man daher in zwei beliebigen (verschiedenen) Ebenen $\alpha\,\beta$ zwei Parabeln $\alpha^{(2)}\ \beta^{(2)}$ so an, dass sie die Schnittlinie $|\alpha\,\beta|$ berühren, und zwar die Parabel $\beta^{(2)}$ in $\mathfrak{c}$, die Parabel $\alpha^{(2)}$ in $\mathfrak{d}$, so kann man die Gesammtheit der Schmiegungsebenen der cubischen Parabel dadurch erhalten, dass man von einem veränderlichen Punkte $\mathfrak{o}$ der Schnittlinie $|\alpha\,\beta|$ die beiden noch übrigen Tangenten an die Parabeln $\alpha^{(2)}\ \beta^{(2)}$ legt und durch eine Ebene verbindet. Diese Verbindungsebene ist allemal eine Schmiegungsebene der cubischen Parabel, und lässt man den veränderlichen Punkt $\mathfrak{o}$ die ganze Gerade $|\alpha\,\beta|$ durchlaufen, so erhält man sämmtliche Schmiegungsebenen.

Legt man aus $\mathfrak{c}$ die zweite Tangente an $\alpha^{(2)}$, welche in $\mathfrak{a}$ berühre, und aus $\mathfrak{d}$ die zweite Tangente an $\beta^{(2)}$, welche in $\mathfrak{b}$ berühre, so sind $|\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}| = a$ und $|\mathfrak{d}\,\mathfrak{b}| = b$ die Tangenten der cubischen Parabel in den

*) A. F. Moebius, Der barycentrische Calcul, S. 230 u. 392.

Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ (als Schnittlinien zweier unendlich-naher Schmiegungsebenen) und man hat in jeder der beiden Schmiegungsebenen α β Tangente und Berührungspunkt der cubischen Parabel.

Die vier Punkte $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$ $\mathfrak{d}$ sind die Ecken eines Tetraeders, welches



„Schmiegungstetraeder" für die Sehne $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}|$ der cubischen Parabel genannt werden soll, und so construirt wird:

Sind in zwei Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ einer cubischen Parabel die Tangenten a und b, die Schmiegungsebenen α und β, die Schnittpunkte:

$$(a,\ \beta) = \mathfrak{c}, \quad (b,\ \alpha) = \mathfrak{d},$$

so ist $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ das zur Sehne $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}|$ gehörige Schmiegungstetraeder der cubischen Parabel.

Legt man aus einem beliebigen Punkte $\mathfrak{o}$ der Schnittlinie

$$|\alpha\,\beta| = |\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}|$$

die beiden noch übrigen Tangenten an die Schmiegungsparabeln $\alpha^{(2)}$ $\beta^{(2}$ und bezeichnet die Berührungspunkte:

$$\mathfrak{t}_1 \text{ und } \mathfrak{t}_2,$$

so wird die Ebene

$$[\mathfrak{o}\,\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_2] = \tau$$

eine Schmiegungsebene, die Gerade

$$|\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_2| = t$$

eine Tangente der cubischen Parabel sein (als Schnittlinie zweier unendlich-naher Schmiegungsebenen), und der Berührungspunkt der Tangente wird so gefunden:

Die Schmiegungsebene $[\mathfrak{o}\, \mathfrak{t}_1\, \mathfrak{t}_2] = \tau$ enthält selbst eine neue Schmiegungsparabel $\tau^{(2)}$, welche die drei Seiten des Dreiecks $\mathfrak{o}\, \mathfrak{t}_1\, \mathfrak{t}_2$ berührt und zwar die Tangente $|\mathfrak{t}_1\, \mathfrak{t}_2| = t$ in dem gesuchten Punkte $\mathfrak{t}$ der cubischen Parabel. Da nun die Schnittlinie $|\alpha\, \tau|$ die beiden Schmiegungsparabeln $\alpha^{(2)}\, \tau^{(2)}$ in den Punkten berührt, in welchen die Tangenten a und t die Ebenen τ und α treffen, so wird, wenn wir die Schnittpunkte

$$(|\mathfrak{o}\, \mathfrak{t}_1|,\ a) = \mathfrak{q},$$
$$(|\mathfrak{o}\, \mathfrak{t}_2|,\ b) = \mathfrak{r}$$

bezeichnen, die Schmiegungsparabel $\tau^{(2)}$ die Geraden $|\mathfrak{o}\, \mathfrak{t}_1|$ und $|\mathfrak{o}\, \mathfrak{t}_2|$ in $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$ berühren und hierdurch vollständig bestimmt sein; also ist auch ihr Berührungspunkt $\mathfrak{t}$ mit der Tangente $|\mathfrak{t}_1\, \mathfrak{t}_2| = t$ leicht zu construiren. Wir sind nunmehr in der Lage, sämmtliche Schmiegungsebenen, Tangenten und Punkte der cubischen Parabel von den beiden gegebenen Schmiegungskegelschnitten $\alpha^{(2)}\, \beta^{(2)}$ aus zu construiren, indem wir den Punkt $\mathfrak{o}$ die ganze Schnittlinie $|\alpha\, \beta|$ durchlaufen lassen.

Aus der bekannten Eigenschaft der ebenen Parabel: „Irgend zwei feste Tangenten einer ebenen Parabel werden von der Gesammtheit der Parabeltangenten in zwei projectiv-ähnlichen Punktreihen geschnitten" folgt sofort eine fundamentale Eigenschaft der cubischen Parabel:

Sind $\alpha\, \beta$ zwei beliebige Schmiegungsebenen, $\gamma\, \delta$ zwei andere, so sind die Schnittlinien $|\alpha\, \beta|$ und $|\alpha\, \gamma|$ Tangenten der Schmiegungsparabel $\alpha^{(2)}$, werden also von sämmtlichen Tangenten derselben, oder auch von sämmtlichen Schmiegungsebenen der cubischen Parabel in zwei projectiv-ähnlichen Punktreihen geschnitten. Ebenso sind $|\gamma\, \alpha|$ und $|\gamma\, \delta|$ Tangenten der Schmiegungsparabel $\gamma^{(2)}$, werden also ebenfalls von sämmtlichen Schmiegungsebenen in zwei projectiv-ähnlichen Punktreihen geschnitten, folglich werden auch die auf $|\alpha\, \beta|$ und $|\gamma\, \delta|$ ausgeschnittenen Punktreihen projectiv-ähnlich sein. Nennt man nun die Schnittlinie zweier beliebigen Schmiegungsebenen einen *„Schmiegungsstrahl"*, so folgt der Satz:

Irgend zwei Schmiegungsstrahlen einer cubischen Parabel werden allemal von der Gesammtheit der Schmiegungsebenen in zwei projectiv-ähnlichen Punktreihen geschnitten.

Insbesondere ist auch jede Tangente der cubischen Parabel als ein Schmiegungsstrahl aufzufassen (als Schnittlinie zweier unendlich-naher Schmiegungsebenen), also werden auch irgend zwei Tangenten der cubischen Parabel, oder eine Tangente und ein beliebiger Schmiegungsstrahl von der Gesammtheit der Schmiegungsebenen allemal in zwei projectiv-ähnlichen Punktreihen geschnitten.

2. Sind $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ zwei beliebige Punkte einer cubischen Parabel $a\,b$ die Tangenten, $\alpha\,\beta$ die Schmiegungsebenen in denselben, und bezeichnet man die Schnittpunkte

$$(a, \beta) = \mathfrak{c}, \qquad (b, \alpha) = \mathfrak{d},$$

so sind $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ die Ecken des zur Sehne $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}|$ gehörigen Schmiegungstetraeders. Die Gegenkanten

$$|\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}|$$

desselben sind ein Paar conjugirte Strahlen in dem zur cubischen Parabel gehörigen Nullsystem. Die Parabel in der Ebene α, welche die Geraden $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}|$ und $|\mathfrak{d}\,\mathfrak{c}|$ in den Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{d}$ berührt und dadurch vollständig bestimmt ist, wird die Schmiegungsparabel $\alpha^{(2)}$ sein; die Parabel in der Ebene β, welche die Geraden $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}|$ und $|\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}|$ in den Punkten $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ berührt, ist die Schmiegungsparabel $\beta^{(2)}$.

Legt man aus einem Punkte $\mathfrak{o}$ der Schnittlinie $|\alpha\beta| = |\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}|$ an die Parabeln $\alpha^{(2)}\,\beta^{(2)}$ die noch übrigen Tangenten

$$|\mathfrak{o}\,\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{q}|, \qquad |\mathfrak{o}\,\mathfrak{t}_2\,\mathfrak{r}|$$

welche in $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ berühren und deren Schnittpunkte mit a und b die Punkte

$$(|\mathfrak{o}\,\mathfrak{t}_1|\,a) = \mathfrak{q}, \qquad (|\mathfrak{o}\,\mathfrak{t}_2|\,b) = \mathfrak{r}$$

sind, so ist $[\mathfrak{o}\,\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_2] = \tau$ eine Schmiegungsebene $|\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_2| = t$ die Tangente in derselben an der cubischen Parabel, und ihr Berührungspunkt $\mathfrak{t}$ wird durch das Verhältniss bestimmt:

$$\frac{\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}}{\mathfrak{t}\,\mathfrak{t}_2} = \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}\,\mathfrak{c}} = \frac{\mathfrak{q}\,\mathfrak{t}_1}{\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{o}} = \frac{\mathfrak{c}\,\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}\,\mathfrak{d}} = \frac{\mathfrak{o}\,\mathfrak{t}_2}{\mathfrak{t}_2\,\mathfrak{r}} = \frac{\mathfrak{d}\,\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}\,\mathfrak{b}}$$

wegen der oben (1.) bemerkten Aehnlichkeit der projectiven Punktreihen.

Von dem willkürlich auf $|\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}|$ gewählten Punkt $\mathfrak{o}$ hängt also die Schmiegungsebene τ, die Tangente t und der Berührungspunkt $\mathfrak{t}$ in einfacher Weise ab. Wir bestimmen die Lage des Punktes $\mathfrak{o}$ durch das Verhältniss

$$\frac{\mathfrak{d}\,\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}\,\mathfrak{c}} = \frac{m}{n}$$

also

$$\frac{\mathfrak{d}\,\mathfrak{o}}{\mathfrak{d}\,\mathfrak{c}} = \frac{m}{m+n}, \qquad \frac{\mathfrak{c}\,\mathfrak{o}}{\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}} = \frac{n}{m+n}.$$

Legen wir diesem Verhältniss alle möglichen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ bei, so durchläuft $\mathfrak{o}$ die ganze unendlich lange Gerade $|\alpha\beta|$ und $\mathfrak{t}$ die ganze cubische Parabel, eine eindeutige Abbildung der Punkte der geraden Linie auf die Punkte der cubischen Parabel. Legen wir dem Verhältniss $\frac{m}{n}$ nur die positiven Werthe von 0 bis ∞ bei, so durchläuft $\mathfrak{o}$ die Strecke $|\mathfrak{d}\,\mathfrak{c}|$ von $\mathfrak{d}$ bis $\mathfrak{c}$ und der Punkt $\mathfrak{t}$ den Curvenbogen der cubischen Parabel von $\mathfrak{b}$ bis $\mathfrak{a}$, welcher in das Schmiegungstetraeder $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ hineinfällt.

Da $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ und $|\mathfrak{c}\mathfrak{d}|$ conjugirte Strahlen des zur cubischen Parabel gehörigen Nullsystems sind, so wird die Ebene $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{o}]$ zum Nullpol den Punkt $\mathfrak{o}$ auf $|\mathfrak{c}\mathfrak{d}|$ haben, und da durch $\mathfrak{o}$ die Schmiegungsebene τ geht, so muss ihr Nullpol $\mathfrak{t}$ (d. h. ihr Berührungspunkt) in der Nullebene des Punktes $\mathfrak{o}$ d. h. in der Ebene $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{o}]$ liegen; folglich liegen die vier Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{o}\mathfrak{t}$ in einer Ebene oder, was dasselbe sagt:

Die Gerade $|\mathfrak{o}\mathfrak{t}|$ *trifft die Sehne* $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$.

Bezeichnen wir den Treffpunkt:

$$(\mathfrak{o}\mathfrak{t},\, \mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathfrak{p}$$

so lässt sich das Verhältniss $\frac{\mathfrak{t}\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}\mathfrak{p}}$ leicht ausdrücken durch $\frac{m}{n}$.

Bezeichnen wir nämlich das Volumen eines Tetraeders $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ durch die Zusammenstellung der Buchstaben, welche seine vier Ecken benennen, in der gegebenen Reihenfolge, und fassen nach dem Vorgange von Moebius dieses Volumen als positiv auf, wenn wir das Auge in die erste Ecke $\mathfrak{a}$ hineinversetzen, auf die Seitenfläche $[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]$ herabsehen, den Umring desselben in der Reihenfolge $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ durchlaufen und eine directe Drehrichtung sehen, (wie sie der Zeiger einer Uhr beschreibt) dagegen als negativ, wenn wir die entgegengesetzte Drehrichtung erblicken, dann ist z. B.

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = -(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{c})$$

und durch jede Vertauschung zweier Buchstaben wird das Volumen entgegengesetzt.

Für irgend fünf Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{e}$ im Raume gilt aber die Beziehung:

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = (\mathfrak{e}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) - (\mathfrak{e}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{a}) + (\mathfrak{e}\mathfrak{d}\mathfrak{a}\mathfrak{b}) - (\mathfrak{e}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})$$

wie auch immer die fünf Punkte im Raume liegen mögen*).

Dies vorausgeschickt bemerken wir nur noch, dass zwei Tetraeder mit gleicher Grundfläche sich wie ihre Höhen verhalten und diese wieder wie die Abstände der beiden Spitzen von dem Treffpunkte ihrer Verbindungslinie und der Grundfläche; demgemäss wird:

$$\frac{\mathfrak{t}\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}\mathfrak{p}} = \frac{(\mathfrak{t}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})}{(\mathfrak{o}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})}; \quad \frac{(\mathfrak{o}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})}{(\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})} = \frac{\mathfrak{o}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \frac{n}{m+n}$$

also

$$\frac{(\mathfrak{t}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})}{(\mathfrak{d}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})} = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{\mathfrak{t}\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}\mathfrak{p}}$$

und ähnlich

$$\frac{(\mathfrak{t}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d})}{(\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d})} = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{\mathfrak{t}\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}\mathfrak{p}};$$

da aber

$$(\mathfrak{d}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = -(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}),$$
$$(\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})$$

ist, so wird

$$\frac{(\mathfrak{t}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}) - (\mathfrak{t}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})}{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})} = \frac{\mathfrak{t}\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}\mathfrak{p}}.$$

---

*) Moebius, Der barycentrische Calcul S. 23 u. 25.

Ferner haben wir:

$$\frac{(\mathfrak{tacd})}{(\mathfrak{t}_2\mathfrak{acd})} = \frac{\mathfrak{t}\,\mathfrak{t}_1}{\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_1} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}}{\mathfrak{t}\,\mathfrak{t}_2} = \frac{n}{m}; \quad \frac{\mathfrak{t}\,\mathfrak{t}_1}{\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_1} = \frac{n}{m+n}$$

also

$$\frac{(\mathfrak{tacd})}{(\mathfrak{t}_2\mathfrak{acd})} = \frac{n}{m+n} \;\Big|\; \frac{(\mathfrak{t}_2\mathfrak{acd})}{(\mathfrak{racd})} = \frac{n}{m+n} \;\Big|\; \frac{(\mathfrak{racd})}{(\mathfrak{bacd})} = \frac{n}{m+n}$$

$$\frac{(\mathfrak{tacd})}{(\mathfrak{bacd})} = \frac{n^3}{(m+n)^3}$$

und in gleicher Weise:

$$\frac{(\mathfrak{tbcd})}{(\mathfrak{abcd})} = \frac{m^3}{(m+n)^3}$$

also da

$$(\mathfrak{bacd}) = -(\mathfrak{abcd}),$$

ist

$$\frac{(\mathfrak{tbcd}) - (\mathfrak{tacd})}{(\mathfrak{abcd})} = \frac{m^3+n^3}{(m+n)^3}.$$

Bemerken wir nun, dass für die fünf Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{t}$ die Moebius'sche Identität gilt:

$$(\mathfrak{abcd}) = (\mathfrak{tbcd}) - (\mathfrak{tcda}) + (\mathfrak{tdab}) - (\mathfrak{tabc})$$
$$= (\mathfrak{tbcd}) - (\mathfrak{tacd}) + (\mathfrak{tabd}) - (\mathfrak{tabc})$$

so folgt

$$1 = \frac{\mathfrak{tp}}{\mathfrak{op}} + \frac{m^3+n^3}{(m+n)^3}$$

also

$$\frac{\mathfrak{tp}}{\mathfrak{op}} = \frac{3mn}{(m+n)^2}$$

ein Verhältniss, von dem wir später Gebrauch machen werden.

Aus den beiden Werthen der Verhältnisse

$$\frac{(\mathfrak{atcd})}{(\mathfrak{abcd})} = \frac{n^3}{(m+n)^3}, \qquad \frac{(\mathfrak{btdc})}{(\mathfrak{abcd})} = \frac{m^3}{(m+n)^3}$$

folgt

$$(\mathfrak{atcd})^{\frac{1}{3}} + (\mathfrak{btdc})^{\frac{1}{3}} = (\mathfrak{abcd})^{\frac{1}{3}}$$

d. h. *ist* $\mathfrak{t}$ *ein beliebiger Punkt auf dem Bogen* $(\mathfrak{ab})$ *der cubischen Parabel und* $(\mathfrak{abcd})$ *das zu der Sehne* $|\mathfrak{ab}|$ *zugehörige Schmiegungstetraeder, so ist die Summe der Cubikwurzeln aus den beiden Tetraedern, welche* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zu Spitzen, das Dreieck* $\mathfrak{tcd}$ *zur gemeinsamen Grundfläche haben, constant und zwar gleich der Cubikwurzel aus dem Volumen des Schmiegungstetraeders.*

Wir können auch das Verhältniss $\frac{\mathfrak{ap}}{\mathfrak{ab}}$ ermitteln; da $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{o}$ in einer Ebene liegen, und $\mathfrak{p} = (\mathfrak{ab}, \mathfrak{to})$ ist, so folgt

$$\frac{\mathfrak{ap}}{\mathfrak{pb}} = \frac{(\mathfrak{ato})}{(\mathfrak{otb})} = \frac{(\mathfrak{cato})}{(\mathfrak{cotb})} = \frac{(\mathfrak{toca})}{(\mathfrak{tbco})},$$

$$\frac{(\mathfrak{toca})}{(\mathfrak{tdca})} = \frac{n}{m+n} \;\Big|\; \frac{(\mathfrak{tbco})}{(\mathfrak{tbcd})} = \frac{n}{m+n}$$

also ist

$$\frac{(\mathfrak{toca})}{(\mathfrak{tbco})} = \frac{(\mathfrak{tdca})}{(\mathfrak{tbcd})}.$$

Nun haben wir aber vorhin ermittelt:

$$\frac{(\mathfrak{t}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})}{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})} = \frac{m^3}{(m+n)^3}, \qquad \frac{(\mathfrak{t}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{a})}{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})} = \frac{n^3}{(m+n)^3},$$

folglich wird

$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}\mathfrak{b}} = \frac{n^3}{m^3}$$

und

$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{p}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \frac{n^3}{m^3+n^3}; \qquad \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{p}}{\mathfrak{b}\mathfrak{a}} = \frac{m^3}{m^3+n^3}.$$

3. Die drei Punkte $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{t}$ der cubischen Parabel bilden ein derselben einbeschriebenes Dreieck, dessen Seiten die drei Sehnen

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{t}| \quad |\mathfrak{b}\mathfrak{t}| \quad |\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$$

sind; zu jeder derselben gehört ein Schmiegungstetraeder; diese sind in gleicher Weise gelesen

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{t}_1; \quad \mathfrak{b}\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{t}_2; \quad \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}.$$

Die Verhältnisse der Volumina dieser drei Tetraeder zu einander lassen sich sehr einfach durch das Verhältniss $\frac{m}{n}$ ausdrücken; es ist nämlich:

$$\frac{(\mathfrak{t}\mathfrak{a}\mathfrak{q}\mathfrak{t}_1)}{(\mathfrak{t}_2\mathfrak{a}\mathfrak{q}\mathfrak{t}_1)} = \frac{n}{m+n} \;\Big|\; \frac{(\mathfrak{t}_2\mathfrak{a}\mathfrak{q}\mathfrak{t}_1)}{(\mathfrak{r}\mathfrak{a}\mathfrak{q}\mathfrak{t}_1)} = \frac{n}{m+n} \;\Big|\; \frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{a}\mathfrak{q}\mathfrak{t}_1)}{(\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{q}\mathfrak{t}_1)} = \frac{n}{m+n}$$

$$\frac{(\mathfrak{t}\mathfrak{a}\mathfrak{q}\mathfrak{t}_1)}{(\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{q}\mathfrak{t}_1)} = \frac{n^3}{(m+n)^3}$$

$$\frac{(\mathfrak{a}\mathfrak{q}\mathfrak{t}_1)}{(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{t}_1)} = \frac{n}{m+n} \;\Big|\; \frac{(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{t}_1)}{(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{o})} = \frac{n}{m+n} \;\Big|\; \frac{(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{o})}{(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d})} = \frac{n}{m+n}$$

$$\frac{(\mathfrak{a}\mathfrak{q}\mathfrak{t}_1)}{(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d})} = \frac{n^3}{(m+n)^3} = \frac{(\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{q}\mathfrak{t}_1)}{(\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d})}.$$

Hiernach wird

$$\frac{(\mathfrak{a}\mathfrak{t}\mathfrak{q}\mathfrak{t}_1)}{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})} = \frac{n^6}{(m+n)^6}$$

und in gleicher Weise

$$\frac{(\mathfrak{b}\mathfrak{t}\mathfrak{r}\mathfrak{t}_2)}{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})} = \frac{m^6}{(m+n)^6};$$

Bezeichnen wir also

das Schmiegungstetraeder für die Sehne $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{t}|$ durch δ_1,
" " " " " $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{t}|$ " δ_2,
" " " " " $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}|$ " Δ,

so ergiebt sich die Relation:

$$\delta_1^{\frac{1}{6}} + \delta_2^{\frac{1}{6}} = \Delta^{\frac{1}{6}}$$

d. h. *beschreibt man ein Dreieck in eine cubische Parabel und bestimmt die den Seiten desselben als Sehnen zugehörigen Schmiegungstetraeder, so ist die sechste Wurzel aus dem Volumen des der grössten Sehne zugehörigen Schmiegungstetraeders gleich der Summe der sechsten Wurzeln aus den beiden andern.* Verändert man also den Punkt $\mathfrak{t}$ auf dem

Bogen ($\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$) der cubischen Parabel, so bleibt die Summe der sechsten Wurzeln aus den beiden zu den Sehnen $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{t}|$ und $|\mathfrak{t}\,\mathfrak{b}|$ gehörigen Schmiegungstetraedern constant und zwar gleich der sechsten Wurzel aus dem Volumen des Schmiegungstetraders, welches zur Sehne $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}|$ gehört.

Dieser Satz ist einer Erweiterung fähig, indem man an Stelle des Dreiecks ein der cubischen Parabel einbeschriebenes (unebenes) Polygon treten lässt und dasselbe in Dreiecke zerlegt, die sich an einander schliessen; auch lässt sich, wie wir später sehen werden, ein Polygon herstellen, von dem $(n-1)$ Seiten lauter gleiche Schmiegungstetraeder liefern. Der obige Satz ist analog dem von Moebius aufgestellten Satze für die ebene Parabel $\delta_1^{\frac{1}{3}} + \delta_2^{\frac{1}{3}} + \Delta^{\frac{1}{3}}$ (Barycent. Calcul S. 230).

Aus der oben (in 2.) gefundenen Beziehung

$$\frac{(\mathfrak{t}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) - (\mathfrak{t}\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d})}{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})} = \frac{m^3 + n^3}{(m+n)^3}$$

folgt

$$\frac{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) - (\mathfrak{t}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) + (\mathfrak{t}\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d})}{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})} = \frac{3mn}{(m+n)^2}$$

und da

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) - (\mathfrak{t}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) + (\mathfrak{t}\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = (\mathfrak{t}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}) - (\mathfrak{t}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})$$

ist

$$\frac{(\mathfrak{t}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}) - (\mathfrak{t}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})}{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})} = \frac{3mn}{(m+n)^2},$$

$$\frac{(\mathfrak{c}\mathfrak{t}\mathfrak{a}\mathfrak{b}) - (\mathfrak{d}\mathfrak{t}\mathfrak{b}\mathfrak{a})}{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})} = \frac{3mn}{(m+n)^2}.$$

Die beiden Tetraeder ($\mathfrak{c}\mathfrak{t}\mathfrak{a}\mathfrak{b}$) und ($\mathfrak{d}\mathfrak{t}\mathfrak{b}\mathfrak{a}$) haben als gemeinschaftliche Grundfläche das von den drei Punkten $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{t}$ der cubischen Parabel gebildete Dreieck, als Spitzen $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$, und der Umring der gemeinsamen Grundfläche wird für beide Tetraeder in entgegengesetztem Sinne durchlaufen; nehmen wir nun an, dass $\mathfrak{o}$ zwischen den Punkten $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{c}$ gewählt ist, also $\mathfrak{t}$ ein Punkt des zwischen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$ liegenden Curvenstücks der cubischen Parabel wird, so liegen $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ auf entgegengesetzten Seiten von der Ebene des Dreiecks $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{t}$, folglich sind die Volumina beider Tetraeder ($\mathfrak{c}\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$) und ($\mathfrak{d}\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}$) positiv zu nehmen und ergeben zusammen ein Volumen, welches von den sechs Dreiecksflächen

$$\mathfrak{t}\mathfrak{a}\mathfrak{c},\quad \mathfrak{t}\mathfrak{c}\mathfrak{b},\quad \mathfrak{t}\mathfrak{b}\mathfrak{d},\quad \mathfrak{t}\mathfrak{d}\mathfrak{a},\quad \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c},\quad \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}$$

begrenzt wird; bezeichnen wir dies Volumen mit D, so ergiebt sich das Verhältniss

$$\frac{D}{\Delta} = 3\left(\frac{\delta_1}{\Delta} \cdot \frac{\delta_2}{\Delta}\right)^{\frac{1}{6}}$$

wo D die Summe der Volumina derjenigen beiden Tetraeder bedeutet, welche $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ zu Spitzen und das Dreieck $\mathfrak{a}\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{b}$ zur gemeinsamen Grundfläche haben.

Die Werthe der Verhältnisse

$$\sqrt{\frac{\delta_1}{\Delta}} = \frac{n^3}{(m+n)^3}, \quad \sqrt{\frac{\delta_2}{\Delta}} = \frac{m^3}{(m+n)^3}$$

ergeben

$$\frac{\sqrt{\delta_1} + \sqrt{\delta_2}}{\sqrt{\Delta}} = \frac{m^3 + n^3}{(m+n)^3},$$

$$\frac{\sqrt{\Delta} - \sqrt{\delta_1} - \sqrt{\delta_2}}{\sqrt{\Delta}} = \frac{3mn}{(m+n)^2} = \frac{D}{\Delta}$$

also

$$\Delta - D = \sqrt{\Delta}\,(\sqrt{\delta_1} + \sqrt{\delta_2})$$

eine Beziehung, die sich leicht in Worte kleiden lässt. Endlich haben wir (nach 2.) auch das Verhältniss:

$$\frac{D}{\Delta} = \frac{\mathfrak{t}\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}\mathfrak{p}}.$$

Wollen wir die beiden einzelnen Tetraeder bestimmen, als deren Summe das Volumen D auftritt, so bemerken wir, dass

$$\frac{(\mathfrak{t}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})}{(\mathfrak{o}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})} = \frac{\mathfrak{t}\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}\mathfrak{p}} = \frac{3mn}{(m+n)^2} \;\Big|\; \frac{(\mathfrak{o}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})}{(\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})} = \frac{n}{(m+n)}$$

ist, also

$$(\mathfrak{c}\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = \frac{3mn^2}{(m+n)^3}\,\Delta$$

und ähnlich

$$(\mathfrak{b}\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}) = \frac{3nm^2}{(m+n)^3}\,\Delta.$$

Wir wollen noch die Volumina einiger in der Figur auftretenden Tetraeder ermitteln, von denen wir später Gebrauch machen werden:

Trifft die Tangente in dem Punkte $\mathfrak{t}$ der cubischen Parabel die beiden Schmiegungsebenen α β in den Punkten $\mathfrak{t}_1$ $\mathfrak{t}_2$, wie sie oben bezeichnet wurden, so haben wir die Verhältnisse:

$$\frac{(\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{t}_1)}{(\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{q})} = \frac{\mathfrak{t}_1\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}\mathfrak{o}} = \frac{m}{m+n} \;\Big|\; \frac{(\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{q})}{(\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{a})} = \frac{m}{m+n}$$

$$\frac{(\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{t}_1)}{(\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{a})} = \frac{m^2}{(m+n)^2} = \frac{(\mathfrak{t}_2\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{t}_1)}{(\mathfrak{t}_2\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{a})};$$

$$\frac{(\mathfrak{t}_2\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{a})}{(\mathfrak{r}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{a})} = \frac{n}{m+n} \;\Big|\; \frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{a})}{(\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{a})} = \frac{n}{m+n}$$

$$\frac{(\mathfrak{t}_2\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{a})}{(\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{a})} = \frac{n^2}{(m+n)^2}$$

folglich

$$\frac{(\mathfrak{t}_2\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{t}_1)}{(\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{a})} = \frac{m^2n^2}{(m+n)^4} = \frac{(\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2)}{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{b})},$$

also

$$(\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_2) = \frac{m^2n^2}{(m+n)^4}\,\Delta.$$

Ferner haben wir:

$$\frac{(t_1\mathfrak{a}\mathfrak{b}t)}{(\mathfrak{q}\mathfrak{a}\mathfrak{b}t)}=\frac{m}{m+n}\ \Bigg|\ \frac{(\mathfrak{q}\mathfrak{a}\mathfrak{b}t)}{(\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{b}t)}=\frac{n}{m+n}\ \Bigg|\ \frac{(\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{b}t)}{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})}=\frac{3mn^2}{(m+n)^3}$$

$$\frac{(t_1\mathfrak{a}\mathfrak{b}t)}{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})}=\frac{3m^2n^3}{(m+n)^5}=\frac{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}t_1t)}{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})}$$

$$\frac{(t_2\mathfrak{a}\mathfrak{b}t)}{(\mathfrak{r}\mathfrak{a}\mathfrak{b}t)}=\frac{n}{m+n}\ \Bigg|\ \frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{a}\mathfrak{b}t)}{(\mathfrak{d}\mathfrak{a}\mathfrak{b}t)}=\frac{m}{m+n}\ \Bigg|\ \frac{(\mathfrak{d}\mathfrak{a}\mathfrak{b}t)}{(\mathfrak{d}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})}=\frac{3nm^2}{(m+n)^3}$$

$$\frac{(t_2\mathfrak{a}\mathfrak{b}t)}{(\mathfrak{d}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})}=\frac{3n^2m^3}{(m+n)^5}=\frac{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}tt_2)}{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})}$$

also

$$\frac{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}t_1t)+(\mathfrak{a}\mathfrak{b}tt_2)}{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})}=\frac{3m^2n^2}{(m+n)^4}.$$

Da aber $t_1\ t\ t_2$ in einer Geraden liegen, nämlich in der Tangente t an der cubischen Parabel, so ist

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,t_1\,t)+(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,t\,t_2)=(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,t_1\,t_2)$$

also

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,t_1\,t_2)=\frac{3m^2n^2}{(m+n)^4}\,\Delta.$$

Hieraus folgt:

Das Volumen des Tetraeders $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,t_1\,t_2)$ *ist dreimal so gross, als das Volumen des Tetraeders* $(\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,t_1\,t_2)$.

Aus den beiden Werthen

$$\frac{(t_2\mathfrak{d}\mathfrak{c}\mathfrak{a})}{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})}=\frac{n^2}{(m+n)^2},\quad \frac{(t_1\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{b})}{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})}=\frac{m^2}{(m+n)^2}$$

folgt auch die Beziehung:

$$(t_1\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{b})^{\frac{1}{2}}+(t_2\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a})^{\frac{1}{2}}=(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d})^{\frac{1}{2}},$$

welche sich leicht in Worte kleiden lässt.

Endlich werden in gleicher Weise die Tetraeder bestimmt:

$$(t_1t_2\mathfrak{d}\mathfrak{b})=\frac{m^4}{(m+n)^4}\,\Delta;\quad (t_2t_1\,\mathfrak{c}\mathfrak{a})=\frac{n^4}{(m+n)^4}\,\Delta,$$

woraus folgt

$$(t_1t_2\mathfrak{d}\mathfrak{b})^{\frac{1}{4}}+(t_2t_1\mathfrak{c}\mathfrak{a})^{\frac{1}{4}}=(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})^{\frac{1}{4}},$$

$$(t_1t_2\mathfrak{c}\mathfrak{d})=\sqrt{(t_1t_2\mathfrak{d}\mathfrak{b})\,.\,(t_2t_1\mathfrak{c}\mathfrak{a})},$$

d. h. in Worten:

Bestimmt man das zu einer beliebigen Sehne $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}|$ *einer cubischen Parabel zugehörige Schmiegungstetraeder* $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d})$, *und trifft irgend eine an dem Parabelbogen* $\widehat{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}$ *gezogene Tangente die Schmiegungsebenen* $\alpha\ \beta$ *in den resp. Punkten* $t_1\ t_2$, *so ist die Summe der vierten Wurzeln aus den Tetraedern, deren Gegenkanten* $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}|$ *und* $|t_1\,t_2|$, $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}|$ *und* $|t_1\,t_2|$ *sind, von unveränderlichem Werth, nämlich gleich der vierten Wurzel aus dem Volumen des Schmiegungstetraeders.*

Auch gilt die Beziehung:

Das geometrische Mittel aus den beiden letzten Tetraedern ist gleich dem Tetraeder, dessen Gegenkanten $|\mathfrak{c}\mathfrak{d}|$ *und* $\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2|$ *sind.*

Ferner ist nach einer bekannten Eigenschaft der ebenen Parabel, die auch aus unserer Betrachtung unmittelbar hervortritt, die Fläche des einbeschriebenen Dreiecks $(\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{d})$ doppelt so gross als die Fläche des umbeschriebenen $(\mathfrak{o}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{q})$, also

$$\frac{(\mathfrak{t}_1\mathfrak{a}\mathfrak{d})}{(\mathfrak{o}\mathfrak{c}\mathfrak{q})} = 2; \quad \frac{(\mathfrak{o}\mathfrak{c}\mathfrak{q})}{(\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{a})} = \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{o}\cdot\mathfrak{c}\mathfrak{q}}{\mathfrak{c}\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{c}\mathfrak{a}} = \frac{mn}{(m+n)^2}$$

$$\frac{(\mathfrak{t}_1\mathfrak{a}\mathfrak{d})}{(\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{a})} = \frac{2mn}{(m+n)^2} = \frac{(\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_1\mathfrak{a}\mathfrak{d})}{(\mathfrak{t}_2\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{a})}$$

$$\frac{(\mathfrak{t}_2\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{a})}{(\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{a})} = \frac{n^2}{(m+n)^2};$$

mithin

$$(\mathfrak{t}_2\,\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}) = \frac{2mn^3}{(m+n)^4}\,\Delta$$

und ebenso

$$(\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_2\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}) = \frac{2n\,.\,m^3}{(m+n)^4}\,\Delta,$$

woraus folgt

$$(\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}) = 2\sqrt{(\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{b}\mathfrak{c})\,.\,(\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_1\mathfrak{a}\mathfrak{d})}$$

u. s. w.

4. Nehmen wir jetzt zwei beliebige Punkte $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}'$ auf der Schnittlinie $|\alpha\,\beta| = |\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}|$ der beiden Schmiegungsebenen $\alpha\,\beta$ der cubischen Parabel an, so gehen durch dieselben zwei Schmiegungsebenen $\tau\,\tau'$, die in gleicher Weise zu construiren sind, wie es oben für τ angegeben ist: Man lege aus $\mathfrak{o}'$ die noch übrige zweite Tangente $|\mathfrak{o}'\mathfrak{t}_1'\mathfrak{q}'|$ an die Schmiegungsparabel $\alpha^{(2)}$ und die zweite Tangente $|\mathfrak{o}'\mathfrak{t}_2'\mathfrak{r}'|$ an die Schmiegungsparabel $\beta^{(2)}$; die Verbindungslinie $|\mathfrak{t}_1'\mathfrak{t}_2'|$ der Berührungspunkte wird die Tangente der cubischen Parabel in der Schmiegungsebene τ' sein, und ihr Berührungspunkt $\mathfrak{t}'$ ist, wie vorhin zu bestimmen durch das Verhältniss

$$\frac{\mathfrak{t}_1'\mathfrak{t}'}{\mathfrak{t}'\mathfrak{t}_2'} = \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{o}'}{\mathfrak{o}'\mathfrak{d}}.$$

Nennen wir noch den Schnittpunkt der beiden Tangenten $|\mathfrak{o}\,\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{q}|$ und $\mathfrak{o}'\,\mathfrak{t}_1'\,\mathfrak{q}'|$ der Schmiegungsparabel $\alpha^{(2)}$

$$\mathfrak{s}_1 = (\mathfrak{o}\,\mathfrak{q},\ \mathfrak{o}'\,\mathfrak{q}')$$

und den Schnittpunkt der beiden Tangenten $|\mathfrak{o}\,\mathfrak{t}_2\,\mathfrak{r}|$ und $|\mathfrak{o}'\,\mathfrak{t}_2'\,\mathfrak{r}'|$ der Schmiegungsparabel $\beta^{(2)}$

$$\mathfrak{s}_2 = (\mathfrak{o}\,\mathfrak{r},\ \mathfrak{o}'\,\mathfrak{r}'),$$

dann ergiebt die anfangs hervorgehobene Eigenschaft der ebenen Parabel die projectiv-ähnlichen Punktreihen:

$$|\mathfrak{d}\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}'\,\mathfrak{c}| \sim |\mathfrak{c}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}'\,\mathfrak{a}| \sim |\mathfrak{o}\,\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{s}_1\,\mathfrak{q}| \sim |\mathfrak{o}'\,\mathfrak{s}_1\,\mathfrak{t}_1'\,\mathfrak{q}'|,$$

$$|\mathfrak{d}\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}'\,\mathfrak{c}| \sim |\mathfrak{b}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}'\,\mathfrak{d}| \sim |\mathfrak{r}\,\mathfrak{t}_2\,\mathfrak{s}_2\,\mathfrak{o}| \sim |\mathfrak{r}'\,\mathfrak{s}_2\,\mathfrak{t}_2'\,\mathfrak{o}'|,$$

woraus die Gleichheit der Verhältnisse entsprechender Strecken folgt z. B.

$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{q}}{\mathfrak{a}\mathfrak{q}'} = \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{o}}{\mathfrak{c}\mathfrak{o}'} = \frac{\mathfrak{q}\mathfrak{t}_1}{\mathfrak{q}\mathfrak{s}_1} \text{ u. s. f.}$$

Wir bemerken, dass die Ecken des von den vier Schmiegungsebenen $\alpha\ \beta\ \tau\ \tau'$ gebildeten Tetraeders sind

$$\mathfrak{o}\ \mathfrak{o}'\ \mathfrak{s}_1\ \mathfrak{s}_2$$

und die des von den vier Berührungspunkten der Schmiegungsebenen $\alpha\ \beta\ \tau\ \tau'$ mit der cubischen Parabel des gebildeten Tetraeders

$$\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{t}\ \mathfrak{t}';$$

diese beiden Tetraeder sind bekanntlich einander gleichzeitig ein- und umbeschrieben.

Bezeichnen wir die Verhältnisse

$$\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}\mathfrak{c}} = \frac{m}{n}, \qquad \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{o}'}{\mathfrak{o}'\mathfrak{c}} = \frac{m'}{n'},$$

so lassen sich durch dieselben die Volumina beider Tetraeder ausdrücken oder vielmehr die Verhältnisse ihrer Volumina zu dem ursprünglichen Schmiegungstetraeder Δ.

Wir haben nämlich:

$$\frac{\mathfrak{o}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \frac{n}{m+n} \;\Big|\; \frac{\mathfrak{o}'\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \frac{n'}{m'+n'} \;\Big|\; \frac{\mathfrak{o}\mathfrak{o}'}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \frac{nm'-mn'}{(m+n)(m'+n')}.$$

Nun ist aber

$$\frac{(\mathfrak{c}\mathfrak{o}\mathfrak{s}_1)}{(\mathfrak{c}\mathfrak{o}\mathfrak{q})} = \frac{\mathfrak{o}\mathfrak{s}_1}{\mathfrak{o}\mathfrak{q}} = \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{o}'}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \frac{m'}{m'+n'} \;\Big|\; \frac{(\mathfrak{c}\mathfrak{o}\mathfrak{q})}{(\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{a})} = \frac{mn}{(m+n)^2}$$

$$\frac{(\mathfrak{c}\mathfrak{o}\mathfrak{s}_1)}{(\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{a})} = \frac{mnm'}{(m+n)^2(m'+n')}$$

$$\frac{(\mathfrak{o}'\mathfrak{o}\mathfrak{s}_1)}{(\mathfrak{c}\mathfrak{o}\mathfrak{s}_1)} = \frac{\mathfrak{o}'\mathfrak{o}}{\mathfrak{c}\mathfrak{o}} = \frac{nm'-mn'}{n(m'+n')}$$

$$\frac{(\mathfrak{o}'\mathfrak{o}\mathfrak{s}_1)}{(\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{a})} = \frac{(nm'-mn')\,mm'}{(m+n)^2(m'+n')^2}$$

$$\frac{(\mathfrak{s}_2\mathfrak{o}'\mathfrak{o}\mathfrak{s}_1)}{(\mathfrak{r}\mathfrak{o}'\mathfrak{o}\mathfrak{s}_1)} = \frac{\mathfrak{s}_2\mathfrak{o}}{\mathfrak{r}\mathfrak{o}} = \frac{\mathfrak{o}'\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \frac{n'}{m'+n'}$$

$$\frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{o}'\mathfrak{o}\mathfrak{s}_1)}{(\mathfrak{b}\mathfrak{o}'\mathfrak{o}\mathfrak{s}_1)} = \frac{n}{m+n} \;\Big|\; \frac{(\mathfrak{s}_2\mathfrak{o}'\mathfrak{o}\mathfrak{s}_1)}{(\mathfrak{b}\mathfrak{o}'\mathfrak{o}\mathfrak{s}_1)} = \frac{nn'}{(m+n)(m'+n')} \;\Big|$$

$$\frac{(\mathfrak{b}\mathfrak{o}'\mathfrak{o}\mathfrak{s}_1)}{(\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{a})} = \frac{(\mathfrak{o}'\mathfrak{o}\mathfrak{s}_1)}{(\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{a})} = \frac{(nm'-mn')\,mm'}{(m+n)^2(m'+n')^2}$$

also endlich

$$(1) \qquad (\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}'\,\mathfrak{s}_1\,\mathfrak{s}_2) = \frac{(mn'-nm')\,mnm'n'}{(m+n)^3(m'+n')^3}\,\Delta.$$

Zweitens liegen $\mathfrak{o}\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ in einer Ebene und der Schnittpunkt von $|\mathfrak{o}\,\mathfrak{t}|$ mit $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}|$ war

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{o}\,\mathfrak{t},\ \mathfrak{a}\,\mathfrak{b});$$

ebenso liegen $\mathfrak{o}'\,\mathfrak{t}'\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ in einer Ebene und der Schnittpunkt von $|\mathfrak{o}'\,\mathfrak{t}'|$ mit $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ sei

$$\mathfrak{p}' = (\mathfrak{o}'\,\mathfrak{t}',\ \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}).$$

Demgemäss haben wir die Verhältnisse

$$\frac{(\mathfrak{t}\mathfrak{a}\mathfrak{b})}{(\mathfrak{o}\mathfrak{a}\mathfrak{b})} = \frac{\mathfrak{t}\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}\mathfrak{p}} = \frac{3mn}{(m+n)^2} \quad \text{(s. o. 2.)};$$

also auch

$$\frac{(\mathfrak{t}'\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})}{(\mathfrak{t}'\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})} = \frac{3mn}{(m+n)^2}.$$

Nun ist:

$$\frac{(\mathfrak{t}'\,\mathfrak{o}\mathfrak{a}\mathfrak{b})}{(\mathfrak{o}'\,\mathfrak{o}\mathfrak{a}\mathfrak{b})} = \frac{\mathfrak{t}'\,\mathfrak{p}'}{\mathfrak{o}'\,\mathfrak{p}'} = \frac{3m'n'}{(m'+n')^2},$$

$$\frac{(\mathfrak{o}'\,\mathfrak{o}\mathfrak{a}\mathfrak{b})}{(\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{b})} = \frac{\mathfrak{o}'\,\mathfrak{o}}{\mathfrak{c}\mathfrak{b}} = \frac{nm'-mn'}{(m+n)\,(m'+n')};$$

mithin

(2) $$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{t}') = \frac{9\,(mn'-nm')\,mn\,m'n'}{(m+n)^3\,(m'+n')^3}\,\Delta$$

also

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{t}') = 9(\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}'\,\mathfrak{s}_1\,\mathfrak{s}_2) \quad \text{d. h.}$$

Irgend vier Punkte der cubischen Parabel sind die Ecken eines derselben einbeschriebenen Tetraeders; die vier Schmiegungsebenen in diesen Punkten bilden ein zugehöriges der cubischen Parabel umschriebenes Tetraeder; das Volumen des einbeschriebenen Tetraeders ist das Neunfache von dem Volumen des umschriebenen.

Dieser Satz ist analog dem bekannten Satze der ebenen Parabel, wonach der Inhalt eines derselben einbeschriebenen Dreiecks das Doppelte von dem Inhalt des der Parabel umschriebenen Dreiecks ist, welches von den Tangenten in den Ecken des ersteren gebildet wird.

5. Die beiden aus den Punkten $\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}'$ an die cubische Parabel gelegten Schmiegungsebenen $\tau\,\tau'$, welche in $\mathfrak{t}\,\mathfrak{t}'$ berühren, enthalten die Tangenten der cubischen Parabel in den Punkten $\mathfrak{t}\,\mathfrak{t}'$; mögen diese Tangenten $t\,t'$ den ursprünglichen Schmiegungsebenen $\alpha\,\beta$ in den Punkten begegnen:

$$(\alpha,\,t) = \mathfrak{t}_1, \qquad (\alpha\ t') = \mathfrak{t}_1',$$
$$(\beta,\,t) = \mathfrak{t}_2, \qquad (\beta\ t') = \mathfrak{t}_2',$$

dann lässt sich das Tetraeder

$$(\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_2\,\mathfrak{t}_1'\,\mathfrak{t}_2')$$

in folgender Weise ausdrücken:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_2\,\mathfrak{t}_1'\,\mathfrak{t}_2') &= (\mathfrak{o}\,\mathfrak{t}_2\,\mathfrak{t}_1'\,\mathfrak{t}_2') - (\mathfrak{o}\,\mathfrak{t}_1'\,\mathfrak{t}_2'\,\mathfrak{t}_1) + (\mathfrak{o}\,\mathfrak{t}_2'\,\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_2) - (\mathfrak{o}\,\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_2\,\mathfrak{t}_1')\\ &= (\mathfrak{t}_2'\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_1') - (\mathfrak{t}_2\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_1') + (\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{t}_2'\,\mathfrak{t}_2) - (\mathfrak{t}_1'\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{t}_2'\,\mathfrak{t}_2).\end{aligned}$$

Sind noch die Schnittpunkte:

$$(\mathfrak{o}\,\mathfrak{t}_1,\ \mathfrak{o}'\,\mathfrak{t}_1') = \mathfrak{s}_1, \quad (\mathfrak{o}\,\mathfrak{t}_2,\ \mathfrak{o}'\,\mathfrak{t}_2') = \mathfrak{s}_2$$

so ergeben sich folgende Verhältnisse:

$$\frac{(\mathfrak{o\,t_1\,t_1'})}{(\mathfrak{o\,s_1\,t_1'})} = \frac{\mathfrak{o\,t_1}}{\mathfrak{o\,s_1}} = \frac{\mathfrak{d\,o}}{\mathfrak{d\,o'}}$$

$$\frac{(\mathfrak{o\,s_1\,t_1'})}{(\mathfrak{o\,o'\,s_1})} = \frac{\mathfrak{s_1\,t_1'}}{\mathfrak{o'\,s_1}} = \frac{\mathfrak{o\,o'}}{\mathfrak{d\,o}}$$

$$\frac{(\mathfrak{o\,o'\,s_1})}{(\mathfrak{o\,c\,s_1})} = \frac{\mathfrak{o\,o'}}{\mathfrak{o\,c}}$$

$$\frac{(\mathfrak{o\,c\,s_1})}{(\mathfrak{d\,c\,s_1})} = \frac{\mathfrak{o\,c}}{\mathfrak{d\,c}}$$

$$\frac{(\mathfrak{d\,c\,s_1})}{(\mathfrak{d\,c\,q})} = \frac{\mathfrak{o\,s_1}}{\mathfrak{o\,q}} = \frac{\mathfrak{d\,o'}}{\mathfrak{d\,c}}$$

$$\frac{(\mathfrak{d\,c\,q})}{(\mathfrak{d\,c\,a})} = \frac{\mathfrak{c\,q}}{\mathfrak{c\,a}} = \frac{\mathfrak{d\,o}}{\mathfrak{d\,c}}$$

$$\frac{(\mathfrak{o\,t_1\,t_1'})}{(\mathfrak{d\,c\,a})} = \left(\frac{\mathfrak{o\,o'}}{\mathfrak{d\,c}}\right)^2 \frac{\mathfrak{d\,o}}{\mathfrak{d\,c}}$$

$$\frac{(\mathfrak{t_2'\,o\,t_1\,t_1'})}{(\mathfrak{t_2'\,d\,c\,a})} = \left(\frac{\mathfrak{o\,o'}}{\mathfrak{d\,c}}\right)^2 \cdot \frac{\mathfrak{d\,o}}{\mathfrak{d\,c}}$$

$$\frac{(\mathfrak{t_2'\,d\,c\,a})}{(\mathfrak{r'\,d\,c\,a})} = \frac{\mathfrak{o'\,t_2'}}{\mathfrak{o'\,r'}} = \frac{\mathfrak{c\,o'}}{\mathfrak{c\,d}}$$

$$\frac{(\mathfrak{r'\,d\,c\,a})}{(\mathfrak{b\,d\,c\,a})} = \frac{\mathfrak{d\,r'}}{\mathfrak{d\,b}} = \frac{\mathfrak{c\,o'}}{\mathfrak{c\,d}}$$

$$\frac{(\mathfrak{t_2'\,o\,t_1\,t_1'})}{(\mathfrak{b\,d\,c\,a})} = \left(\frac{\mathfrak{o\,o'}}{\mathfrak{d\,c}}\right)^2 \cdot \frac{\mathfrak{d\,o}.\mathfrak{c\,o'}.\mathfrak{c\,o'}}{(\mathfrak{d\,c})^3}$$

ebenso:

$$\frac{(\mathfrak{t_2\,o\,t_1\,t_1'})}{(\mathfrak{b\,d\,c\,a})} = \left(\frac{\mathfrak{o\,o'}}{\mathfrak{d\,c}}\right)^2 \cdot \frac{\mathfrak{d\,o}.\mathfrak{c\,o}.\mathfrak{c\,o}}{(\mathfrak{d\,c})^3}$$

$$\frac{(\mathfrak{t_2'\,o\,t_1\,t_1'}) - (\mathfrak{t_2\,o\,t_1\,t_1'})}{(\mathfrak{b\,d\,c\,a})}$$

$$= \left(\frac{\mathfrak{o\,o'}}{\mathfrak{d\,c}}\right)^2 \frac{\mathfrak{d\,o}}{\mathfrak{d\,c}} \left\{\frac{\mathfrak{c\,o'}.\mathfrak{c\,o'} - \mathfrak{c\,o}.\mathfrak{c\,o}}{(\mathfrak{d\,c})^2}\right\}$$

$$= \frac{(\mathfrak{o\,o'})^3}{(\mathfrak{d\,c})^5}\, \mathfrak{d\,o}\,(\mathfrak{c\,o} + \mathfrak{c\,o'})$$

$$\frac{(\mathfrak{o\,t_2'\,t_2})}{(\mathfrak{o\,t_2'\,s_2})} = \frac{\mathfrak{o\,t_2}}{\mathfrak{o\,s_2}} = \frac{\mathfrak{c\,o}}{\mathfrak{c\,o'}}$$

$$\frac{(\mathfrak{o\,t_2'\,s_2})}{(\mathfrak{o\,o'\,s_2})} = \frac{\mathfrak{t_2'\,s_2}}{\mathfrak{o'\,s_2}} = \frac{\mathfrak{o'\,o}}{\mathfrak{c\,o}}$$

$$\frac{(\mathfrak{o\,o'\,s_2})}{(\mathfrak{o\,c\,s_2})} = \frac{\mathfrak{o\,o'}}{\mathfrak{o\,c}}$$

$$\frac{(\mathfrak{o\,c\,s_2})}{(\mathfrak{d\,c\,s_2})} = \frac{\mathfrak{o\,c}}{\mathfrak{d\,c}}$$

$$\frac{(\mathfrak{d\,c\,s_2})}{(\mathfrak{d\,c\,r})} = \frac{\mathfrak{o\,s_2}}{\mathfrak{o\,r}} = \frac{\mathfrak{c\,o'}}{\mathfrak{c\,d}}$$

$$\frac{(\mathfrak{d\,c\,r})}{(\mathfrak{d\,c\,b})} = \frac{\mathfrak{d\,r}}{\mathfrak{d\,b}} = \frac{\mathfrak{c\,o}}{\mathfrak{c\,d}}$$

$$\frac{(\mathfrak{o\,t_2'\,t_2})}{(\mathfrak{d\,c\,b})} = \left(\frac{\mathfrak{o\,o'}}{\mathfrak{d\,c}}\right)^2 \cdot \frac{\mathfrak{c\,o}}{\mathfrak{c\,d}}$$

$$\frac{(\mathfrak{t_1\,o\,t_2'\,t_2})}{(\mathfrak{t_1\,d\,c\,b})} = \left(\frac{\mathfrak{o\,o'}}{\mathfrak{d\,c}}\right)^2 \cdot \frac{\mathfrak{c\,o}}{\mathfrak{c\,d}}$$

$$\frac{(\mathfrak{t_1\,d\,c\,b})}{(\mathfrak{q\,d\,c\,b})} = \frac{\mathfrak{o\,t_1}}{\mathfrak{o\,q}} = \frac{\mathfrak{d\,o}}{\mathfrak{d\,c}}$$

$$\frac{(\mathfrak{q\,d\,c\,b})}{(\mathfrak{a\,d\,c\,b})} = \frac{\mathfrak{q\,c}}{\mathfrak{a\,c}} = \frac{\mathfrak{d\,o}}{\mathfrak{d\,c}}$$

$$\frac{(\mathfrak{t_1\,o\,t_2'\,t_2})}{(\mathfrak{a\,d\,c\,b})} = \left(\frac{\mathfrak{o\,o'}}{\mathfrak{d\,c}}\right)^2 \frac{\mathfrak{o\,c}\cdot\mathfrak{d\,o}\cdot\mathfrak{d\,o}}{(\mathfrak{d\,c})^3}$$

$$\frac{(\mathfrak{t_1'\,o\,t_2'\,t_2})}{(\mathfrak{a\,d\,c\,b})} = \left(\frac{\mathfrak{o\,o'}}{\mathfrak{d\,c}}\right)^2 \frac{\mathfrak{o\,c}.\mathfrak{d\,o'}\cdot\mathfrak{d\,o'}}{(\mathfrak{d\,c})^3}$$

$$\frac{(\mathfrak{t_1\,o\,t_2'\,t_2}) - (\mathfrak{t_1'\,o\,t_2'\,t_2})}{(\mathfrak{a\,d\,c\,b})}$$

$$= \left(\frac{\mathfrak{o\,o'}}{\mathfrak{d\,c}}\right)^2 \frac{\mathfrak{o\,c}}{\mathfrak{d\,c}} \left\{\frac{\mathfrak{d\,o}\cdot\mathfrak{d\,o} - \mathfrak{d\,o'}\cdot\mathfrak{d\,o'}}{(\mathfrak{d\,c})^2}\right\}$$

$$= \frac{(\mathfrak{o\,o'})^3}{(\mathfrak{d\,c})^5} \cdot \mathfrak{c\,o}\,(\mathfrak{d\,o} + \mathfrak{d\,o'}).$$

Da aber

$$(\mathfrak{b\,d\,c\,a}) = \quad (\mathfrak{a\,b\,c\,d}) = \quad \Delta,$$

$$(\mathfrak{a\,d\,c\,b}) = -(\mathfrak{a\,b\,c\,d}) = -\Delta$$

ist, so folgt

$$(\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_2\,\mathfrak{t}_1'\,\mathfrak{t}_2') = \frac{(\mathfrak{o}\mathfrak{o}')^3}{(\mathfrak{b}\mathfrak{c})^5}\,\Delta\,\{\mathfrak{b}\mathfrak{o}\,.\,\mathfrak{c}\mathfrak{o}' - \mathfrak{c}\mathfrak{o}\cdot\mathfrak{b}\mathfrak{o}'\},$$

$$(\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_2\,\mathfrak{t}_1'\,\mathfrak{t}_2') = \left(\frac{\mathfrak{o}\mathfrak{o}'}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}\right)^4\Delta = \left\{\frac{mn'-nm'}{(m+n)\,(m'+n')}\right\}^4\cdot\Delta.$$

Hierdurch wird das Volumen eines Tetraeders ausgedrückt, von welchem ein Paar Gegenkanten ($\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_2$ und $\mathfrak{t}_1'\,\mathfrak{t}_2'$) diejenigen beiden Strecken sind, welche auf zwei Tangenten der cubischen Parabel durch ein Paar Schmiegungsebenen α β abgeschnitten werden.

Vermittelst dieses Ausdrucks finden wir das Volumen des Tetraeders, welches einer beliebigen Secante

$$|\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{t}'\,|$$

der cubischen Parabel als Schmiegungstetraeder zugehört; treffen nämlich die Schmiegungsebenen τ τ' in den Punkten $\mathfrak{t}$ $\mathfrak{t}'$ der cubischen Parabel die Tangenten t t' in den Punkten

$$(t\,\tau') = \mathfrak{c}', \qquad (t'\,\tau) = \mathfrak{b}',$$

so ist $(\mathfrak{t}\,\mathfrak{t}'\,\mathfrak{c}'\,\mathfrak{b}')$ das zur Sehne $|\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{t}'\,|$ gehörige Schmiegungstetraeder. Weil aber auf den beiden Tangenten t und t' sowie auf der Schnittlinie $|\,\alpha\,\beta\,| = |\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}\,|$ durch die Gesammtheit der Schmiegungsebenen projectiv-ähnliche Punktreihen ausgeschnitten werden (s. o. 1.), so haben wir durch die vier Schmiegungsebenen α β τ τ' die projectiv-ähnlichen Punktreihen:

$$|\,\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_2\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{c}'\,| \sim |\,\mathfrak{t}_1'\,\mathfrak{t}_2'\,\mathfrak{b}'\,\mathfrak{t}'\,| \sim |\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}'\,|,$$

woraus folgt:

$$\frac{\mathfrak{t}\mathfrak{c}'}{\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2} = \frac{\mathfrak{b}'\mathfrak{t}'}{\mathfrak{t}_1'\mathfrak{t}_2'} = \frac{\mathfrak{o}\mathfrak{o}'}{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}.$$

Das Tetraeder, dessen Gegenkanten $\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_2$ und $\mathfrak{t}_1'\mathfrak{t}_2'$ sind, hat mit dem Schmiegungstetraeder, dessen Gegenkanten $\mathfrak{t}\,\mathfrak{c}'$ und $\mathfrak{b}'\,\mathfrak{t}'$ sind, diese Gegenkanten der Lage nach übereinstimmend, nur der Grösse nach verschieden, denn beide Paare Gegenkanten liegen in den Tangenten t und t', folglich verhalten sich die Volumina beider Tetraeder wie die Producte ihrer Gegenkanten:

$$\frac{(\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_2\,\mathfrak{t}_1'\,\mathfrak{t}_2')}{(\mathfrak{t}\,\mathfrak{c}'\,\mathfrak{b}'\,\mathfrak{t}')} = \frac{\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_2\,.\,\mathfrak{t}_1'\,\mathfrak{t}_2'}{\mathfrak{t}\mathfrak{c}'\,.\,\mathfrak{b}'\mathfrak{t}'} = \left(\frac{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}{\mathfrak{o}\mathfrak{o}'}\right)^2,$$

und hieraus folgt nach dem Vorigen:

$$(\mathfrak{t}\,\mathfrak{t}'\,\mathfrak{c}'\,\mathfrak{b}') = \left(\frac{\mathfrak{o}\mathfrak{o}'}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}\right)^6\cdot\Delta = \left\{\frac{mn'-nm'}{(m+n)\,(m'+n')}\right\}^6\Delta.$$

Wir sind demgemäss im Stande, das Volumen des zu einer beliebigen Sehne $|\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{t}'\,|$ der cubischen Parabel zugehörigen Schmiegungstetraeders zu bestimmen und erkennen, dass zwischen den drei Tetraedern

$$(\mathfrak{t}\,\mathfrak{t}'\,\mathfrak{c}'\,\mathfrak{b}'), \quad (\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_2\,\mathfrak{t}_1'\,\mathfrak{t}_2'), \quad (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d})$$

die Beziehung stattfindet:

$$(t_1 t_2 t_1' t_2')^3 = (t t' c' b')^2 \cdot (a b c b).$$

Die vier Punkte $a\ b\ t\ t'$ können als willkürlich gewählt auf der cubischen Parabel angesehen werden; sie bilden ein Tetraeder, welches derselben einbeschrieben ist, und seine sechs Kanten sind Parabelsehnen; bestimmt man die diesen sechs Sehnen zugehörigen Schmiegungstetraeder, so erhält man die oben bestimmten Werthe:

zur Sehne $|a b|$ das zugehörige Schmiegungstetraeder Δ,

" " $|t t'|$ " " " $\left\{\frac{mn' - nm'}{(m+n)(m'+n')}\right\}^6 \Delta$,

" " $|a t|$ " " " $\left(\frac{n}{m+n}\right)^6 \Delta$,

" " $|b t|$ " " " $\left(\frac{m}{m+n}\right)^6 \Delta$,

" " $|a t'|$ " " " $\left(\frac{n'}{m'+n'}\right)^6 \Delta$,

" " $|b t'|$ " " " $\left(\frac{m'}{m'+n'}\right)^6 \Delta$

und das Product dieser sechs Schmiegungstetraeder ergiebt:

$$\left\{\frac{(mn' - nm')\, m n m' n'}{(m+n)^3 (m'+n')^3}\ \Delta\right\}^6,$$

was nach dem in 4. gefundenen Ausdrucke (2) gleich ist

$$\left\{\frac{1}{9}(a\, b\, t\, t')\right\}^6 \qquad \text{also}$$

der neunte Theil des einer cubischen Parabel einbeschriebenen Tetraeders ist gleich der sechsten Wurzel aus dem Producte derjenigen sechs Schmiegungstetraeder, welche den sechs Kanten des ersten Tetraeders als Parabelsehnen zugehören.

Da das Volumen des zur Sehne $|t t'|$ zugehörigen Schmiegungstetraeders zu der sechsten Potenz der Strecke $|\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}'|$ in einem constanten Verhältnisse steht, dessen Werth unabhängig ist von der Lage der Punkte $t t'$, so schliessen wir:

Die zu zwei beliebigen Sehnen der cubischen Parabel zugehörigen Schmiegungstetraeder verhalten sich zu einander, wie die sechsten Potenzen der beiden Strecken, welche die Schmiegungsebenen in den Endpunkten je einer Sehne auf einem beliebig gewählten Schmiegungsstrahl (Schnittlinie irgend zweier Schmiegungsebenen) ausschneiden.

Hieraus folgt auch:

Bewegen wir in der Schnittlinie $|\alpha\beta|$ zweier Schmiegungsebenen einer cubischen Parabel eine Strecke $|\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}'|$ von unveränderlicher Länge und legen aus den Endpunkten derselben die beiden (noch übrigen) Schmiegungsebenen $\tau\tau'$ an die cubische Parabel, deren Berührungspunkte $t t'$ seien, so wird das zu der Sehne $|t t'|$ zugehörige Schmiegungstetraeder

von unverändertem Volumen bleiben und zwar proportional der sechsten Potenz der Strecke $|\mathfrak{o}\mathfrak{o}'|$.

6. Wir bestimmen jetzt das Volumen des Tetraeders

$$(\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{t}\mathfrak{t}')$$

indem wir den Punkt $\mathfrak{p}$ zu Hülfe nehmen, in welchem $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ von $|\mathfrak{o}\mathfrak{t}|$ getroffen wird.

Es war früher (s. o. 2.) das Verhältniss ermittelt:

$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{p}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \frac{n^3}{m^3+n^3}; \quad \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{p}}{\mathfrak{b}\mathfrak{a}} = \frac{m^3}{m^3+n^3}.$$

Bezeichnen wir analog den Treffpunkt

$$\mathfrak{p}' = (\mathfrak{o}'\mathfrak{t}', \mathfrak{a}\mathfrak{b}),$$

so ist
$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{p}'}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \frac{n'^3}{m'^3+n'^3}; \quad \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{p}'}{\mathfrak{b}\mathfrak{a}} = \frac{m'^3}{m'^3+n'^3}$$

und es folgt:

$$\frac{\mathfrak{p}\mathfrak{p}'}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \frac{m^3n'^3 - n^3m'^3}{(m^3+n^3)(m'^3+n'^3)}.$$

Nun ist aber das Verhältniss

$$\frac{(\mathfrak{t}'\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{t})}{(\mathfrak{p}'\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{t})} = \frac{\mathfrak{t}'\mathfrak{o}'}{\mathfrak{p}'\mathfrak{o}'} = 1 - \frac{\mathfrak{p}'\mathfrak{t}'}{\mathfrak{p}'\mathfrak{o}'} = 1 - \frac{3m'n'}{(m'+n')^2},$$

(s. o. 2.) also

$$\frac{(\mathfrak{t}'\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{t})}{(\mathfrak{p}'\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{t})} = \frac{m'm' - m'n' + n'n'}{(m'+n')^2} = \frac{m'^3+n'^3}{(m'+n')^3},$$

$$\frac{(\mathfrak{p}'\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{t})}{(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{t})} = \frac{\mathfrak{p}'\mathfrak{p}}{\mathfrak{a}\mathfrak{p}} = \frac{n^3m'^3 - m^3n'^3}{n^3(m'^3+n'^3)},$$

$$\frac{(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{t})}{(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{b})} = \frac{n^3}{(m+n)^3},$$

folglich

$$\frac{(\mathfrak{t}'\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{t})}{(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{b})} = \frac{m'^3n^3 - n'^3m^3}{(m+n)^3(m'+n')^3},$$

$$(\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{t}\mathfrak{t}') = \frac{m^3n'^3 - m'^3n^3}{(m+n)^3(m'+n')^3}\cdot\Delta,$$

oder

$$(\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{t}\mathfrak{t}') = \frac{(mn'-m'n)\,\{m^2n'^2 + mm'nn' + m'^2n^2\}}{(m+n)^3(m'+n')^3}\,\Delta,$$

ein Werth, von dem wir später Gebrauch machen werden.

Nehmen wir jetzt noch einen dritten Punkt $\mathfrak{o}''$ auf der Schnittlinie $|\alpha\beta| = |\mathfrak{c}\mathfrak{d}|$ hinzu und legen durch ihn die Schmiegungsebene τ'' an die cubische Parabel, deren Berührungspunkt $\mathfrak{t}''$ sei, bezeichnen ferner das Verhältniss

$$\frac{\mathfrak{d}\mathfrak{o}''}{\mathfrak{o}''\mathfrak{c}} = \frac{m''}{n''},$$

alsdann besteht zwischen den fünf Punkten des Raumes: $\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{t}'\,\mathfrak{t}''$ die identische Relation:

$$(\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{t}\mathfrak{t}') = (\mathfrak{t}''\mathfrak{d}\mathfrak{t}\mathfrak{t}') - (\mathfrak{t}''\mathfrak{t}\mathfrak{t}'\mathfrak{c}) + (\mathfrak{t}''\mathfrak{t}'\mathfrak{c}\mathfrak{d}) - (\mathfrak{t}''\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{t}),$$

welche sich auch so schreiben lässt

$$(\mathfrak{c}\mathfrak{t}\mathfrak{t}'\mathfrak{t}'') + (\mathfrak{b}\mathfrak{t}\mathfrak{t}''\mathfrak{t}') = (\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{t}\mathfrak{t}') + (\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{t}'\mathfrak{t}'') + (\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{t}''\mathfrak{t}).$$

Die drei Tetraeder $(\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{t}\mathfrak{t}')$, $(\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{t}'\mathfrak{t}'')$, $(\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{t}''\mathfrak{t})$ lassen sich nun ebenso bestimmen, wie vorhin das erste von ihnen d. h. durch Δ und die Verhältnisse $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$ ausdrücken; ihre Summe giebt:

$$\left\{\frac{m^3n'^3 - n^3m'^3}{(m+n)^3(m'+n')^3} + \frac{m'^3n''^3 - n'^3m''^3}{(m'+n')^3(m''+n'')^3} + \frac{m''^3n^3 - m^3n''^3}{(m''+n'')^3(m+n)^3}\right\}\Delta,$$

oder als Determinante dargestellt

$$(\mathfrak{c}\mathfrak{t}\mathfrak{t}'\mathfrak{t}'') + (\mathfrak{b}\mathfrak{t}\mathfrak{t}''\mathfrak{t}')$$

$$= \frac{\Delta}{(m+n)^3(m'+n')^3(m''+n'')^3}\begin{vmatrix} (m+n)^3 & (m'+n')^3 & (m''+n'')^3 \\ m^3 & m'^3 & m''^3 \\ n^3 & n'^3 & n''^3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{3\Delta}{(m+n)^3(m'+n')^3(m''+n'')^3}\begin{vmatrix} mn(m+n) & m'n'(m'+n') & m''n''(m''+n'') \\ m^3 & m'^3 & m''^3 \\ n^3 & n'^3 & n''^3 \end{vmatrix},$$

wo die Determinante noch weiterer Umformungen fähig ist, die wir hier unterlassen; es genügt uns zu erkennen, wie man im Stande ist die Summe der beiden Tetraeder

$$(\mathfrak{c}\mathfrak{t}\mathfrak{t}'\mathfrak{t}'') + (\mathfrak{b}\mathfrak{t}\mathfrak{t}''\mathfrak{t}')$$

zu berechnen, welche $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}$ zu Spitzen und das Dreieck, dessen Ecken drei beliebige Punkte der cubischen Parabel sind, zur gemeinschaftlichen Grundfläche haben.

7. Die Methode, welche Archimedes anwendet, um ein Segment der ebenen Parabel zu quadriren, lässt sich vermittelst der vorhergehenden Betrachtungen unmittelbar übertragen auf die cubische Parabel. Um das über der Sehne $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ einer ebenen Parabel stehende Segment zu quadriren, bestimmt man auf dem Parabelbogen $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ denjenigen einzigen Punkt $\mathfrak{t}$, dessen Tangente parallel läuft der Sehne $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ und nimmt den Inhalt des Dreiecks $(\mathfrak{a}\mathfrak{t}\mathfrak{b})$. In gleicher Weise wie mit der Sehne $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ verfährt man jetzt mit den beiden Parabelsehnen $|\mathfrak{a}\mathfrak{t}|$ und $|\mathfrak{t}\mathfrak{b}|$ und so fort bis in's Unendliche. Die Inhalte dieser Dreiecke bilden eine geometrische Reihe, deren Summe das Parabelsegment über der Sehne $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ liefert, gleich $^2/_3$ von dem Inhalte des Dreiecks, welches von der Parabelsehne $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ und den beiden Tangenten in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ eingeschlossen wird.

Gehen wir jetzt von zwei beliebigen Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der cubischen Parabel aus, nehmen ihre Tangenten a und b, ihre Schmiegungsebenen $\alpha\,\beta$, bestimmen die Schnittpunkte

$$(a, \beta) = \mathfrak{c}, \quad (b, \alpha) = \mathfrak{b}$$

also das Schmiegungstetraeder $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = \Delta$ und die beiden Schmiegungsparabeln $\alpha^{(2)}\,\beta^{(2)}$, von denen $\alpha^{(2)}$ in der Ebene α die Geraden $|\,\mathfrak{c}\mathfrak{a}\,|$ und $|\,\mathfrak{c}\mathfrak{d}\,|$ in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{d}$ berührt, während $\beta^{(2)}$ in der Ebene β die Geraden $|\,\mathfrak{d}\mathfrak{b}\,|$ und $|\,\mathfrak{d}\mathfrak{c}\,|$ in $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ berührt; alsdann legen wir aus dem Mittelpunkte $\mathfrak{o}$ der Strecke $|\,\mathfrak{d}\mathfrak{c}\,|$ die beiden Tangenten an die Schmiegungsparabeln $\alpha^{(2)}\,\beta^{(2)}$, dann werden dieselben resp. den Sehnen $|\,\mathfrak{a}\mathfrak{d}\,|$ und $|\,\mathfrak{b}\mathfrak{c}\,|$ parallel laufen und bez. in den Punkten $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ berühren. Die Ebene $[\mathfrak{o}\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2] = \tau$ ist eine Schmiegungsebene der cubischen Parabel, die Verbindungslinie $|\,\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\,| = t$ eine Tangente derselben und ihr Berührungspunkt $\mathfrak{t}$ liegt in der Mitte der Strecke $|\,\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\,|$. Dies ergiebt sich unmittelbar, wenn wir dem früheren allgemeinen Verhältniss $\frac{m}{n}$ den besonderen Werth

$$\frac{m}{n} = 1$$

beilegen. Die Summe der beiden Tetraeder, welche $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ zu Spitzen und das der cubischen Parabel einbeschriebene Dreieck $(\mathfrak{a}\mathfrak{t}\mathfrak{b})$ zur gemeinschaftlichen Grundfläche haben, ergiebt nach der vorigen Formel (in 6.) den Werth $\frac{3}{4}\,\Delta$, den man erhält, indem man die Werthe

$$\frac{m}{n} = 0, \qquad \frac{m'}{n'} = 1, \qquad \frac{m''}{n''} = \infty$$

setzt; denn den drei Punkten $\mathfrak{d}\ \mathfrak{o}\ \mathfrak{c}$ auf der Geraden $|\,\alpha\beta\,|$ entsprechen diese Werthe $0\ 1\ \infty$ des allgemeinen Verhältnisses $\frac{m}{n}$ (s. o. 2.) und gleichzeitig auf der cubischen Parabel die drei Punkte $\mathfrak{b}\ \mathfrak{t}\ \mathfrak{a}$.

Wir können jetzt weitergehen, indem wir mit jeder der beiden Parabelsehnen $|\,\mathfrak{a}\mathfrak{t}\,|$ und $|\,\mathfrak{t}\mathfrak{b}\,|$ ebenso verfahren, wie vorhin mit der Sehne $|\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,|$. Wir werden also auf dem Parabelbogen $(\mathfrak{a}\mathfrak{t})$ einen Punkt $\mathfrak{t}'$ und auf dem Parabelbogen $(\mathfrak{t}\mathfrak{b})$ einen Punkt $\mathfrak{t}''$ in gleicher Weise zu construiren haben, wie vorhin auf dem Parabelbogen $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ den Punkt $\mathfrak{t}$. Der Punkt $\mathfrak{t}$ wurde aber dadurch gefunden, dass wir für den Bogen $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ das zugehörige Schmiegungstetraeder $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})$ construirten und aus der Mitte $\mathfrak{o}$ zwischen $|\,\mathfrak{d}\mathfrak{c}\,|$ die Schmiegungsebene τ an die cubische Parabel legten, deren Berührungspunkt $\mathfrak{t}$ war. Für die Sehne $|\,\mathfrak{a}\mathfrak{t}\,|$ ist das Schmiegungstetraeder $(\mathfrak{a}\mathfrak{t}\mathfrak{q}\mathfrak{t}_1)$ und für die Sehne $|\,\mathfrak{t}\mathfrak{b}\,|$ ist es $(\mathfrak{t}\mathfrak{b}\mathfrak{t}_2\mathfrak{r})$ (s. o. 3.). Anstatt nun aus der Mitte der Strecke $|\,\mathfrak{t}_1\mathfrak{q}\,|$ die Schmiegungsebene τ' an die cubische Parabel zu legen, können wir aus demjenigen Punkte $\mathfrak{o}'$, der in der Mitte von $|\,\mathfrak{o}\mathfrak{c}\,|$ liegt, die Schmiegungsebene legen, welche mit τ' identisch sein wird, weil alle Schmiegungsebenen die Tangenten $|\mathfrak{c}\mathfrak{d}|$ und $|\mathfrak{t}_1\mathfrak{q}|$ der Schmiegungsparabel $\alpha^{(2)}$ in zwei projectiv-ähnlichen Punktreihen schneiden. Ebenso können wir anstatt aus der Mitte der Strecke $|\,\mathfrak{t}_2\mathfrak{r}\,|$ aus dem Mittelpunkt $\mathfrak{o}''$ der Strecke $|\,\mathfrak{d}\mathfrak{o}\,|$ die Schmiegungsebene τ'' an die cubische

Parabel legen, deren Berührungspunkt $\mathfrak{t}''$ ist; oder mit andern Worten: Wir theilen die Strecke $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ nicht wie vorhin durch $\mathfrak{o}$ in zwei gleiche Theile, sondern jetzt durch $\mathfrak{o}'\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}''$ in vier einander gleiche Theile und legen aus $\mathfrak{o}'\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}''$ die Schmiegungsebenen $\tau'\,\tau\,\tau''$ an die cubische Parabel, deren Berührungspunkte $\mathfrak{t}'\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{t}''$ die gesuchten Punkte sein werden.

Die Summe der beiden Doppelpyramiden, welche $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}$ zu Spitzen und die Dreiecke $(\mathfrak{a}\mathfrak{t}'\mathfrak{t})$ und $(\mathfrak{t}\mathfrak{t}''\mathfrak{b})$ zu gemeinsamen Grundflächen haben, ergiebt (6.) das Volumen:

$$3\Delta\cdot\frac{5}{2^7}.$$

Mit jeder der vier Parabelsehnen $|\mathfrak{a}\mathfrak{t}'|$, $|\mathfrak{t}'\mathfrak{t}|$, $|\mathfrak{t}\mathfrak{t}''|$, $|\mathfrak{t}''\mathfrak{b}|$ verfährt man jetzt weiter in gleicher Weise, wie vorhin mit der Sehne $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$. Es ist aber leicht einzusehen, dass man nur nöthig hat, die vier Strecken $|\mathfrak{c}\mathfrak{o}'|$, $|\mathfrak{o}'\mathfrak{o}|$, $|\mathfrak{o}\mathfrak{o}''|$, $|\mathfrak{o}''\mathfrak{b}|$ zu halbiren oder, was dasselbe sagt, die Strecke $|\mathfrak{c}\mathfrak{b}|$ in acht gleiche Theile zu theilen und aus den Theilpunkten die Schmiegungsebenen an die cubische Parabel zu legen, deren Berührungspunkte die entsprechenden Punkte auf der cubischen Parabel sein werden. Die Summe der vier Doppelpyramiden, welche $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}$ zu Spitzen und die vier neuen der cubischen Parabel einbeschriebenen Dreiecke zu gemeinsamen Grundflächen haben, ergiebt das Volumen:

$$3\Delta\cdot\frac{17}{2^{11}}.$$

Im Allgemeinen zeigt sich, dass, wenn man die Strecke $|\mathfrak{c}\mathfrak{b}|$ in 2^{n+1} gleiche Theile theilt, aus den Theilpunkten die Schmiegungsebenen an die cubische Parabel legt und die Berührungspunkte derselben in der angegebenen Weise zu 2^n Dreiecken zusammenstellt, welche der cubischen Parabel einbeschrieben sind, die Summe der Doppelpyramiden, welche $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}$ zu Spitzen und diese Dreiecke zu gemeinsamen Grundflächen haben, das Volumen ergiebt:

$$\frac{3\Delta}{8}\cdot\frac{2^{2n}+1}{2^{4n}};$$

allein diese Berechnung wird etwas umständlich*) und kann ersetzt werden durch eine sehr einfache Infinitesimalbetrachtung, welche wir sogleich anstellen wollen.

---

*) Setzt man nämlich

$$\frac{m}{m+n}=\frac{\varrho-1}{2^\nu},\quad \frac{m'}{m'+n'}=\frac{\varrho}{2^\nu},\quad \frac{m''}{m''+n''}=\frac{\varrho+1}{2^\nu},$$

so wird die obige Determinante (in 6)

$$\frac{\Delta}{2^{6\nu}}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ (\varrho-1)^3 & \varrho^3 & (\varrho+1)^3\\ (2^\nu-\varrho+1)^3 & (2^\nu-\varrho)^3 & (2^\nu-\varrho-1)^3\end{vmatrix}=\frac{3\Delta}{2^{5\nu-1}}\left(1+3\cdot2^\nu\varrho-3\varrho^2\right)$$

Wir bemerken nur noch, dass die Gesammtheit aller Doppelpyramiden, wenn wir die vorige Operation bis ins Unendliche fortsetzen, zu dem Volumen führt, welches begrenzt wird von den beiden Ebenen $[\mathfrak{cab}]$, $[\mathfrak{dab}]$ und den Stücken von Kegeloberflächen (3. O.) die wir erhalten, wenn wir $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ mit sämmtlichen Punkten des Parabelbogens $|\,\mathfrak{ab}\,|$ durch Strahlen verbinden. Die Bestimmung dieses Volumens führt ebenso, wie bei der ebenen Parabel auf die Summation geometrischer Reihen, nämlich

$$\frac{3}{8}\Delta\sum_0^\infty \frac{2^{2n}+1}{2^{4n}} = \frac{3}{8}\Delta\left\{\sum_0^\infty \frac{1}{2^{2n}} + \sum_0^\infty \frac{1}{2^{4n}}\right\}$$
$$= \frac{3}{8}\Delta\left(\frac{4}{3}+\frac{16}{15}\right) = \frac{9}{10}\,\Delta.$$

Wir unterlassen die nähere Ausführung dieses Weges, den wir nur desshalb angedeutet haben, um erkennen zu lassen, wie derselbe Gedankengang, welcher Archimedes zur Quadratur der ebenen Parabel führte, auf die cubische Parabel übertragen werden kann. Zu demselben Resultat gelangen wir viel kürzer auf nachfolgendem Wege.

8. Wir haben in 6. das Tetraedervolumen bestimmt:

$$(\mathfrak{cdtt}') = \frac{(mn'-nm')\,\{m^2n'n'+mnm'n'+n^2m'm'\}}{(m+n)^3\,(m'+n')^3}\,\Delta,$$

wo $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}'$ die Berührungspunkte zweier Schmiegungsebenen bedeuten, die aus den Punkten $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}'$ der Geraden $|\,\mathfrak{cd}\,|$ an die cubische Parabel gelegt wurden und die Punkte $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}'$ durch die Verhältnisse

$$\frac{\mathfrak{do}}{\mathfrak{oc}} = \frac{m}{n}, \quad \frac{\mathfrak{do}'}{\mathfrak{o}'\mathfrak{c}} = \frac{m'}{n'}$$

bestimmt wurden; ersetzen wir diese Verhältnisse durch die Buchstaben

$$\frac{m}{n} = x, \quad \frac{m'}{n'} = x',$$

also

$$(\mathfrak{cdtt}') = -\frac{(x'-x)\,(x^2+xx'+x'x')}{(1+x)^3\,(1+x')^3}\,\Delta$$

und denken uns die Werthe xx' einander unendlich genähert, wodurch auch die Punkte $\mathfrak{tt}'$ einander unendlich nahe rücken und $|\,\mathfrak{tt}'\,|$ in ein Bogenelement der cubischen Parabel übergeht, dann wird die rechte Seite der obigen Gleichung in das Differential

---

und die Summe für $\rho = 1, 3, 5, 7 \ldots 2^\nu - 1$ giebt

$$3\Delta\,\frac{(1+2^{2\nu-2})}{2^{4\nu-1}},$$

oder wenn für $\nu - 1 = n$ gesetzt wird

$$\frac{3\Delta}{8}\,\frac{(1+2^{2n})}{2^{4n}}.$$

$$-3\Delta\,\frac{x^2\,dx}{(1+x)^6}$$

übergehen und die linke Seite in ein Tetraedervolumen, welches zu einer Kante die endliche Strecke $|\mathfrak{c}\mathfrak{d}|$ und zur Gegenkante die unendlichkleine Strecke $|\mathfrak{t}\mathfrak{t}'|$ hat. Dies Tetraeder wird begrenzt von den vier Dreiecken:

$$(\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{t}),\quad (\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{t}'),\quad (\mathfrak{c}\mathfrak{t}\mathfrak{t}'),\quad (\mathfrak{d}\mathfrak{t}\mathfrak{t}').$$

Lassen wir nun den veränderlichen Punkt $\mathfrak{o}$ die ganze Strecke von $\mathfrak{d}$ bis $\mathfrak{c}$ successive durchlaufen, so wird die Veränderliche x die Werthe von 0 bis ∞ annehmen (s. o. 2.) und der veränderliche Punkt $\mathfrak{t}$ successive den Bogen der cubischen Parabel von $\mathfrak{b}$ bis $\mathfrak{a}$ durchlaufen. Bilden wir die Summe aller dadurch erhaltenen unendlich-schmalen Tetraeder, so schliessen sich die Seitenflächen

$$(\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{t}),\quad (\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{t}'),\quad (\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{t}''),\quad (\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{t}''')\ \ldots$$

an einander an und wir erhalten ein Volumen, welches begrenzt wird von der ersten Seitenfläche $[\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{b}] = \beta$ und der letzten $[\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{a}] = \alpha$ und von den unendlich-schmalen Dreiecken, die $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ zu Spitzen und die sämmtlichen Bogenelemente $|\mathfrak{t}\mathfrak{t}'|$ des Curvenbogens $(\mathfrak{b}\mathfrak{a})$ zu gemeinsamen Grundlinien haben. Diese Dreiecke erfüllen zwei Stücke von Kegeloberflächen (3. O.), welche $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ zu Spitzen und die Strahlen nach sämmtlichen Punkten des Parabelbogens $(\mathfrak{b}\mathfrak{a})$ zu Kegelstrahlen haben. Auf der rechten Seite der obigen Gleichung ergiebt aber die Summe das Integral

$$-3\Delta\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(1+x)^6}$$

und wenn wir den Parabelbogen in der umgekehrten Richtung von $\mathfrak{a}$ bis $\mathfrak{b}$ durchlaufen den entgegengesetzten Werth.

Nun ist

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(1+x)^6} = \int_1^\infty \frac{y^2-2y+1}{y^6}\,dy = \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30},$$

also erhalten wir für das beschriebene Volumen den Werth:

$$\frac{\Delta}{10}$$

und können demgemäss folgendes Resultat aussprechen:

Legt man an zwei beliebigen Punkten $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *einer cubischen Parabel die Tangenten* a *und* b, *die Schmiegungsebenen* α *und* β *und bestimmt die Treffpunkte*

$$(a,\beta) = \mathfrak{c},\quad (b,\alpha) = \mathfrak{d}$$

also das Schmiegungstetraeder $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = \Delta$, *so schliessen die beiden Schmiegungsebenen* $\alpha\beta$ *und die beiden Stücke von Kegeloberflächen* (3. *O.*),

welche aus $\mathfrak{c}$ *und* $\mathfrak{b}$ *durch den Parabelbogen* $(\mathfrak{ab})$ *gelegt werden, ein Volumen ein, welches ein Zehntel von dem Volumen des Schmiegungstetraeders* Δ *ist.*

Zieht man dieses Volumen von dem des ganzen Schmiegungstetraeders Δ ab, so bleibt $\frac{9}{10}\,\Delta$, also erhalten wir den schon in 7. gefundenen Satz:

Projicirt man aus den Ecken $\mathfrak{c}$ *und* $\mathfrak{b}$ *des Schmiegungstetraeders den geschlossenen Umring, welcher von der Parabelsehne* $|\,\mathfrak{ab}\,|$ *und dem Parabelbogen* $(\mathfrak{ba})$ *gebildet wird, so schliessen diese beiden conischen Flächen ein Volumen ein, welches* $\frac{9}{10}$ *von dem Volumen des Schmiegungstetraeders ist*).*

Dieser Satz ist das Analogon zu der Eigenschaft der ebenen Parabel, wonach der Inhalt eines Parabelsegmentes gleich $\frac{2}{3}$ von dem Inhalte des Dreiecks ist, welches die zugehörige Parabelsehne und die Tangenten in den Endpunkten derselben einschliessen.

Wir gelangen zu einem weiteren Resultat, wenn wir das in 4. ermittelte Tetraedervolumen:

$$(\mathfrak{abtt}') = \frac{9(mn'-nm')\,mnm'n'}{(m+n)^3\,(m'+n')^3}\,\Delta$$

in Betracht ziehen, die Punkte $\mathfrak{tt}'$ einander unendlich nahe rücken und den veränderlichen Punkt $\mathfrak{o}$ successive die ganze Strecke von $\mathfrak{b}$ bis $\mathfrak{c}$ durchlaufen lassen. Die rechte Seite der letzten Gleichung geht dann in das Differential über

$$-\,9\Delta\,\frac{x^2\,dx}{(1+x)^6}$$

und die linke Seite in das unendlich-schmale Tetraeder, von dem eine Kante $|\,\mathfrak{ab}\,|$ und die Gegenkante das Bogenelement $|\,\mathfrak{tt}'\,|$ der cubischen Parabel ist. Dieses Tetraeder wird begrenzt von den vier Dreiecken

$$(\mathfrak{abt}),\quad (\mathfrak{abt}'),\quad (\mathfrak{att}'),\quad (\mathfrak{btt}').$$

Bei der Veränderung des Punktes $\mathfrak{o}$ auf $|\,\mathfrak{bc}\,|$ wird der veränderliche Parabelpunkt $\mathfrak{t}$ den Parabelbogen von $\mathfrak{b}$ nach $\mathfrak{a}$ durchlaufen, während $\mathfrak{o}$ von $\mathfrak{b}$ nach $\mathfrak{c}$ geht. Bilden wir die Summe aller dadurch erhaltenen unendlich-schmalen Tetraeder $(\mathfrak{abtt}')$, so schliessen sich die Seitenflächen

$$(\mathfrak{abt}),\quad (\mathfrak{abt}'),\quad (\mathfrak{abt}'')\ldots$$

an einander an, und wir erhalten ein Volumen, welches begrenzt

---

*) Diesen so wie den sogleich folgenden Satz hat Herr **Ad. Hurwitz** in dem hier vorangehenden Aufsatze: „*Einige allgemeine Sätze über Raumcurven*" (pag. 287—292 des vorliegenden Annalenbandes) ausgesprochen. Einer brieflichen Mittheilung desselben verdanke ich die Anregung zur vorstehenden, allerdings von wesentlich verschiedenen Gesichtspunkten ausgehenden Untersuchung.

wird von der ersten Seitenfläche [$\mathfrak{abb}$] und der letzten Seitenfläche [$\mathfrak{abc}$] und von den unendlich-schmalen Dreiecken, die wir erhalten, indem wir $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ mit sämmtlichen Bogenelementen $|\mathfrak{tt}'|$ des Parabelbogens ($\mathfrak{ba}$) verbinden; auf der rechten Seite der letzten Gleichung ergiebt die Summation das Integral

$$-9\Delta\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(1+x)^6} = -\frac{3\Delta}{10},$$

oder, wenn wir den Parabelbogen in der umgekehrten Richtung von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ durchlaufen, $+\frac{3\Delta}{10}$. Da die Ebenen [$\mathfrak{abb}$] und [$\mathfrak{bac}$] erhalten werden, indem man den Punkt $\mathfrak{a}$ mit der Tangente der cubischen Parabel in $\mathfrak{b}$, und den Punkt $\mathfrak{b}$ mit der Tangente der cubischen Parabel in $\mathfrak{a}$ durch je eine Ebene verbindet, oder, was dasselbe sagt, indem man $\mathfrak{a}$ mit dem ersten Bogenelement (in $\mathfrak{b}$) und $\mathfrak{b}$ mit dem letzten Bogenelement (in $\mathfrak{a}$) verbindet, so lässt sich das Resultat so aussprechen:

Sind $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zwei beliebige Punkte einer cubischen Parabel, und zieht man aus denselben nach sämmtlichen dazwischen-liegenden Punkten des Parabelbogens* ($\mathfrak{ab}$) *Strahlenpaare, deren Aufeinanderfolge Stücke von zwei Kegeloberflächen* (2. *O.*) *bilden, so schliessen dieselben ein Volumen ein, dessen Werth* $=\frac{3}{10}\Delta$ *ist, wo* Δ *das Volumen des Schmiegungstetraeders für die Parabelsehne* $|\mathfrak{ab}|$ *bedeutet.*

Dieses Volumen ist also ein Drittel von dem zuletzt ermittelten Volumen $\left(\frac{9}{10}\Delta\right)$ und dreimal so gross als das vorher (8.) ermittelte Volumen $\left(\frac{\Delta}{10}\right)$.

9. Ein weiteres Resultat erschliessen wir aus dem (in 4.) berechneten Volumen des Tetraeders:

$$(\mathfrak{oo}'\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2) = \frac{(mn'-nm')\,mnm'n'}{(m+n)^3\,(m'+n')^3}\,\Delta,$$

wenn wir die Punkte $\mathfrak{oo}'$ einander unendlich nahe rücken und den veränderlichen Punkt $\mathfrak{o}$ die ganze Strecke $|\mathfrak{bc}|$ von $\mathfrak{b}$ nach $\mathfrak{c}$ hin durchlaufen lassen. Die rechte Seite der Gleichung geht dann über in das Differenzial

$$-\Delta\,\frac{x^2dx}{(1+x)^6}$$

und die linke Seite drückt das Volumen eines unendlich-schmalen Tetraeders aus, von dem eine Kante die unendlich-kleine Strecke $|\mathfrak{oo}'|$ ist und die Gegenkante auf der Schnittlinie zweier unendlich-nahen Schmiegungsebenen, d. h. auf einer Tangente der cubischen Parabel dasjenige Stück ist, welches durch die beiden festen Schmiegungs-

ebenen $\alpha\beta$ ausgeschnitten wird. Trifft also die Tangente in dem Punkte $\mathfrak{t}$ der cubischen Parabel die beiden Schmiegungsebenen $\alpha\beta$ resp. in den Punkten $\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2$, so wird das vorige unendlich-schmale Tetraeder

$$(\mathfrak{o}\mathfrak{o}'\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2).$$

Bei der Veränderung des Punktes $\mathfrak{o}$ auf der Geraden $|\mathfrak{d}\mathfrak{c}|$ durchlaufen die Punkte $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ die Bögen von $\mathfrak{d}$ bis $\mathfrak{a}$ und von $\mathfrak{b}$ bis $\mathfrak{c}$ der ebenen Schmiegungsparabeln $\alpha^{(2)}\beta^{(2)}$ in den Schmiegungsebenen $\alpha\beta$. Die Kante $|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2|$ bestreicht ein Stück der geradlinigen abwickelbaren Oberfläche 4. O., welche von sämmtlichen Tangenten der cubischen Parabel beschrieben wird und die wir kurz „Tangentenfläche“ nennen wollen.

Die Summe sämmtlicher unendlich-schmalen Tetraeder $(\mathfrak{o}\mathfrak{o}'\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2)$ setzt sich zusammen zu einem einzigen Volumen, welches begrenzt wird von den beiden Schmiegungsebenen $\alpha\beta$ und jenem von $|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2|$ bestrichenen Stück der Tangentenfläche. Denn von den vier Seitenflächen des obigen Tetraeders

$$(\mathfrak{o}\mathfrak{o}'\mathfrak{t}_1),\quad (\mathfrak{o}\mathfrak{o}'\mathfrak{t}_2),\quad (\mathfrak{o}\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2),\quad (\mathfrak{o}'\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2)$$

bleiben die beiden ersten in festen Ebenen

$$[\mathfrak{o}\mathfrak{o}'\mathfrak{t}_1]=\alpha,\qquad [\mathfrak{o}\mathfrak{o}'\mathfrak{t}_2]=\beta$$

und die Kante $|\mathfrak{o}\mathfrak{o}'|$ bleibt in der festen Geraden $|\alpha\beta|$, während die Gegenkante $|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2|$ ein Stück der Tangentenfläche bestreicht und ihre Endpunkte $\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2$ in den Schmiegungsebenen $\alpha\beta$ Stücke der Schmiegungsparabeln durchlaufen.

Die auf einander folgenden Ebenen

$$[\mathfrak{o}\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2],\quad [\mathfrak{o}'\mathfrak{t}_1'\mathfrak{t}_2'],\quad [\mathfrak{o}''\mathfrak{t}_1''\mathfrak{t}_2'']\ \ldots$$

sind als unendlich nahe Schmiegungsebenen der cubischen Parabel zugleich die auf einander folgenden Berührungsebenen der Tangentenfläche und während $\mathfrak{o}$ die Strecke $|\mathfrak{d}\mathfrak{c}|$ durchläuft, also der Berührungspunkt $\mathfrak{t}$ den Bogen der cubischen Parabel von $\mathfrak{b}$ bis $\mathfrak{a}$ durchläuft, wird die Ebene $[\mathfrak{o}\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2]=\tau$ von der Schmiegungsebene β bis zur Schmiegungsebene α die dazwischenliegenden Schmiegungsebenen τ durchlaufen.

Fassen wir also den geschlossenen Umring auf, welcher gebildet wird von den beiden Strecken $|\mathfrak{a}\mathfrak{c}|$ und $|\mathfrak{b}\mathfrak{d}|$ einerseits und von den beiden Parabelbogen $\widehat{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}$ und $\widehat{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$ der Schmiegungsparabeln $\alpha^{(2)}\beta^{(2)}$ andererseits, so gehen durch denselben sowohl die beiden Ebenen $[\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{d}]=\alpha$ und $[\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{d}]=\beta$ als auch das von sämmtlichen Tangenten der cubischen Fläche, die zwischen $|\mathfrak{a}\mathfrak{c}|$ und $|\mathfrak{b}\mathfrak{d}|$ verlaufen, gebildete Stück der Tangentenfläche. Das Volumen, welches diese durch den obigen Umring gehenden beiden Begrenzungsflächen einschliessen, ist die Summe aller Tetraeder $(\mathfrak{o}\mathfrak{o}'\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2)$, während $\mathfrak{o}$ die Strecke $|\mathfrak{d}\mathfrak{c}|$ durchläuft.

Wir erhalten demnach das beschriebene Volumen gleich

$$-\Delta \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(1+x)^6} = -\frac{\Delta}{30},$$

oder wenn wir den Bogen der cubischen Parabel anstatt von $\mathfrak{b}$ nach $\mathfrak{a}$ in der umgekehrten Richtung von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ durchlaufen $= + \frac{\Delta}{30}$ und können nunmehr folgenden Satz aussprechen:

Legt man in zwei Punkten $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *einer cubischen Parabel die Tangenten* a *und* b, *die Schmiegungsebenen* α *und* β *und bestimmt die Schnittpunkte:*

$$(a, \beta) = \mathfrak{c}, \quad (b, \alpha) = \mathfrak{d},$$

also das Schmiegungstetraeder $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = \Delta$, *dann schneiden die sämmtlichen Schmiegungsebenen längs des Bogens* $\widehat{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ *der cubischen Parabel die festen Schmiegungsebenen* $\alpha\beta$ *in den Tangenten der Schmiegungsparabeln* $\alpha^{(2)}\beta^{(2)}$ *längs der Parabelbögen von* $\mathfrak{a}$ *bis* $\mathfrak{d}$ *in* $\alpha^{(2)}$, *und von* $\mathfrak{b}$ *bis* $\mathfrak{c}$ *in* $\beta^{(2)}$; *diese beiden Parabelbögen und die beiden Tangenten* $|\mathfrak{a}\mathfrak{c}|$ *und* $|\mathfrak{b}\mathfrak{d}|$ *bilden einen geschlossenen Umring, durch welchen einerseits das Ebenenpaar* $[\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}] = \alpha$ *und* $[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}] = \beta$ *und andererseits ein Stück der Tangentenfläche* (4. O.) *der cubischen Parabel geht, beschrieben von sämmtlichen zwischen* $|\mathfrak{a}\mathfrak{c}|$ *und* $|\mathfrak{b}\mathfrak{d}|$ *verlaufenden Tangenten längs des Bogens* $\widehat{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ *der cubischen Parabel. Das Volumen, welches diese durch den Umring gehenden beiden Begrenzungsflächen einschliessen, ist* $= \frac{\Delta}{30}$, *ein Dreissigstel von dem Volumen des Schmiegungstetraeders.*

Ziehen wir dieses Volumen von dem des ganzen Schmiegungstetraeders ab, so erhalten wir $\frac{29}{30}\Delta$ gleich dem Volumen, welches eingeschlossen wird von den beiden Segmenten der Schmiegungsparabeln $\alpha^{(2)}\beta^{(2)}$ über den Sehnen $|\mathfrak{a}\mathfrak{d}|$ und $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$, von den beiden Dreiecken $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})$ und $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d})$ und von dem Stück der Tangentenfläche, welches die Tangenten $|\mathfrak{a}\mathfrak{c}|$, $|\mathfrak{b}\mathfrak{d}|$ und die Parabelbögen $\widehat{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}$ und $\widehat{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$ der Schmiegungsparabeln $\alpha^{(2)}\beta^{(2)}$ begrenzen.

Dies Resultat können wir kürzer auch so aussprechen:

Die geradlinige abwickelbare Fläche 4. O., welche von sämmtlichen Tangenten der cubischen Parabel gebildet wird, theilt ein beliebiges Schmiegungstetraeder $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = \Delta$ *derselben allemal in zwei solche Stücke, deren Volumina sich zu einander verhalten* $= 29 : 1$, *indem das der Kante* $|\mathfrak{c}\mathfrak{d}|$ *anliegende Stück* $= \frac{\Delta}{30}$ *und das der Kante* $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ *anliegende Stück* $= \frac{29}{30}\Delta$ *ist.*

Breslau, den 15. November 1884.

Zur Transformation der Thetafunctionen einer Veränderlichen.

Von

Martin Krause in Rostock.

Die Transformationstheorie der Thetafunctionen einer Veränderlichen stellt es sich zur Aufgabe für einen beliebigen Transformationsgrad die transformirten Thetafunctionen als ganze rationale Functionen der ursprünglichen auszudrücken. Im folgenden soll eine allgemeinere Fassung des Problems gegeben werden, welche sich für eine gewisse Reihe von Untersuchungen von der grössten Bedeutung zeigt. Wir stellen das Problem so: *Es sollen zwischen den sämmtlichen transformirten Thetafunctionen und den ursprünglichen die möglichst allgemeinen Beziehungen hergestellt werden.*

Die Lösung dieses Problems möge im folgenden kurz angebahnt werden.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass der Transformationsgrad n eine ungerade Zahl sei, beschränken uns ferner auf die bekannten Repräsentanten. Ist dann

$$v' = tv, \quad \tau' = \frac{t\tau - 16\xi}{t_1}, \quad tt_1 = n,$$

so folgt:

$$\vartheta_0(v', \tau') = \sum_0^{\frac{n-1}{2}} {}^l x_l \,.\, \vartheta_0^{n-2l}(v) \,.\, \vartheta_1^{2l}(v)\,.$$

Durch Substitution halber Perioden ergeben sich hieraus die entsprechenden Formeln für die übrigen Thetafunctionen.

Die Constanten x_l können auf doppelte Weise dargestellt werden, erstens mit Hülfe der Grössen $\vartheta_\alpha\left(\frac{m + m_1\tau}{n}\right)$ und zweitens als rationale Functionen der ursprünglichen und der transformirten Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente. (Cf. *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen* von Königsberger; meine eigene Arbeit in den Acta mathematica, 3, pag. 93; *Zur Transformation der Thetafunctionen* von Müller, Grunerts Archiv, Band 1, 2[te] Reihe).

Mit Hülfe derselben Principien folgt dann, dass wenn $\vartheta_0(v', \tau')$ und $\vartheta_0(v'', \tau'')$ zwei willkürliche Repräsentanten bedeuten, dass dann eine Gleichung von der Form besteht:

$$\vartheta_0(v', \tau') = c \,.\, \vartheta_0(v'', \tau'') + \sum{}' x_l \,.\, \vartheta_0^{n-2l}(v) \,.\, \vartheta_1^{2l}(v)$$

wobei die letzte Summe über genau dieselben Verbindungen zu nehmen ist, wie vorhin, mit Ausnahme einer einzigen. Es ist dieses dadurch angedeutet, dass die Summe mit einem Strich versehen ist. Solcher Gleichungen giebt es $\frac{n+1}{2}$ verschiedene. Diejenige Art der Coefficientenbestimmung, die sich zuerst darbietet, bestände in der Elimination je eines Gliedes aus den beiden ursprünglichen Gleichungen, welche für die beiden Repräsentanten gefunden sind. Jedenfalls folgt für die Constanten in dieser Gleichung das analoge, wie für die Constanten in der ursprünglichen Gleichung. Auch sie können auf doppelte Weise bestimmt werden.

Indessen dürfte diese Darstellungsart wesentlich neue Resultate nicht liefern. Es empfiehlt sich daher von directen Methoden Gebrauch zu machen.

Dazu denken wir uns aus der ursprünglichen Gleichung durch Substitution halber Perioden die drei andern entwickelt, welche dieselben Constanten haben, verbinden ferner mit den ursprünglichen alle andern Gleichungen, die zwischen denselben zwei Repräsentanten bestehen. Wir erhalten dann 4 $\frac{n+1}{2}$ Gleichungen mit $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ Unbekannten die linear auftreten. Diese Gleichungen haben die Form:

$$\vartheta_3^n \cdot \frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0^n(v, \tau)} = c \cdot \vartheta_3^n \cdot \frac{\vartheta_0(v'', \tau'')}{\vartheta_0^n(v, \tau)} + \sum{}' x_l \,.\, \vartheta_3^{n-2l} \,.\, \vartheta_2^{2l} \,.\, sn^{2l}(u, \varkappa),$$

$$\frac{0_2'}{0_0'} \cdot \vartheta_0^n \cdot cn(u', c') \cdot \frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0^n(v, \tau)} = c \cdot \frac{0_2''}{0_0''} \cdot \vartheta_0^n \cdot cn(u'', c'') \cdot \frac{\vartheta_0(v'', \tau'')}{\vartheta_0^n(v, \tau)}$$
$$+ \sum{}' x_l \,.\, \vartheta_2^{n-2l} \,.\, \vartheta_3^{2l} \,.\, cn^{n-2l}(u, \varkappa) \,.\, dn^{2l}(u, \varkappa),$$

$$\frac{0_3'}{0_0'} \cdot \vartheta_0^n \cdot dn(u', c') \cdot \frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0^n(v, \tau)} = c \cdot \frac{0_3''}{0_0''} \cdot \vartheta_0^n \cdot dn(u'', c'') \cdot \frac{\vartheta_0(v'', \tau'')}{\vartheta_0{}_{\,i}'(v, \tau)}$$
$$+ \sum{}' x_l \,.\, \vartheta_3^{n-2l} \,.\, \vartheta_2^{2l} \,.\, dn^{n-2l}(u, \varkappa) \,.\, cn^{2l}(u, \varkappa),$$

$$(-1)^{\frac{t'-1}{2}} \cdot \frac{0_2'}{0_3'} \cdot \vartheta_3^n \cdot sn(u', c') \cdot \frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0^n(v, \tau)} = c \cdot (-1)^{\frac{t''-1}{2}} \cdot \frac{0_2''}{0_3''} \cdot \vartheta_3^n \cdot sn(u'', c'') \cdot \frac{\vartheta_0(v'', \tau'')}{\vartheta_0^n(v, \tau)}$$
$$+ \sum{}' x_l \,.\, \vartheta_2^{n-2l} \,.\, \vartheta_3^{2l} \,.\, sn^{n-2l}(u, \varkappa).$$

Dabei ist:

$$u = \pi . \vartheta_3^2 . v, \quad u' = \pi \cdot 0_3'^2 . v' = t' \cdot u \cdot \frac{0_3'^2}{\vartheta_3^2}, \quad u'' = \pi \cdot 0_3''^2 \cdot v'' = t'' \cdot u \cdot \frac{0_3''^2}{\vartheta_3^2},$$

$$k = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}, \quad c' = \frac{0_2'^2}{0_3'^2}, \quad c'' = \frac{0_2''^2}{0_3''^2}, \quad \vartheta_\alpha(0, \tau) = \vartheta_\alpha, \quad \vartheta_\alpha(0, \tau') = 0_\alpha',$$

$$\vartheta_\alpha(0, \tau'') = 0_\alpha''.$$

Wir denken uns nun beide Seiten dieser Gleichungen nach Potenzen von u entwickelt. Die Coefficienten in der Entwickelung der elliptischen Functionen $sn(u, \varkappa)$, $cn(u, \varkappa)$, $dn(u, \varkappa)$ und ihrer Potenzen resp. Producte sind rationale Functionen der ursprünglichen Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente, die Coefficienten in der Entwickelung der elliptischen Functionen mit den Argumenten u' resp. u'' und den Moduln c' resp. c'' sind rationale Functionen der ursprünglichen und der transformirten Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente, der Grössen ϑ_α, $0_\alpha'$, $0_\alpha''$. Die Entwickelungscoefficienten bei den Functionen $\frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0^n(v, \tau)}$ und $\frac{\vartheta_0(v'', \tau'')}{\vartheta_0^n(v, \tau)}$ sehen wir mit Ausnahme des constanten Gliedes sämmtlich als Unbekannte an, obgleich zwischen ihnen leicht herstellbare Relationen bestehen.

Dann folgt, dass alle Coefficienten sich als rationale Functionen der ursprünglichen und der transformirten Thetafunctionen ausdrücken lassen, der Grössen ϑ_α, $0_\alpha'$, $0_\alpha''$, es folgt ferner, dass zwischen diesen Grössen unendlich viele rationale Beziehungen bestehen.

Zweitens kann die Constantenbestimmung mit Hülfe der Thetafunctionen vorgenommen werden, deren Argumente Theilwerthe sind. Die Vergleichung der verschiedenen Ausdrucksformen liefert interessante Beziehungen zwischen den soeben genannten Grössen, den ursprünglichen und den transformirten Thetafunctionen.

In ähnlicher Weise können zwischen je drei, vier etc. Repräsentanten Beziehungen hergestellt werden. Es ist klar, dass die Zahl derselben übereinstimmt mit der Zahl der Combinationen von $\frac{n+1}{2}$ Elementen zu je 2, 3, etc. . . .

Hierbei ergiebt sich dann von selbst das Problem, zwischen je $\frac{n+1}{2} + 1$ Repräsentanten lineare Beziehungen herzustellen. Die Auflösbarkeit desselben folgt unmittelbar aus den vorhin gemachten Bemerkungen. Falls n eine Primzahl ist, erhalten wir den bekannten Jacobi'schen Satz. Wir können ganz allgemein so sagen.

Bezeichnet man die Zahl der von einander verschiedenen Repräsentanten $\vartheta_\alpha(v', \tau')$, mit R, so sind diese Grössen die Lösungen eines Systems von ebensovielen linearen Gleichungen. Die rechten

Seiten bei $R = \frac{n+1}{2}$ derselben sind Null, bei den übrigen gleich $\vartheta_{\alpha}^{n-2l}(v).\vartheta_{\beta}^{2l}(v)\left[l=0,1,\cdots,\frac{n-1}{2}\right]$.

Die Constanten können auf mehrere, principiell von einander verschiedene Arten bestimmt werden. Die Zahl der Ausdrucksformen ist eine unendlich mannigfache.

Die nähere Ausführung der soeben mitgetheilten Methoden führt zu einer grossen Fülle wichtiger, grösstentheils neuer Thetarelationen, wie an anderem Orte gezeigt werden wird.

Warnemünde, September 1884.

Zur Transformation der Thetafunctionen zweier Veränderlichen.

Von

Martin Krause in Rostock.

Im Folgenden sollen die Methoden der Transformationstheorie, wie sie von Göpel und Hermite aufgestellt sind, dazu angewandt werden, um eine Reihe wichtiger Probleme in der Theorie der Thetafunctionen zweier Veränderlichen zu lösen.

Erstens soll das Problem behandelt werden, *die Differentialquotienten der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung und gewisser einfacher Verbindungen derselben durch die Functionen selbst auszudrücken.* Bei Anwendung ähnlicher Methoden wie sie Desirée André in der Theorie der elliptischen Functionen gebraucht hat, führt dieses Problem in seinen Consequenzen zu der Entwickelung der hyperelliptischen Functionen in Potenzreihen.

Zweitens soll die Umkehrung der vorigen Aufgabe vorgenommen werden d. h. *es sollen die Potenzen und eine Reihe von Producten der hyperelliptischen Functionen durch die Functionen, gewisse einfache Verbindungen derselben und ihre Differentialquotienten linear ausgedrückt werden.* Es wird hierdurch die Frage nach Reihenentwickelungen der Potenzen und Producte der hyperelliptischen Functionen auf das Problem zurückgeführt, die Functionen selbst und gewisse einfache Verbindungen derselben in Reihen zu entwickeln.

Drittens soll das eigentliche Transformationsproblem in einer Fassung behandelt werden, die allgemeiner ist als die bisher behandelte. Die Transformationstheorie, wie sie bisher aufgestellt worden ist, lehrt für einen jeden Transformationsgrad eine beliebige transformirte Thetafunction durch die ursprünglichen ganz und rational ausdrücken.

Hier wollen wir nun die Theorie so fassen, dass wir nach möglichst allgemeinen Beziehungen zwischen den transformirten und den ursprünglichen Functionen suchen d. h. nach Beziehungen, die nicht nur zwischen *einer* transformirten und den ursprünglichen Functionen bestehen, sondern zwischen *beliebig vielen* transformirten und den ursprünglichen. Bei dieser Auffassungsweise fällt von selbst als ganz

specieller Fall ein Satz heraus, der in neuester Zeit der Gegenstand einer ausführlichen Arbeit geworden ist und zwar in einer Gestalt, welche als die naturgemässe bezeichnet werden dürfte, wenn man sich auf den Boden der Transformationstheorie stellt.

Im 96ten Bande des Crelleschen Journals beweist nämlich Herr Wiltheiss den Satz, dass, wenn n eine ungerade Primzahl ist, zwischen den $1+n+n^2+n^3$ Repräsentanten eines ganz bestimmten Systems $1+n+n^2+n^3-\frac{n^2+1}{2}$ lineare Beziehungen bestehen. Die Coefficienten derselben werden bestimmt. Bei der von mir eingeschlagenen Methode zeigt es sich nun, dass bei derselben Beschränkung von n zwischen den Repräsentanten eines beliebigen Systems $1+n+n^2+n^3-\frac{n^2+1}{2}$ lineare Gleichungen bestehen, dass ferner $\frac{n^2+1}{2}$ Ausdrücke hergestellt werden können, die sich aus denselben Repräsentanten linear zusammensetzen und gleich gewissen einfachen Verbindungen der ursprünglichen Thetafunctionen sind, nämlich gleich Ausdrücken von der Form $\vartheta_a^\alpha(v_1, v_2) . \vartheta_b^\beta(v_1, v_2) . \vartheta_c^\gamma(v_1, v_2) \cdot \vartheta_d^\delta(v_1, v_2)$. Es kann dieses Resultat auch folgendermassen ausgedrückt werden: *Es sind die* $1+n+n^2+n^3$ *Repräsentanten eines beliebigen Systems die Unbekannten eines Systems von ebenso vielen linearen Gleichungen. Die rechten Seiten von* $1+n+n^2+n^3-\frac{n^2+1}{2}$ *derselben sind Null, während die rechten Seiten der übrigen die Form haben:*

$$\vartheta_a^\alpha(v_1, v_2) . \vartheta_b^\beta(v_1, v_2) . \vartheta_c^\gamma(v_1, v_2) . \vartheta_d^\delta(v_1, v_2).$$

In allen diesen Gleichungen sind die Coefficienten rationale Functionen der ursprünglichen und der transformirten Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente, können aber auch auf andere Arten ausgedrückt werden.

Bei dieser Auffassungsweise wird dann zu gleicher Zeit das Problem gelöst, die Potenzen und gewisse Producte der Thetafunctionen in Fourier'sche Reihen zu entwickeln.

Bei Anwendung der Methoden, die in früheren Arbeiten des Verfassers entwickelt worden sind, ergeben sich ferner eine grosse Reihe weiterer Beziehungen zwischen den Wurzeln der Multiplicator- und Modulargleichungen. Schon in der Theorie der elliptischen Functionen ist es bisher nicht möglich gewesen die Functionalbeziehungen, welche in der Transformationstheorie bestehen, in expliciter Form allgemein herzustellen — um so viel weniger in der Theorie der hyperelliptischen Functionen. Es muss daher eine jede Methode von Bedeutung sein, welche zwar nicht jene Gleichungen kennen lehrt, aber doch Mittel an die Hand giebt, um Beziehungen zwischen den Wurzeln herzuleiten.

Die zu entwickelnden Sätze sollen im folgenden nicht in der allgemeinsten Form aufgestellt werden. Es gestaltet sich alles einfacher

und übersichtlicher, wenn man von speciellen Thetafunctionen ausgeht. Es lassen sich die allgemeinen Sätze aus den auf diese Weise erhaltenen speciellen ohne alle Mühe ableiten. Unter solchen Umständen kann von der Aufstellung der allgemeinen Sätze abgesehen werden.

§ 1.

Darstellung der Differentialquotienten der hyperelliptischen Functionen und gewisser Verbindungen derselben.

Betrachten wir zunächst den Ausdruck

$$f_{2k,r}(v_1, v_2) = \vartheta_5^{2k}(v_1, v_2) \cdot \frac{\partial^{2k-1} \dfrac{\vartheta_0(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_1^{2k-r-1} \partial v_2^{r}}$$

so hat derselbe jedenfalls die Form:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n} c_{mn} \cdot e^{2\pi i (m v_1 + n v_2)}$$

wobei die Grössen c_{mn} constante Grössen bedeuten. Ferner aber leistet der Ausdruck den Gleichungen Genüge:

$$f_{2k,r}(v_1 + 1, v_2) = f_{2k,r}(v_1, v_2) . f_{2k,r}(v_1, v_2 + 1) = f_{2k,r}(v_1, v_2),$$
$$f_{2k,r}(v_1 + \tau_{11}, v_2 + \tau_{12}) = - e^{-2k\pi i (2v_1 + \tau_{11})} . f_{2k,r}(v_1, v_2),$$
$$f_{2k,r}(v_1 + \tau_{12}, v_2 + \tau_{22}) = - e^{-2k\pi i (2v_2 + \tau_{22})} . f_{2k,r}(v_1, v_2).$$

Drittens endlich ist der Ausdruck eine ungerade Function der Veränderlichen v_1 und v_2. Hieraus folgt, dass nur $2k^2$ Constanten c_{mn} willkürlich bleiben können.

Wäre es daher möglich, $2k^2$ linear von einander unabhängige Functionen von v_1 und v_2 $\varphi_\alpha(v_1, v_2)$ zu bestimmen, welche dieselbe Form besitzen und denselben Bedingungsgleichungen Genüge leisten, so würde sich eine Gleichung von der Form ergeben:

$$\vartheta_5^{2k}(v_1, v_2) \cdot \frac{\partial^{2k-1} \dfrac{\vartheta_0(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_1^{2k-r-1} \partial v_2^{r}} = \sum^{\alpha} d_\alpha \cdot \varphi_\alpha(v_1, v_2),$$

wobei die Grössen d_α constante Grössen bedeuten.

Es ist nun nicht schwer solche Functionen $\varphi_\alpha(v_1, v_2)$ zu finden. In der That sehen wir zunächst von der letzten Bedingung ab, dass die Functionen ungerade sein sollen, nehmen ferner an, dass die Grössen $\vartheta_0(v_1, v_2)$, $\vartheta_5(v_1, v_2)$, $\vartheta_c(v_1, v_2)$, $\vartheta_d(v_1, v_2)$ ein Göpel'sches Quadrupel bilden, so genügen alle Ausdrücke:

$$\vartheta_0^{\alpha}(v_1, v_2) . \vartheta_5^{\beta}(v_1, v_2) . \vartheta_c^{\gamma}(v_1, v_2) . \vartheta_d^{\delta}(v_1, v_2)$$

bei welchen:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2k, \quad \beta + \delta \equiv 1 \bmod. 2, \quad \gamma + \delta \equiv 0 \bmod. 2$$

ist, den obigen Bedingungsgleichungen. Nehmen wir ferner die Bedingung hinzu, dass $\delta < 4$ sein soll, so sind die Ausdrücke linear von einander unabhängig und endlich ist ihre Zahl gerade gleich $2k^2$. Denken wir uns nun auf die Functionen

$$\vartheta_0(v_1, v_2),\ \vartheta_5(v_1, v_2),\ \vartheta_c(v_1, v_2),\ \vartheta_d(v_1, v_2)$$

Substitutionen halber Perioden angewandt, so erhalten wir drei neue Quadrupel. Unter diesen aber giebt es immer zwei, deren entsprechende Producte denselben Bedingungsgleichungen Genüge leisten und überdies ungerade sind. Da nun die Zahl der ursprünglichen Quadrupel $(0, 5, c, d)$ gleich 3 ist, so folgt, dass wir sechs brauchbare Quadrupel erhalten, nämlich:

$$(1, 01, 02, 2),\quad (1, 01, 04, 4),\quad (1, 01, 3, 03),$$
$$(3, 03, 4, 04),\quad (3, 03, 02, 2),\quad (04, 4, 02, 2).$$

Die Reihenfolge ist von Bedeutung.

Hieraus folgt der Lehrsatz.

Es giebt sechs Göpel'sche Quadrupel (a, b, c, d) derart, dass die Gleichung besteht:

$$\vartheta_5^{2k}(v_1, v_2)\cdot\frac{\partial^{2k-1}\dfrac{\vartheta_0(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_1^{2k-r-1}\,\partial v_2^{r}} = \sum e_{\alpha\beta\gamma\delta}\,.\,\vartheta_a^{\alpha}(v_1, v_2).\,\vartheta_b^{\beta}(v_1, v_2).\,\vartheta_c^{\gamma}(v_1, v_2)\,.\,\vartheta_d^{\delta}(v_1, v_2),$$

wobei die Beziehungen stattfinden:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2k,\ \gamma + \delta \equiv 0 \bmod. 2,\ \beta + \delta \equiv 1 \bmod. 2,\ \delta < 4.$$

Die Grössen $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ sind constante Grössen.

An Stelle der Thetafunctionen sollen nun die hyperelliptischen Functionen eingeführt werden, ähnlich wie es der Verfasser im 3ten Bande der Acta mathematica gethan hat.

Wir setzen bei bekannter Bezeichnungsweise:

$$\vartheta_3'(v_1)_0 = K_{21}\cdot\frac{\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_{23}\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_0\,.\,\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}^2\,.\,\vartheta_4^2\,.\,\vartheta_5^2},$$

$$\vartheta_3'(v_2)_0 = K_{22}\cdot\frac{\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_{23}\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_0\,.\,\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}^2\,.\,\vartheta_4^2\,.\,\vartheta_5^2},$$

$$\vartheta_{24}'(v_1)_0 = -K_{11}\cdot\frac{\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_0\,.\,\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5},$$

$$\vartheta_{24}'(v_2)_0 = -K_{12}\cdot\frac{\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_0\,.\,\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5}.$$

Ferner führen wir die Argumente der hyperelliptischen Functionen u_1 und u_2 durch die Gleichungen ein:

$$u_1 = K_{11}.v_1 + K_{12}\,.\,v_2,$$
$$u_2 = K_{21}.v_1 + K_{22}\,.\,v_2$$

und setzen:

$$\frac{\vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)} = a\,l_\alpha(u_1, u_2).$$

Für die Nullwerthe der Argumente bezeichnen wir die Grössen:

$$a \quad (u_1, u_2)$$

und

$$\frac{\partial\, a\,l_\alpha(u_1, u_2)}{\partial u_i}$$

durch $a\,l_\alpha$ und $a\,l'_\alpha(u_i)_0$. Dann folgen unmittelbar die Formeln:

$$a\,l_3'\,(u_1)_0 = \quad 0, \qquad a\,l'_3\,(u_2)_0 = \frac{\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_{23}\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_0\,.\,\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}^2\,.\,\vartheta_4^2\,.\,\vartheta_5^2},$$

$$a\,l'_{24}(u_1)_0 = -\frac{\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_0\,.\,\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5{}^2}, \qquad a\,l'_{24}(u_2)_0 = 0,$$

$$a\,l'_{04}(u_1)_0 = \frac{\vartheta_{14}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_{23}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5{}^2}, \qquad a\,l'_{04}(u_2)_0 = \frac{\vartheta_{14}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_{23}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5{}^2},$$

$$a\,l'_1\,(u_1)_0 = \frac{\vartheta_5\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_0}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5{}^2}, \qquad a\,l'_1\,(u_2)_0 = \varkappa^2\cdot\frac{\vartheta_5\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_0}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5{}^2},$$

$$a\,l'_{02}(u_1)_0 = \frac{\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_4}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5{}^2}, \qquad a\,l'_{02}(u_2)_0 = \lambda^2\cdot\frac{\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_4}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5{}^2},$$

$$a\,l'_{13}\,(u_1)_0 = \frac{\vartheta_{23}\,.\,\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_5\,.\,\vartheta_{34}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5{}^2}, \qquad a\,l'_{13}(u_2)_0 = \mu^2\cdot\frac{\vartheta_{23}\,.\,\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_5\,.\,\vartheta_{34}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5{}^2}.$$

Ferner ist klar, dass der vorhin gefundene Ausdruck für den $2k-1^{\text{ten}}$ Differentialquotienten ungeändert bleibt, wenn an Stelle von $v_1, v_2, \vartheta_\alpha(v_1, v_2)$ gesetzt wird $u_1, u_2\ a\,l_\alpha(u_1, u_2)$, so dass wir die Formel finden:

$$\frac{\partial^{2k-1}\,a\,l_0\,(u_1, u_2)}{\partial u_1{}^{2k-r-1}\,\partial u_2{}^r} = \sum e_{\alpha\beta\gamma\delta}\,.\,a\,l_a{}^\alpha(u_1,u_2)\,.\,a\,l_b{}^\beta(u_1,u_2)\,.\,a\,l_c{}^\gamma(u_1,u_2)\,.\,a\,l_d{}^\delta(u_1,u_2),$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 2k, \quad \gamma+\delta \equiv 0 \text{ mod. } 2, \quad \beta+\delta \equiv 1 \text{ mod. } 2, \quad \delta < 4.$$

Als speciellen Fall wählen wir $k = 1$.

Für denselben ergeben sich die Formeln:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\, a\,l_0(u_1, u_2)}{\partial u_i} &= e_{01}^{(i)}\,.\,a\,l_1\,(u_1, u_2)\,.\,a\,l_{01}(u_1, u_2) + e_{11}^{(i)}\,.\,a\,l_{02}(u_1, u_2)\,.\,a\,l_2\,(u_1, u_2)\\
&= e_{02}^{(i)}\,.\,a\,l_3(u_1, u_2)\,.\,a\,l_{03}(u_1, u_2) + e_{12}^{(i)}\,.\,a\,l_{04}(u_1, u_2)\,.\,a\,l_4\,(u_1, u_2)\\
&= e_{03}^{(i)}\,.\,a\,l_1\,(u_1, u_2)\,.\,a\,l_{01}\,(u_1, u_2) + e_{13}^{(i)}\,.\,a\,l_{04}(u_1, u_2)\,.\,a\,l_4\,(u_1, u_2)\\
&= e_{04}^{(i)}\,.\,a\,l_3(u_1, u_2)\,.\,a\,l_{03}(u_1, u_2) + e_{14}^{(i)}\,.\,a\,l_{02}(u_1, u_2)\,.\,a\,l_2\,(u_1, u_2)\\
&= e_{05}^{(i)}\,.\,a\,l_1(u_1, u_2)\,.\,a\,l_{01}(u_1, u_2) + e_{15}^{(i)}\,.\,a\,l_3(u_1, u_2)\,.\,a\,l_{03}\,(u_1, u_2)\\
&= e_{06}^{(i)}\,.\,a\,l_{04}(u_1, u_2)\,.\,a\,l_4(u_1, u_2) + e_{16}^{(i)}\,.\,a\,l_{02}(u_1, u_2)\,.\,a\,l_2(u_1, u_2).
\end{aligned}$$

Die Bestimmung der Constanten erfolgt am einfachsten dadurch, dass

wir aus einer dieser Gleichungen durch Substitution halber Perioden eine Reihe anderer ableiten und in diesen $u_1 = u_2 = 0$ setzen. Nehmen wir z. B. die fünfte Gleichung und setzen in ihr an Stelle von

$$\vartheta_5(v_1, v_2),\ \vartheta_0(v_1, v_2),\ \vartheta_1(v_1, v_2),\ \vartheta_{01}(v_1, v_2),\ \vartheta_3(v_1, v_2),\ \vartheta_{03}(v_1, v_2),$$
$$\vartheta_{01}(v_1, v_2), i.\vartheta_1(v_1, v_2),\ i.\vartheta_0(v_1, v_2),\ \vartheta_5(v_1, v_2),\ \vartheta_{24}(v_1, v_2), i.\vartheta_{13}(v_1, v_2),$$
$$\vartheta_{03}(v_1, v_2), i.\vartheta_3(v_1, v_2), -i.\vartheta_{24}(v_1, v_2),\ \vartheta_{13}(v_1, v_2), i.\vartheta_0(v_1, v_2),\ \vartheta_5(v_1, v_2),$$

so ergiebt sich:

$$al_1'(u_i)_0 = \overset{i}{e}_{05} \cdot \frac{al_0}{al_{01}};\quad al_3'(u_i)_0 = \overset{i}{e}_{15} \cdot \frac{al_0}{al_{03}}.$$

In ähnlicher Weise sind die andern Constanten zu bestimmen. Es ergeben sich die Formeln:

$$\begin{aligned}
al_{23} \cdot al_{14} \cdot \frac{\partial al_0(u_1, u_2)}{\partial u_i} = {} & al_4 . al_{04}'(u_i)_0 . al_1(u_1, u_2) . al_{01}(u_1, u_2) \\
& - al_{03} . al_3'(u_i)_0 . al_{02}(u_1, u_2) . al_2(u_1, u_2) \\
= {} & - al_2 . al_{02}'(u_i)_0 . al_3(u_1, u_2) . al_{03}(u_1, u_2) \\
& + al_{01} . al_1'(u_i)_0 . al_{04}(u_1, u_2) . al_4(u_1, u_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
al_{12} \cdot al_{34} \cdot \frac{\partial al_0(u_1, u_2)}{\partial u_i} = {} & al_2 . al_{02}'(u_i)_0 . al_1(u_1, u_2) . al_{01}(u_1, u_2) \\
& + al_{03} . al_3'(u_i)_0 . al_{04}(u_1, u_2) . al_4(u_1, u_2) \\
= {} & al_4 . al_{04}'(u_i)_0 . al_3(u_1, u_2) . al_{03}(u_1, u_2) \\
& + al_{01} . al_1'(u_i)_0 . al_{02}(u_1, u_2) . al_2(u_1, u_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
al_0 \cdot \frac{\partial al_0(u_1, u_2)}{\partial u_i} = {} & al_{01} . al_1'(u_i)_0 . al_1(u_1, u_2) . al_{01}(u_1, u_2) \\
& + al_{03} . al_3'(u_i)_0 . al_3(u_1, u_2) . al_{03}(u_1, u_2) \\
= {} & al_4 . al_{04}'(u_i)_0 . al_{04}(u_1, u_2) . al_4(u_1, u_2) \\
& + al_2 . al_{02}'(u_i)_0 . al_{02}(u_1, u_2) . al_2(u_1, u_2).
\end{aligned}$$

Die Coefficienten lassen sich noch in eine andere Form bringen. Wir wollen zunächst $i = 1$ setzen, ferner ganz allgemein wenn $al_\varepsilon(u_1, u_2)$ eine gerade Function von u_1 und u_2 ist an Stelle von

$$al_\varepsilon(u_1, u_2) : \frac{al_\varepsilon(u_1, u_2)}{al_\varepsilon} \cdot al_\varepsilon,$$

wenn dagegen $al_\varepsilon(u_1, u_2)$ eine ungerade Function ist an ihrer Stelle setzen $\frac{al_\varepsilon(u_1, u_2)}{al_\varepsilon'(u_i)_0} \cdot al_\varepsilon'(u_i)_0$ — wobei i gleich 2 ist für $\varepsilon = 3$, in allen andern Fällen dagegen gleich 1. Dann folgt unmittelbar, dass die Coefficienten von $\frac{al_\varepsilon(u_1, u_2)}{al_\varepsilon}$ resp. $\frac{al_\varepsilon(u_1, u_2)}{al_\varepsilon'(u_i)_0}$ sich rational aus den

Grössen $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 zusammensetzen lassen und zwar erhalten wir die Formeln:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{al_0}\cdot\frac{\partial\, al_0(u_1, u_2)}{\partial u_1} &= \mu^2\cdot\frac{al_1(u_1, p_2)}{al_1'(u_1)_0}\cdot\frac{al_{01}(u_1, u_2)}{al_{01}} \\
&= \mu^2\cdot\frac{al_{04}(u_1, u_2)}{al'_{04}(u_1)_0}\cdot\frac{al_4(u_1, u_2)}{al_4} \\
&\qquad -\mu^2\cdot\varkappa_1{}^2\cdot\frac{al_3(u_1, u_2)}{al_3'(u_2)_0}\cdot\frac{al_{03}(u_1, u_2)}{al_{03}} \\
&= \mu^2\cdot\frac{al_1(u_1, u_2)}{al_1'(u_1)_0}\cdot\frac{al_{01}(u_1, u_2)}{al_{01}} \\
&= \mu^2\cdot\lambda_\varkappa{}^2\cdot\frac{al_3(u_1, u_2)}{al_3'(u_2)_0}\cdot\frac{al_{03}(u_1, u_2)}{al_{03}} \\
&\qquad + \mu^2\cdot\frac{al_{02}(u_1, u_2)}{al'_{02}(u_1)_0}\cdot\frac{al_2(u_1, u_2)}{al_2} \\
&= \mu^2\cdot\frac{al_1(u_1, u_2)}{al_1'(u_1)_0}\cdot\frac{al_{01}(u_1, u_2)}{al_{01}} \\
&= \frac{\mu^2\cdot\lambda_\varkappa^2}{\lambda_1{}^2}\cdot\frac{al_{04}(u_1, u_2)}{al'_{04}(u_1)_0}\cdot\frac{al_4(u_1, u_2)}{al_4} \\
&\qquad + \frac{\mu^2\cdot\varkappa_1{}^2}{\lambda_1{}^2}\cdot\frac{al_{02}(u_1, u_2)}{al'_{02}(u_1)_0}\cdot\frac{al_2(u_1, u_2)}{al_2}.
\end{aligned}
$$

Dabei finden bekanntlich die Beziehungen statt:

$$
\varkappa^2 = \frac{\vartheta_{23}^2\cdot\vartheta_{01}^2}{\vartheta_4^2\cdot\vartheta_5^2},\quad \lambda^2 = \frac{\vartheta_2^2\cdot\vartheta_{23}^2}{\vartheta_{34}^2\cdot\vartheta_4^2},\quad \mu^2 = \frac{\vartheta_2^2\cdot\vartheta_{01}^2}{\vartheta_{34}^2\cdot\vartheta_5^2},
$$

$$
\varkappa_1{}^2 = \frac{\vartheta_{03}^2\cdot\vartheta_{12}^2}{\vartheta_4^2\cdot\vartheta_5^2},\quad \lambda_1{}^2 = \frac{\vartheta_0^2\cdot\vartheta_{03}^2}{\vartheta_{34}^2\cdot\vartheta_4^2},\quad \mu_1{}^2 = \frac{\vartheta_0^2\cdot\vartheta_{12}^2}{\vartheta_{34}^2\cdot\vartheta_5^2},
$$

$$
\lambda_\varkappa{}^2 = \varkappa^2 - \lambda^2 = \frac{\vartheta_{14}^2\cdot\vartheta_{03}^2\cdot\vartheta_{23}^2}{\vartheta_{34}^2\cdot\vartheta_4^2\cdot\vartheta_5^2},\quad \mu_\lambda{}^2 = \lambda^2 - \mu^2 = \frac{\vartheta_{14}^2\cdot\vartheta_0^2\cdot\vartheta_2^2}{\vartheta_{34}^2\cdot\vartheta_4^2\cdot\vartheta_5^2},
$$

$$
\mu_\varkappa{}^2 = \varkappa^2 - \mu^2 = \frac{\vartheta_{14}^2\cdot\vartheta_{12}^2\cdot\vartheta_{01}^2}{\vartheta_{34}^2\cdot\vartheta_4^2\cdot\vartheta_5^2}.
$$

In ähnlicher Weise ist der erste Differentialquotient nach u_2 zu bilden. Der soeben entwickelte Satz bleibt bei ihm bestehen. Das analoge gilt für alle Thetafunctionen.

Mit Rücksicht auf die kommenden Betrachtungen ergiebt sich hieraus der Satz, dass die Coefficienten, welche in der Darstellung des $2\varkappa - 1^{\text{ten}}$ Differentialquotienten auftreten, rationale Functionen von $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 werden, wenn die vorhin genannten Operationen vorgenommen werden.

Die soeben entwickelten Formeln führen unmittelbar dazu, die Werthe der zweiten Differentialquotienten für die Nullwerthe der

Argumente zu bilden. Es möge in Bezug hierauf überdies auf eine andere Arbeit des Verfassers hingewiesen werden, die sich im 9ten Bande des Crelle'schen Journals findet.

Die Ausdrücke, die wir noch mehrfach brauchen werden, lauten bei bekannter Bezeichnungszweise:

$$al_0''(u_1)_0 = al_0 . \mu^2; \qquad al_0''(u_1, u_2)_0 = al_0 . \mu^2 . \varkappa^2;$$
$$al_0''(u_2)_0 = al_0 . \mu^2 . (\varkappa^4 + \varkappa_1^2 . \lambda_\varkappa^2);$$
$$al_4''(u_1)_0 = - al_4 . \mu_\lambda^2; \qquad al_4''(u_1, u_2)_0 = - al_4 . \varkappa^2 . \mu_\lambda^2;$$
$$al_4''(u_2)_0 = - al_4 . \mu_\lambda^2 . \varkappa^2;$$
$$al_{01}''(u_1)_0 = - al_{01} . (\mu_1^2 - \lambda_\varkappa^2); \qquad al_{01}''(u_1, u_2)_0 = - al_{01} . (\lambda^2 - \varkappa^2 . \mu^2);$$
$$al_{01}''(u_2)_0 = - al_{01} . (\lambda^2 . \varkappa^2 + \lambda^2 . \mu^2 - \varkappa^2 . \mu^2 - \varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^2);$$
$$al_{03}''(u_1)_0 = al_{03} . \varkappa^2; \qquad al_{03}''(u_1, u_2)_0 = al_{03} . \varkappa^2 . \mu^2;$$
$$al_{03}''(u_2)_0 = al_{03} . \varkappa^2 . (-\lambda^2 + \mu^2 + \lambda^2 . \mu^2);$$
$$al_{12}''(u_1)_0 = al_{12} . (-\mu_\lambda^2 + \varkappa^2); \qquad al_{12}''(u_1, u_2)_0 = al_{12} . \varkappa^2 . \mu^2;$$
$$al_{12}''(u_2)_0 = al_{12} . \varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^2;$$
$$al_{14}''(u_1)_0 = al_{14} . (-\mu_1^2 + \varkappa^2); \qquad al_{14}''(u_1, u_2)_0 = al_{14} . \varkappa^2 . \mu^2;$$
$$al_{14}''(u_2)_0 = al_{14} . \varkappa^2 . \mu^2;$$
$$al_{23}''(u_1)_0 = - al_{23} . \varkappa_1^2; \qquad al_{23}''(u_1, u_2)_0 = - al_{23} . \varkappa^2 . \mu^2;$$
$$al_{23}''(u_2)_0 = - al_{23} . \varkappa_1^2 . \lambda^2 . \mu^2;$$
$$al_{34}''(u_1)_0 = al_{34} . \lambda_\varkappa^2; \qquad al_{34}''(u_1, u_2)_0 = al_{34} . \mu^2 . \lambda_\varkappa^2;$$
$$al_{34}''(u_2)_0 = al_{34} . \lambda_\varkappa^2 . \mu^2;$$
$$al_2''(u_1)_0 = - al_2 . \mu_1^2; \qquad al_2''(u_1, u_2)_0 = - al_2 . \varkappa^2 . \mu_1^2;$$
$$al_2''(u_2)_0 = - al_2 . \varkappa^2 . \lambda^2 . \mu_1^2 .$$

Wir betrachten jetzt die Function:

$$f_{2\varkappa, r}(v_1, v_2) . f_{2\varkappa, s}(v_1, v_2) = F_{\varkappa, r, s}(v_1, v_2)$$

so leistet diese den Bedingungsgleichungen Genüge:

$$F_{\varkappa, r, s}(v_1 + 1, v_2) = F_{\varkappa, r, s}(v_1, v_2) . F_{\varkappa, r, s}(v_1, v_2 + 1) = F_{\varkappa, r, s}(v_1, v_2),$$
$$F_{\varkappa, r, s}(v_1 + \tau_{11}, v_2 + \tau_{12}) = e^{-4\pi i \varkappa (2v_1 + \tau_{11})} . F_{\varkappa, r, s}(v_1, v_2),$$
$$F_{\varkappa, r, s}(v_1 + \tau_{12}, v_2 + \tau_{22}) = e^{-4\pi i \varkappa (2v_2 + \tau_{22})} F_{\varkappa, r, s}(v_1, v_2).$$

Ueberdies ist die Function eine gerade Function von v_1 und v_2.

Hieraus folgt unmittelbar, dass, wenn (a, b, c, d) ein beliebiges Göpel'sches Quadrupel ist, dass dann die Gleichung stattfindet:

$$F_{\varkappa, r, s}(v_1, v_2) = \sum c_{\alpha\beta\gamma\delta} \vartheta_a^\alpha(v_1, v_2) . \vartheta_b^\beta(v_1, v_2) . \vartheta_c^\gamma(v_1, y_1) . \vartheta_d^\delta(v_1, v_2),$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4\varkappa, \quad \beta + \delta \equiv \gamma + \delta \equiv 0 \text{ mod. } 2, \quad \delta < 4.$$

Die Zahl der willkürlichen Constanten beträgt $8\varkappa^2 + 2$. Offenbar können in dieser Gleichung an Stelle der Thetafunctionen wiederum die hyperelliptischen Functionen eingeführt werden, so dass wir einen Ausdruck für das Product zweier $2\varkappa - 1^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von $al_0(u_1, u_2)$ erhalten.

Als Beispiel wählen wir wiederum den Fall $\varkappa = 1$ und zwar nehmen wir das Quadrupel $(5, 0, 12, 34)$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial al_0(u_1, u_2)}{\partial u_1}\right)^2 = e_0 &+ e_1 . al_0^4(u_1, u_2) + e_2 . al_{12}^4(u_1, u_2) + e_3 . al_0^2(u_1, u_2)\\
&+ e_4 . al_{34}^2(u_1, u_2) + e_5 . al_{12}^2(u_1, u_2)\\
&+ e_6 . al_0^2(u_1, u_2) . al_{34}^2(u_1, u_2)\\
&+ e_7 . al_0^2(u_1, u_2) . al_{12}^3(u_1, u_2)\\
&+ e_8 . al_{34}^2(u_1, u_2) . al_{12}^2(u_1, u_2)\\
&+ e_9 . al_0(u_1, u_2) . al_{12}(u_1, u_2) . al_{34}(u_1, u_2).\end{aligned}$$

Die Bestimmung der Constanten erfolgt am einfachsten durch Substitution halber Perioden. Man erhält auf diese Weise 16 Gleichungen. Setzt man in denselben $u_1 = u_2 = 0$, so ergeben sich die Bestimmungsgleichungen für unsere Constanten in folgender Form:

$$\begin{aligned}
-\frac{\vartheta_{12}^2 . \vartheta_{01}^2}{\vartheta_5^2} &= e_0 . \vartheta_2^2 + e_4 . \vartheta_{01}^2,\\
-\frac{\vartheta_2^2 . \vartheta_0^2}{\vartheta_{34}^2} &= e_0 . \vartheta_{01}^2 + e_4 . \vartheta_2^2,\\
0 &= e_1 . \vartheta_{03}^2 + e_6 . \vartheta_4^2,\\
-\frac{\vartheta_{14}^2 . \vartheta_{01}^2 . \vartheta_2^2 . \vartheta_{23}^2}{\vartheta_{34}^2 . \vartheta_4^2 . \vartheta_5^2} &= e_1 . \vartheta_4^2 + e_6 . \vartheta_{03}^2,\\
0 &= e_2 . \vartheta_{14}^2 + e_8 . \vartheta_{23}^2,\\
0 &= e_2 . \vartheta_{23}^2 + e_8 . \vartheta_{14}^2,\\
0 &= e_0 . \vartheta_{23}^4 + e_1 . \vartheta_{14}^4 + e_3 . \vartheta_{23}^2 . \vartheta_{14}^2,\\
0 &= e_0 . \vartheta_{14}^4 + e_1 . \vartheta_{23}^4 + e_3 . \vartheta_{23}^2 . \vartheta_{14}^2,\\
0 &= e_0 . \vartheta_{03}^4 + e_2 . \vartheta_4^4 + e_5 . \vartheta_{03}^2 . \vartheta_4^2,\\
-\frac{\vartheta_{14}^2 . \vartheta_{01}^2 . \vartheta_2^2 . \vartheta_{23}^2}{\vartheta_{34}^2 . \vartheta_5^2} &= e_0 . \vartheta_4^4 + e_2 . \vartheta_{03}^4 + e_5 . \vartheta_{03}^2 . \vartheta_4^2,\\
-\frac{\vartheta_2^2 . \vartheta_{12}^2 . \vartheta_{01}^2}{\vartheta_5^2} &= e_1 . \vartheta_2^4 + e_2 . \vartheta_{01}^4 + e_7 . \vartheta_2^2 . \vartheta_{01}^2,\\
-\frac{\vartheta_2^2 . \vartheta_0^2 . \vartheta_{01}^2}{\vartheta_{34}^2} &= e_1 . \vartheta_{01}^4 + e_2 . \vartheta_2^4 + e_7 . \vartheta_2^2 . \vartheta_{01}^2.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Werthe:

$$e_0 = e_1 = \frac{\mu^2 \cdot \vartheta_{14}^2 \cdot \vartheta_{23}^2}{\vartheta_2^4 - \vartheta_{01}^4}, \qquad e_2 = e_8 = 0,$$

$$e_3 = \quad - \frac{\mu^2 \cdot (\vartheta_{23}^4 + \vartheta_{14}^4)}{\vartheta_2^4 - \vartheta_{01}^4}, \qquad e_4 = e_7 = \frac{\vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_{12}^2 \cdot \vartheta_{01}^4 - \vartheta_5^2 \cdot \vartheta_0^2 \cdot \vartheta_2^4}{\vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_5^2 (\vartheta_2^4 - \vartheta_{01}^4)},$$

$$e_5 = e_6 = \frac{-\mu^2 . \lambda_\varkappa^2 \cdot \vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_5^2}{\vartheta_2^4 - \vartheta_{01}^4}, \quad e_9 = 2\mu_1 \cdot \frac{\vartheta_{03}^2}{\vartheta_4^2}.$$

Setzt man in dieser Formel an Stelle von

$$al_s(u_1, u_2) : \frac{al_s(u_1, u_2)}{al_s} \cdot al_s,$$

so werden die Coefficienten wiederum in rationale Functionen von $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 übergehen. Bezeichnen wir diese neuen Coefficienten durch $e_0' \ldots e_9'$ so wird:

$$N.e_0' = \lambda^2 . \mu_\varkappa^2, \quad N.e_1' = \varkappa^2 . \mu_1^2 . \mu_\lambda^2,$$
$$N.e_3' = -\mu^4 + \mu^2 . \varkappa^2 + \mu^2 . \lambda^2 - 2\varkappa^2 . \lambda^2 + \varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^2, \; N.e_4' = \varkappa_1^2 . (\varkappa^2 + \lambda^2 - \mu^2),$$
$$N.e_5' = -\varkappa_1^2 . \lambda^2 . \mu_\varkappa^2, \; N.e_6' = -\varkappa^2 . \varkappa_1^2 . \mu_\lambda^2, \; N.e_7' = -\varkappa_1^2 . \mu_1^2 . (\varkappa^2 + \lambda^2 - \mu^2),$$
$$e_9' = 2 . \varkappa_1^2, \quad e_2' = e_8' = 0, \quad N = -\varkappa^2 - \lambda^2 + \mu^2 + \varkappa^2 . \lambda^2.$$

Setzen wir ferner:

$$\frac{\partial al_0(u_1, u_2)}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial al_0(u_1, u_2)}{\partial u_2} = e_0 + e_1 . al_0^4(u_1, u_2) + e_2 . al_{12}^4(u_1, u_2) + e_3 . al_0^2(u_1, u_2)$$
$$+ e_4 . al_{34}^2(u_1, u_2) + e_5 . al_{12}^2(u_1, u_2) + e_6 . al_0^2(u_1, u_2) . al_{34}^2(u_1, u_2)$$
$$+ e_7 . al_0^2(u_1, u_2) . al_{12}^2(u_1, u_2) + e_8 . al_{34}^2(u_1, u_2) . al_{12}^2(u_1, u_2)$$
$$+ e_9 . al_0(u_1 u_2) . al_{34}(u_1, u_2) . al_{12}(u_1, u_2)$$

und lassen die Grössen e' aus den Grössen e ähnlich wie vorhin entstehen, so folgt:

$$N.e_0' = \lambda^2 . \mu_\varkappa^2, \quad N.e_1' = \varkappa^2 . \mu_1^2 . \mu_\lambda^2,$$
$$N.e_3' = -\mu^4 + \mu^2 . \varkappa^2 + \mu^2 . \lambda^2 - 2\varkappa^2 . \lambda^2 + \varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^2, \quad N.e_4' = \varkappa^2 . \varkappa_1^2 . \lambda^2,$$
$$N.e_5' = -\varkappa_1^2 . \lambda^2 . \mu_\varkappa^2, \; N.e_6' = -\varkappa^2 . \varkappa_1^2 . \mu_\lambda^2, \; N.e_7' = \varkappa^2 . \varkappa_1^2 . \lambda^2 . \mu_1^2, \; e_2' = e_8' = 0,$$
$$e_9' = \varkappa_1^2 . \mu^2.$$

Genau so folgt:

$$\left(\frac{\partial al_0(u_1, u_2)}{\partial u_2}\right)^2 = e_0 + e_1 . al_0^4(u_1, u_2) + e_2 . al_{12}^4(u_1, u_2) + e_3 . al_0^2(u_1, u_2)$$
$$+ e_4 . al_{34}^2(u_1, u_2) + e_5 . al_{12}^2(u_1, u_2) + e_6 . al_0^2(u_1, u_2) . al_{34}^2(u_1, u_2)$$
$$+ e_7 \, al_0^2(u_1, u_2) . al_{12}^2(u_1, u_2) + e_8 . al_{34}^2(u_1, u_2) . al_{12}^2(u_1, u_2)$$
$$+ e_9 . al_0(u_1, u_2) . al_{34}(u_1, u_2) . al_{12}(u_1, u_2),$$

$$N.e_0' = \lambda^2.\mu_\varkappa^2.(\varkappa^2+\lambda^2-\varkappa^2.\lambda^2), \quad N.e_1' = \varkappa^2.\mu_1^2.\mu_\lambda^2.(\varkappa^2+\lambda^2-\varkappa^2.\lambda^2),$$
$$N.e_3' = -(\varkappa^2+\lambda^2-\varkappa^2.\lambda^2)(\mu^4-\mu^2.\varkappa^2-\mu^2.\lambda^2+2.\varkappa^2.\lambda^2-\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2),$$
$$N.e_4' = \varkappa^2.\varkappa_1^2.\lambda^2.\mu^2, \quad N.e_5' = -\varkappa_1^2.\lambda^2.\mu^2.\mu_\varkappa^2, \quad N.e_6' = -\varkappa^2.\varkappa_1^2.\mu^2.\mu_\lambda^2,$$
$$N.e_7' = \varkappa^2.\varkappa_1^2.\lambda^2.\mu^2.\mu_1^2, \quad e_2' = e_8' = e_9' = 0.$$

In ähnlicher Weise wie vorhin würde sich ergeben, dass auch im allgemeinsten Falle die Coefficienten rationale Functionen von $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 werden, wenn an Stelle von $al_s(u_1 u_2)$:

$$\frac{al_s(u_1,u_2)}{al_s}\cdot al_s \quad \text{resp.} \quad \frac{al_s(u_1,u_2)}{al_s'(u_i)_0}\cdot al_s'(u_i)_0$$

gesetzt wird.

Für die Folge ist es ferner nöthig, Producte von der Form zu betrachten:

$$\frac{\partial^{2\varkappa-1} al_{12}(u_1,u_2)}{\partial u_1^{2\varkappa-r-1}\partial u_2^{r}}\cdot\frac{\partial^{2\varkappa-1} al_{34}(u_1,u_2)}{\partial u_1^{2\varkappa-s-1}\partial u_2^{s}}.$$

Auf genau dieselbe Weise wie früher finden wir:

$$\frac{\partial^{2\varkappa-1} al_{12}(u_1,u_2)}{\partial u_1^{2\varkappa-r-1}\partial u_2^{r}}\cdot\frac{\partial^{2\varkappa-1} al_{34}(u_1,u_2)}{\partial u_1^{2\varkappa-s-1}\partial u_2^{s}}$$
$$=\sum e_{\alpha\beta\gamma\delta}.al_0^{\alpha}(u_1,u_2).al_5^{\beta}(u_1,u_2).al_c^{\gamma}(u_1,u_2).al_d^{\delta}(u_1,u_2),$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=4\varkappa,\quad \gamma+\delta\equiv 0 \bmod. 2,\quad \beta+\delta\equiv 1 \bmod. 2,\quad \delta<4$$

$(0, 5, c, d)$ bildet ein Göpel'sches Quadrupel. Die Zahl der willkürlichen Constanten beträgt $8\varkappa^2$.

Als speciellen Fall wählen wir wiederum $\varkappa = 1$.

$$\frac{\partial al_{12}(u_1,u_2)}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial al_{34}(u_1,u_2)}{\partial u_1}$$
$$= e_0\cdot al_0^3(u_1,u_2)+e_1.al_0^2(u_1,u_2).al_{34}(u_1,u_2).al_{12}(u_1,u_2)+e_2.al_0(u_1,u_2)$$
$$+e_3.al_0(u_1,u_2).al_{34}^2(u_1,u_2)+e_4.al_0(u_1,u_2).al_{12}^2(u_1,u_2)$$
$$+e_5.al_{34}(u_1,u_2).al_{12}(u_1,u_2)+e_6.al_{34}^3(u_1,u_2).al_{12}(u_1,u_2)$$
$$+e_7.al_{12}^3(u_1,u_2).al_{34}(u_1,u_2).$$

Die Constantenbestimmung erfolgt wiederum durch Substitution halber Perioden.

Die vier Constanten e_0, e_2, e_6, e_7 können dann unmittelbar aus den Gleichungen bestimmt werden:

$$\frac{\vartheta_{03}^2\cdot\vartheta_{12}^2\cdot\vartheta_0^2\cdot\vartheta_{14}^2}{\vartheta_{34}^2\cdot\vartheta_4^2\cdot\vartheta_5^2} = -e_6.\vartheta_{23}^2 - e_7.\vartheta_{14}^2,$$

$$\frac{\vartheta_{03}^2\cdot\vartheta_{23}^2\cdot\vartheta_5^2\cdot\vartheta_{34}^2}{\vartheta_{34}^2\cdot\vartheta_4^2\cdot\vartheta_5^2} = -e_6.\vartheta_{14}^2 - e_7.\vartheta_{23}^2,$$

$$\frac{\vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{23}^2 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{12}}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_4^2 \cdot \vartheta_5} = - e_0 . \vartheta_{14}^2 - e_2 . \vartheta_{23}^2,$$

$$\frac{\vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{14}^2 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{12}}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_4^2 \cdot \vartheta_5} = - e_0 . \vartheta_{23}^2 - e_2 . \vartheta_{14}^2 .$$

Hieraus folgt jedenfalls $e_0 = 0$. Die andern vier Constanten sind aus den Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned}
&e_1 . \vartheta_0^2 . \vartheta_{34} . \vartheta_{12} + e_3 . \vartheta_0 . \vartheta_5 . \vartheta_{34}^2 + e_4 . \vartheta_0 . \vartheta_5 . \vartheta_{12}^2 + e_5 . \vartheta_5^2 . \vartheta_{34} . \vartheta_{12} \\
&\qquad = - (e_2 . \vartheta_0 . \vartheta_5^3 + e_6 . \vartheta_{34}^3 . \vartheta_{12} + e_7 . \vartheta_{12}^3 . \vartheta_{34}), \\
&e_1 . \vartheta_5^2 . \vartheta_{34} . \vartheta_{12} + e_3 . \vartheta_0 . \vartheta_5 . \vartheta_{12}^2 + e_4 . \vartheta_0 . \vartheta_5 . \vartheta_{34}^2 + e_5 . \vartheta_0^2 . \vartheta_{34} . \vartheta_{12} \\
&\qquad = - (e_2 . \vartheta_5 . \vartheta_0^3 + e_6 . \vartheta_{12}^3 . \vartheta_{31} + e_7 . \vartheta_{12} . \vartheta_{34}^3), \\
&e_1 . \vartheta_{34}^2 . \vartheta_0 . \vartheta_5 + e_3 . \vartheta_{34} . \vartheta_{12} . \vartheta_0^2 + e_4 . \vartheta_{31} . \vartheta_{12} . \vartheta_5^2 + e_5 . \vartheta_{12}^2 . \vartheta_0 . \vartheta_5 \\
&\qquad = - (e_2 . \vartheta_{34} . \vartheta_{12}^3 + e_6 . \vartheta_0^3 . \vartheta_5 + e_7 . \vartheta_5^3 . \vartheta_0), \\
&e_1 . \vartheta_{12}^2 . \vartheta_0 . \vartheta_5 + e_3 . \vartheta_{34} . \vartheta_{12} . \vartheta_5^2 + e_4 . \vartheta_{31} . \vartheta_{12} . \vartheta_0^2 + e_5 . \vartheta_{34}^2 . \vartheta_0 . \vartheta_5 \\
&\qquad = - (e_2 . \vartheta_{12} . \vartheta_{34}^3 + e_6 . \vartheta_0 . \vartheta_5^3 + e_7 . \vartheta_0^3 . \vartheta_5).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
e_1 . \vartheta_2^2 . \vartheta_{01}^2 . \vartheta_4^2 . \vartheta_{03}^2 &= -2 e_2 . \vartheta_0 . \vartheta_5 . \vartheta_{34} . \vartheta_{12} . \vartheta_{14}^2 . \vartheta_{23}^2 + e_6 . \vartheta_{14}^2 . \vartheta_{23}^2 . (\vartheta_0^2 . \vartheta_{34}^2 + \vartheta_{12}^2 . \vartheta_5^2) \\
&\quad + e_7 . \vartheta_{14}^2 . \vartheta_{23}^2 . (\vartheta_0^2 . \vartheta_{12}^2 + \vartheta_5^2 . \vartheta_{34}^2), \\
e_3 . \vartheta_2^2 . \vartheta_{01}^2 . \vartheta_4^2 . \vartheta_{03}^2 &= e_2 . \vartheta_{14}^2 . \vartheta_{23}^2 . (\vartheta_0^2 . \vartheta_{12}^2 + \vartheta_5^2 . \vartheta_{34}^2) - e_6 . \vartheta . \vartheta_0 . \vartheta_{31} . \vartheta_{12} . (\vartheta_{23}^4 + \vartheta_{14}^4) \\
&\quad - 2 e_7 . \vartheta_{14}^2 . \vartheta_{23}^2 . \vartheta_0 . \vartheta_5 . \vartheta_{34} . \vartheta_{12}, \\
e_4 . \vartheta_2^2 . \vartheta_{01}^2 . \vartheta_4^2 . \vartheta_{03}^2 &= e_2 . \vartheta_{14}^2 . \vartheta_{23}^2 . (\vartheta_0^2 . \vartheta_{34}^2 + \vartheta_5^2 . \vartheta_{12}^2) - 2 e_6 . \vartheta_{14}^2 . \vartheta_{23}^2 . \vartheta_0 . \vartheta_5 . \vartheta_{34} . \vartheta_{12} \\
&\quad - e_7 . \vartheta_0 . \vartheta_5 . \vartheta_{34} . \vartheta_{12} . (\vartheta_{14}^4 + \vartheta_{23}^4), \\
e_5 . \vartheta_2^2 . \vartheta_{01}^2 . \vartheta_4^2 . \vartheta_{03}^2 &= - e_1 . \vartheta_0 . \vartheta_5 . \vartheta_{34} . \vartheta_{12} . (\vartheta_{14}^4 + \vartheta_{23}^4) + e_6 . \vartheta_{14}^2 . \vartheta_{23}^2 . (\vartheta_0^2 . \vartheta_{12}^2 + \vartheta_5^2 . \vartheta_{34}^3) \\
&\quad + e_7 . \vartheta_{14}^2 . \vartheta_{23}^2 . (\vartheta_0^2 . \vartheta_{34}^2 + \vartheta_5^2 . \vartheta_{12}^3).
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen sind sämmtliche Constanten bestimmt. Wir wollen uns nun wiederum in der ursprünglichen Gleichung an Stelle von $al_\varepsilon(u_1, u_2)$:

$$\frac{al_\varepsilon(u_1, u_2)}{al_\varepsilon} \cdot al_\varepsilon$$

gesetzt denken und $\dfrac{al_\varepsilon(u_1, u_2)}{al_\varepsilon}$ als ursprüngliche Function zu Grunde legen. Die neuen Constanten unterscheiden wir von den alten durch gestrichene Buchstaben.

Dann wird:

$$e_0'=0,\quad N.e_1'=\varkappa^2.\mu_1^2.\mu_\lambda^2,\quad e_2'=-\lambda_1^2,\quad e_3'=0,\quad e_4'=\mu_1^2,$$
$$N.e_5'=-\varkappa_1^2.\lambda_1^2.(\varkappa^2+\lambda^2-\mu^2),\quad N.e_6'=-\varkappa^2.\varkappa_1^2.\mu_\lambda^2,$$
$$N.e_7'=\varkappa_1^2.\mu_1^2.(\varkappa^2+\lambda^2-\mu^2).$$

In ähnlicher Weise können wir setzen:

$$\frac{\partial al_{12}(u_1,u_2)}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial al_{34}(u_1,u_2)}{\partial u_2}+\frac{\partial al_{12}(u_1,u_2)}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial al_{34}(u_1,u_2)}{\partial u_1}$$
$$=e_0.al_0^3(u_1,u_2)+e_1.al_0^2(u_1,u_2).al_{34}(u_1,u_2).al_{12}(u_1,u_2)+e_2.al_0(u_1,u_2)$$
$$+e_3.al_0(u_1,u_2).al_{34}^2(u_1,u_2)+e_4.al_0(u_1,u_2).al_{12}^2(u_1,u_2)$$
$$+e_5.al_{34}(u_1,u_2).al_{12}(u_1,u_2)+e_6.al_{34}^3(u_1,u_2).al_{12}(u_1,u_2)$$
$$+e_7.al_{12}^3(u_1,u_2).al_{34}(u_1,u_2).$$

$$e_0'=0,\quad Ne_1'=2\varkappa^2.\mu_1^2.\mu_\lambda^2,$$
$$e_2'=-\lambda_1^2.\mu^2,\quad e_3'=\varkappa^2.\mu_\lambda^2,\quad e_4'=\mu_1^2.(\varkappa^2+\lambda^2),$$
$$Ne_5'=(\varkappa^4+\lambda^4+\mu^4-2\lambda^2.\mu^2-2\mu^2.\varkappa^2+2\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2-\varkappa^4.\lambda^4),$$
$$N.e_6'=-2\varkappa^2.\varkappa_1^2.\mu_\lambda^2,\quad N.e_7'=2\varkappa^2.\varkappa_1^2.\lambda^2.\mu_1^2.$$

Ebenso wird:

$$\frac{\partial al_{12}(u_1,u_2)}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial al_{34}(u_1,u_2)}{\partial u_2}$$
$$=e_0.al_0^3(u_1,u_2)+e_1.al_0^2(u_1,u_2).al_{34}(u_1,u_2).al_{12}(u_1,u_2)+e_2.al_0(u_1,u_2)$$
$$+e_3.al_0(u_1,u_2).al_{34}^2(u_1,u_2)+e_4.al_0(u_1,u_2).al_{12}^2(u_1,u_2)$$
$$+e_5.al_{34}(u_1,u_2).al_{12}(u_1,u_2)+e_6.al_{34}^3(u_1,u_2).al_{12}(u_1,u_2)$$
$$+e_7.al_{12}^3(u_1,u_2).al_{34}(u_1,u_2),$$

$$e_0'=0,\quad N.e_1'=\varkappa^2.\mu_1^2.\mu_\lambda^2.(\varkappa^2+\lambda^2-\varkappa^2.\lambda^2),\quad e_2'=0,\quad e_3'=\varkappa^2.\mu_\lambda^2,$$
$$e_4'=\varkappa^2.\lambda^2.\mu_1^2,\quad N.e_5'=\varkappa^2.\lambda^2.(\varkappa^2+\lambda^2-2\mu^2-\varkappa^2.\lambda^2+\mu^4),$$
$$N.e_6'=-\varkappa^2.\varkappa_1^2.\mu^2.\mu_\lambda^2,\quad N.e_7'=\varkappa^2.\varkappa_1^2.\lambda^2.\mu^2.\mu_1^2.$$

In ähnlicher Weise sind die geraden Differentialquotienten zu behandeln. Setzen wir:

$$\vartheta_5^{2\varkappa+1}(v_1,v_2)\cdot\frac{\partial^{2\varkappa}\dfrac{\vartheta_0(v_1,v_2)}{\vartheta_5(v_1,v_2)}}{\partial v_1^{2\varkappa-r}\,\partial v_2^r}=f_{2\varkappa+1,r}(v_1,v_2),$$

so leistet diese Function folgenden Bedingungsgleichungen Genüge:

$$f_{2\varkappa+1,r}(v_1+1,v_2)=f_{2\varkappa+1,r}(v_1,v_2);\quad f_{2\varkappa+1,r}(v_1,v_2+1)=f_{2\varkappa+1,r}(v_1,v_2),$$
$$f_{2\varkappa+1,r}(v_1+\tau_{11},v_2+\tau_{12})=-e^{-(2\varkappa+1)\pi i(2v_1+\tau_{11})}.f_{2\varkappa+1,r}(v_1,v_2),$$
$$f_{2\varkappa+1,r}(v_1+\tau_{12},v_2+\tau_{22})=-e^{-(2\varkappa+1)\pi i(2v_2+\tau_{22})}.f_{2\varkappa+1,r}(v_1,v_2).$$

Ueberdies ist die Function eine gerade Function von v_1 und v_2. Die Zahl der willkürlichen Constanten ist gleich $\frac{(2\varkappa+1)^2+1}{2}$.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar die Richtigkeit der Gleichung:

$$\vartheta_5^{2\varkappa+1}(v_1,v_2)\cdot\frac{\partial^{2\varkappa}\dfrac{\vartheta_0(v_1,v_2)}{\vartheta_5(v_1,v_2)}}{\partial v_1^{2\varkappa-r}\,\partial v_2^r}=\sum e_{\alpha\beta\gamma\delta}.\vartheta_0^{\alpha}(v_1,v_2).\vartheta_b^{\beta}(v_1,v_2).\vartheta_c^{\gamma}(v_1,v^2).\vartheta_d^{\delta}(v_1,v_2).$$

Dabei ist $(0, b, c, d)$ ein Göpel'sches Quadrupel, es finden ferner die Beziehungen statt:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\varkappa+1,\quad \gamma+\delta\equiv\beta+\delta\equiv 0 \text{ mod. } 2,\quad \delta<4.$$

Hieraus folgt unmittelbar der entsprechende Satz für die hyperelliptischen Functionen. Als speciellen Fall wählen wir wiederum $\varkappa=1$ und das Quadrupel $(0, 5, 34, 12)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 al_0(u_1,u_2)}{\partial u_1^2}=e_0.al_0^3(u_1,u_2)&+e_1.al_0(u_1,u_2)+e_2.al_0(u_1,u_2).al_{34}^2(u_1,u_2)\\&+e_3.al_0(u_1,u_2).al_{12}^2(u_1,u_2)\\&+e_4.al_{34}(u_1,u_2).al_{12}(u_1,u_2).\end{aligned}$$

Durch Substitution halber Perioden ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
-\frac{\vartheta_{14}^2\cdot\vartheta_2^2\cdot\vartheta_{01}^2}{\vartheta_{34}^2\cdot\vartheta_5^2}&=e_0.\vartheta_{23}^2+e_1.\vartheta_{14}^2,\\
\frac{\vartheta_{23}^2\cdot\vartheta_2^2\cdot\vartheta_{01}^2}{\vartheta_{34}^2\cdot\vartheta_5^2}&=e_0.\vartheta_{14}^2+e_1.\vartheta_{23}^2,\\
-2\,\frac{\vartheta_{14}^2\cdot\vartheta_{01}^2\cdot\vartheta_2^2\cdot\vartheta_{23}^2}{\vartheta_{34}^2\cdot\vartheta_4^2\cdot\vartheta_5^2}&=e_0.\vartheta_4^2+e_2.\vartheta_{03}^2,\\
0&=e_0.\vartheta_{03}^2+e_2.\vartheta_4^2,\\
-2\quad\frac{\vartheta_2^2\cdot\vartheta_0^2}{\vartheta_{34}^2}&=e_0.\vartheta_{01}^2+e_3.\vartheta_2^2,\\
-2\quad\frac{\vartheta_{12}^2\cdot\vartheta_{01}^2}{\vartheta_5^2}&=e_0.\vartheta_2^2+e_3.\vartheta_{01}^2.
\end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich die Werthe:

$$N.e_0'=2\varkappa^2.\mu_1^2.\mu_\lambda^2,\quad N.e_1'=(-\mu^4+\lambda^2.\mu^2+\mu^2.\varkappa^2-2\varkappa^2.\lambda^2+\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2),$$
$$N.e_2'=2\varkappa^2.\varkappa_1^2.\mu_\lambda^2,\quad N.e_3'=2\varkappa_1^2.\mu_1^2.(\varkappa^2+\mu_\lambda^2),\quad e_4'=2\varkappa_1^2.$$

In ähnlicher Weise ergeben sich die beiden andern zweiten Differentialquotienten.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 al_0(u_1,u_2)}{\partial u_1\partial u_2}=e_0.al_0^3(u_1,u_2)&+e_1.al_0(u_1,u_2)+e_2.al_0(u_1,u_2).al_{34}^2(u_1,u_2)\\&+e_3.al_0(u_1,u_2).al_{12}^2(u_1,u_2)\\&+e_4.al_{34}(u_1,u_2).al_{12}(u_1,u_2),\end{aligned}$$

$$N.e_0' = 2\varkappa^2.\mu_1^2.\mu_\lambda^2, \quad N.e_1' = (-\mu^4 + \lambda^2.\mu^2 + \mu^2.\varkappa^2 - 2\lambda^2.\varkappa^2 + \varkappa^2.\lambda^2.\mu^2),$$
$$N.e_2' = -2\varkappa^2.\varkappa_1^2.\mu_\lambda^2, \quad N.e_3' = 2\varkappa^2.\varkappa_1^2.\lambda^2.\mu_1^2, \quad e_4' = \varkappa_1^2.\mu^2,$$

$$\frac{\partial^2 al_0(u_1,u_2)}{\partial u_2^2} = e_0.al_0^2(u_1,u_2) + e_1.al_0(u_1,u_2) + e_2.al_0(u_1,u_2).al_{34}^2(u_1,u_2)$$
$$+ e_3.al_0(u_1,u_2).al_{12}^2(u_1,u_2)$$
$$+ e_4.al_{34}(u_1,u_2).al_{12}(u_1,u_2),$$

$$N.e_0' = 2\varkappa^2.\mu_1^2.\mu_\lambda^2.(\varkappa^2 + \lambda^2 - \varkappa^2.\lambda^2),$$
$$N.e_1' = -(\varkappa^2 + \lambda^2 - \varkappa^2.\lambda^2)(\mu^4 - \lambda^2.\mu^2 - \mu^2.\varkappa^2 + 2\varkappa^2.\lambda^2 - \varkappa^2.\lambda^2.\mu^2),$$
$$N.e_2' = -2\varkappa^2.\varkappa_1^2.\mu^2.\mu_\lambda^2, \quad N.e_3' = 2\varkappa^2.\varkappa_1^2.\lambda^2.\mu^2.\mu_1^2, \quad e_4' = 0.$$

Genau so wie früher ergiebt sich endlich der Lehrsatz.

Es ist:

$$\vartheta_5^{2\varkappa+2}(v_1,v_2).\frac{\partial\left(\frac{\vartheta_0(v_1,v_2)}{\vartheta_5(v_1,v_2)}\right)^2}{\partial v_1^{2\varkappa-r}\partial v_2^r}$$
$$= \sum{}' e_{\alpha\beta\gamma\delta}.\vartheta_a^\alpha(v_1,v_2).\vartheta_b^\beta(v_1,v_2).\vartheta_c^\gamma(v_1,v_2).\vartheta_d^\delta(v_1,v_2),$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 2\varkappa+2, \quad \beta+\delta \equiv \gamma+\delta \equiv 0 \text{ mod. } 2, \quad \delta < 4.$$

Dabei ist (a, b, c, d) ein beliebiges Göpel'sches Quadrupel. Die Zahl der willkürlichen Constanten beträgt $2(\varkappa+1)^2 + 2$.

Als Beispiel nehmen wir wiederum den Fall $\varkappa = 1$ und das Quadrupel (5, 0, 12, 34).

$$\frac{\partial^2 al_0(u_1,u_2)^2}{\partial u_1^2} = e_0 + e_1.al_0^4(u_1,u_2) + e_2.al_{12}^4(u_1,u_2) + e_3.al_0^2(u_1,u_2)$$
$$+ e_4.al_{34}^2(u_1,u_2) + e_5.al_{12}^2(u_1,u_2)$$
$$+ e_6.al_0^2(u_1,u_2).al_{34}^2(u_1,u_2) + e_7.al_0^2(u_1,u_2).al_{12}^2(u_1,u_2)$$
$$+ e_8.al_{34}^2(u_1,u_2).al_{12}^2(u_1,u_2)$$
$$+ e_9.al_0(u_1,u_2).al_{34}(u_1,u_2).al_{12}(u_1,u_2).$$

Die Constanten können mit Hülfe der früheren Formeln leicht bestimmt werden, indessen ziehen wir es auch hier vor, von der Substitution halber Perioden Gebrauch zu machen.

Es ergeben sich die Gleichungen:

$$-2\frac{\vartheta_{12}^2.\vartheta_{01}^2}{\vartheta_5^2} = e_0.\vartheta_2^2 + e_4.\vartheta_{01}^2,$$

$$-2\frac{\vartheta_2^2.\vartheta_0^2}{\vartheta_{34}^2} = e_0.\vartheta_{01}^2 + e_4.\vartheta_2^2,$$

$$0 = e_1.\vartheta_{03}^2 + e_6.\vartheta_4^2,$$

$$
\begin{aligned}
-6\,\frac{\vartheta_{14}^2\cdot\vartheta_{01}^2\cdot\vartheta_2^2\cdot\vartheta_{23}^2}{\vartheta_{34}^2\cdot\vartheta_4^2\cdot\vartheta_5^2} &= e_1\,.\,\vartheta_4^2+e_6\,.\,\vartheta_{03}^2,\\
0 &= e_2\,.\,\vartheta_{14}^2+e_8\,.\,\vartheta_{23}^2,\\
0 &= e_2\,.\,\vartheta_{23}^2+e_8\,.\,\vartheta_{14}^2,\\
2\vartheta_{23}^2\,.\,\vartheta_{14}^2\,.\,\mu^2 &= e_0\,.\,\vartheta_{23}^4+e_1\,.\,\vartheta_{14}^4+e_3\,.\,\vartheta_{23}^2\,.\,\vartheta_{14}^2,\\
-2\vartheta_{23}^2\,.\,\vartheta_{14}^2\,.\,\mu^2 &= e_0\,.\,\vartheta_{14}^4+e_1\,.\,\vartheta_{23}^4+e_3\,.\,\vartheta_{23}^2\,.\,\vartheta_{14}^2,\\
0 &= e_0\,.\,\vartheta_{03}^4+e_2\,.\,\vartheta_4^4+e_5\,.\,\vartheta_{03}^2\,.\,\vartheta_4^2,\\
-2\,\frac{\vartheta_{14}^2\cdot\vartheta_{01}^2\cdot\vartheta_2^2\cdot\vartheta_{23}^2}{\vartheta_{34}^2\cdot\vartheta_5^2} &= e_0\,.\,\vartheta_4^4+e_2\,.\,\vartheta_{03}^4+e_5\,.\,\vartheta_{03}^2\,.\,\vartheta_4^2,\\
-6\quad\frac{\vartheta_2^2\cdot\vartheta_{12}^2\cdot\vartheta_{01}^2}{\vartheta_5^2} &= e_1\,.\,\vartheta_2^4+e_2\,.\,\vartheta_{01}^4+e_7\,.\,\vartheta_2^2\,.\,\vartheta_{01}^2,\\
-6\quad\frac{\vartheta_2^2\cdot\vartheta_0^2\cdot\vartheta_{01}^2}{\vartheta_{34}^2} &= e_1\,.\,\vartheta_{01}^4+e_2\,.\,\vartheta_2^4+e_7\,.\,\vartheta_2^2\,.\,\vartheta_{01}^2.
\end{aligned}
$$

In ähnlicher Weise sind die beiden anderen zweiten Differentialquotienten zu berechnen. Die Bestimmungsgleichungen zeigen viele Aehnlichkeit mit den Gleichungen, welche bei den Ausdrücken

$$
\left(\frac{\partial al_0(u_1, u_2)}{\partial u_1}\right)^2,\quad \left(\frac{\partial al_0(u_1, u_2)}{\partial u_1}\right)\cdot\left(\frac{\partial al_0(u_1, u_2)}{\partial u_2}\right),\quad \left(\frac{\partial al_0(u_1, u_2)}{\partial u_2}\right)^2
$$

auftreten. Thatsächlich unterscheiden sich denn auch die Constanten die bei den zweiten Differentialquotienten von $al_0^2(u_1, u_2)$ auftreten, von den entsprechenden die bei den Quadraten resp. Producten von den ersten Differentialquotienten von $al_0(u_1, u_2)$ auftreten, nur um ganze Zahlen und zwar sind die Constanten mit den Indices 0, 4, 5 das doppelte, mit den Indices 3, 9 das vierfache, mit den Indices 1, 6, 7 das 6-fache der entsprechenden Constanten in der früheren Entwickelung.

In ähnlicher Weise könnten wir weiter gehen und noch eine Fülle weiterer Sätze aufstellen — indessen dürften die vorhandenen genügen, um die Methode auseinander zu setzen. Aus den speciellen Sätzen können die allgemeinen mit leichter Mühe entwickelt werden. Bei der wirklichen Berechnung der hierbei auftretenden Constanten zeigt sich die lineare Transformation als wirksames Hülfsmittel. Es ist dieses ausführlich in der schon citirten Arbeit des Verfassers behandelt worden.

Wir machen nur von folgenden Sätzen Gebrauch.

Wendet man die lineare Transformation

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

an, so gehen die Thetafunctionen mit den Indices

5, 01, 4, 34, 12, 23, 2, 02, 3, 03, 0, 04, 1, 13, 24, 14

über in die Thetafunctionen

5, 01, 23, 34, 0, 4, 2, 1, 24, 14, 12, 13, 02, 04, 3, 03,

d. h. also

$$\varkappa^2 \text{ in } \frac{\mu^2}{\lambda^2},\quad \varkappa_1^2 \text{ in } \frac{\mu_\lambda^2}{\lambda^2},\quad \lambda^2 \text{ in } \frac{\mu^2}{\varkappa^2},\quad \lambda_1^2 \text{ in } \frac{\mu_\varkappa^2}{\varkappa^2},\quad \mu^2 \text{ in } \mu^2,$$

$$\mu_1^2 \text{ in } \mu_1^2,\quad \lambda_\varkappa^2 \text{ in } \frac{\lambda_\varkappa^2\cdot\mu^2}{\varkappa^2\cdot\lambda^2},\quad \mu_\varkappa^2 \text{ in } \lambda_1^2\cdot\frac{\mu^2}{\lambda^2},\quad \mu_\lambda^2 \text{ in } \varkappa_1^2\cdot\frac{\mu^2}{\varkappa^2}.$$

Ferner gehen die Veränderlichen u_1 und u_2 resp. über in

$$M_0.u_1 + M_1.u_2,\quad M_2.u_1 + M_3.u_2.$$

Dabei ist:

$$M_0 = 0,\quad M_1 = \varkappa.\lambda,\quad M_2 = \frac{\varkappa.\lambda}{\mu^2},\quad M_3 = 0.$$

Ferner führt die lineare Transformation:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

die Thetafunctionen mit den Indices:

5, 01, 4, 34, 12, 23, 2, 02, 3, 03, 0, 04, 1, 13, 24, 14

über in die Thetafunctionen mit den Indices:

5, $-$14, 03, 0, 12, $-i$2, 23, 24, 3, 4, 34, 04, 13, i . 1,
$-\,i$. 02, $-\,i$. 01,

d. h. also:

$$\varkappa^2 \text{ in } -\frac{\mu_\lambda^2}{\lambda_1^2},\quad \varkappa_1^2 \text{ in } \frac{\mu_1^2}{\lambda_1^2},\quad \lambda^2 \text{ in } -\frac{\lambda^2}{\lambda_1^2},\quad \lambda_1^2 \text{ in } \frac{1}{\lambda_1^2},\quad \mu^2 \text{ in } \frac{\lambda_\varkappa^2}{\lambda_1^2},$$

$$\mu_1^2 \text{ in } \frac{\varkappa_1^2}{\lambda_1^2},\quad \lambda_\varkappa^2 \text{ in } \frac{\mu^2}{\lambda_1^2},\quad \mu_\varkappa^2 \text{ in } -\frac{\mu_\varkappa^2}{\lambda_1^2},\quad \mu_\lambda^2 \text{ in } -\frac{\varkappa^2}{\lambda_1^2}.$$

Ferner geht u_1 und u_2 resp. über in

$$M_0.u_1 + M_1.u_2,\quad M_2.u_1 + M_3.u_2,$$

wobei

$$M_0 = \lambda_1,\quad M_1 = \lambda_1.\lambda^2,\quad M_2 = 0,\quad M_3 = \lambda_1^3$$

ist.

Diese Bemerkungen lehren aus den Differentialquotienten, die wir für $al_0(u_1, u_2)$ gefunden haben und den mit ihnen zusammenhängenden unmittelbar die Differentialquotienten für $al_{12}(u_1, u_2)$ und $al_{34}\ (u_1, u_2)$ nebst den mit diesen zusammenhängenden kennen.

Die Bestimmung der Coefficienten in diesen Formeln kann im allgemeinen Fall auf mehrfache Weise sich gestalten. Erstens dadurch, dass man die Werthe der Differentialquotienten für die Nullwerthe der Argumente als bekannt voraussetzt und zweitens mit Hülfe von Recursionsformeln. Die nöthigen Entwickelungen, welche zur Darstellung dieser Formeln dienen können, sind im früheren sämmtlich gegeben — indesen würde es zu weit führen, hier diese Formeln wirklich aufzustellen. Wir begnügen uns damit, kurz anzudeuten, wie dieselben aus dem früheren unmittelbar abgeleitet werden können.

Wir fanden die Formel:

$$\frac{\partial^{2\varkappa} a l_0(u_1, u_2)}{\partial u_1^{2\varkappa-r}\partial u_2^r} = \sum e_{\alpha\beta\gamma\delta} . a l_0^\alpha(u_1, u_2) . a l_{34}^\gamma(u_1, u_2) . a l_{12}^\delta(u_1, u_2).$$

Der Symmetrie wegen lassen wir hierbei die Bedingung fallen, dass $\delta < 4$ ist. Durch zweimaliges Differenciren nach u_1 ergiebt sich hieraus die Formel:

$$\frac{\partial^{2\varkappa+2} a l_0(u_1, u_2)}{\partial u^{2\varkappa+2-r}\partial u_2^r} = \sum e_{\alpha\beta\gamma\delta} . F,$$

wobei

$$\begin{aligned} F = & \sum \alpha . \alpha - 1 . a l_0^{\alpha-2}(u_1, u_2) . a l_{34}^\gamma(u_1, u_2) . a l_{12}^\delta(u_1, u_2) . (a l_0'(u_1))^2 \\ & + \sum 2\delta . \gamma . a l_0^\alpha(u_1, u_2) . a l_{34}^{\gamma-1}(u_1, u_2) . a l_{12}^{\delta-1}(u_1, u_2) . a l_{34}'(u_1) . a l_{12}'(u_1) \\ & + \sum \alpha . a l_0^{\alpha-1}(u_1, u_2) . a l_{34}(u_1, u_2) . a l_{12}(u_1, u_2) . a l_0''(u_1). \end{aligned}$$

Es braucht nicht näher auseinandergesetzt zu werden, in welcher Weise hier die Summen zu nehmen sind. Die Ausdrücke $al_0''(u_1)$, $(al_0'(u_1))^2$, $al_{34}'(u_1) . al_{12}'(u_1)$ und die mit ihnen zusammenhängenden haben wir aber wirklich bilden gelernt. Setzen wir die gefundenen Ausdrücke ein, so ergeben sich Recursionsformeln, vermöge deren die Coefficienten in dem definirten $2\varkappa + 2^{\text{ten}}$ Differentialquotienten bestimmt sind, wenn es die Coefficienten in dem ursprünglichen $2\varkappa^{\text{ten}}$ sind. In ähnlicher Weise kann mit allen $2\varkappa + 2^{\text{ten}}$ Differentialquotienten verfahren werden.

Diese Formeln würden das Fundament für die Lösung des Problems bilden, die hyperelliptischen Functionen in Potenzreihen der veränderlichen zu entwickeln.

§ 2.

Darstellung der Potenzen und gewisser Producte der hyperelliptischen Functionen.

Wir gehen jetzt zu dem umgekehrten Problem über, die Potenzen und Producte der hyperelliptischen Functionen durch die Differentialquotienten der Functionen selbst und gewisser einfachen Verbindungen derselben auszudrücken.

Wir wählen zunächst den Ausdruck:

$$\vartheta_0^\alpha(v_1,v_2).\vartheta_5^\beta(v_1,v_2).\vartheta_{34}^\gamma(v_1,v_2).\vartheta_{12}^\delta(v_1,v_2)$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\varkappa+1,\quad \gamma+\delta\equiv\beta+\delta\equiv 0 \text{ mod. } 2$$

ist, δ ferner kleiner als 4.

Dieser Ausdruck enthält dann $\frac{(2\varkappa+1)^2+1}{2}$ willkürliche Constanten. Denselben Bedingungsgleichungen genügen aber die Ausdrücke:

$$\vartheta_5^{2\varkappa+1}(v_1,v_2)\cdot\frac{\partial^{2\varkappa-2r}al_0(u_1,u_2)}{\partial v_1^{2\varkappa-2r-s}\partial v_2^s}\cdot r=0,1,\ldots,\varkappa;\quad s=0,1,\ldots,2\varkappa-2r$$

und:

$$\vartheta_5^{2\varkappa+1}(v_1,v_2)\cdot\frac{\partial^{2\varkappa-2r}al_{34}(u_1,u_2).al_{12}(u_1,u_2)}{\partial v_1^{2\varkappa-2r-s}\partial v_2^s}\cdot r=1,2,\ldots,\varkappa;$$

$$s=0,1,\ldots,2\varkappa-2r.$$

Hieraus folgt:

$$al_0^\alpha(u_1,u_2).al_{34}^\gamma(u_1,u_2).al_{12}^\delta(u_1,u_2)$$

$$=\sum_0^\varkappa{}_r\sum_0^{2\varkappa-2r}{}_s\, e_{rs}\cdot\frac{\partial^{2\varkappa-2r}al_0(u_1,u_2)}{\partial u_1^{2\varkappa-2r-s}\partial u_2^s}+\sum_1^\varkappa{}_r\sum_0^{2\varkappa-2r}{}_s\, e'_{rs}\cdot\frac{\partial^{2\varkappa-2r}al_{34}(u_1,u_2).al_{12}(u_1,u_2)}{\partial u_1^{2\varkappa-2r-s}\partial u_2^s},$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\varkappa+1;\quad \gamma+\delta\equiv\beta+\delta\equiv 0\text{ mod. } 2;\quad \delta<4.$$

Diese Formel dient dazu, Reihenentwicklungen für die Ausdrücke

$$al_0^\alpha(u_1,u_2)\cdot al_{34}^\gamma(u_1,u_2)\cdot al_{12}^\delta(u_1,u_2)$$

zu finden, wenn die Reihenentwickelungen von $al_0(u_1,u_2)$ und

$$al_{34}(u_1,u_2).al_{12}(u_1,u_2)$$

bekannt sind.

Nehmen wir den speciellen Fall $\varkappa=1$, so folgt durch Umkehrung unserer früheren Gleichungen mit leichter Mühe.

$$2\varkappa^2.\mu_\lambda^2.\mu_1^2.\frac{al_0^3(u_1,u_2)}{al_0^3}=\mu^2\cdot\frac{\partial^2 al_0(u_1,u_2)}{\partial u_1\partial u_2}\cdot\frac{1}{al_0}-\frac{\partial^2 al_0(u_1,u_2)}{\partial u_2^2}\cdot\frac{1}{al_0}$$

$$+(\lambda^2.\mu^2+\mu^2.\varkappa^2-2.\varkappa^2.\lambda^2-\mu^4+\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2)\cdot\frac{al_0(u_1,u_2)}{al_0}$$

$$-\varkappa_1^2.\mu^4\frac{al_{34}(u_1,u_2)\cdot al_{12}(u_1,u_2)}{al_{34}\cdot al_{12}},$$

$$2\varkappa_1^2 \cdot \mu_1^2 \cdot \frac{al_0(u_1, u_2) \cdot al_{12}^2(u_1, u_2)}{al_0 \cdot al_{12}^2} = \frac{\partial^2 al_0(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} \cdot \frac{1}{al_0} - \frac{\partial^2 al_0(u_1, u_2)}{\partial u_1^2} \cdot \frac{1}{al_0}$$
$$+ \varkappa_1^2 \cdot (2 - \mu^2) \cdot \frac{al_{34}(u_1, u_2) \cdot al_{12}(u_1, u_2)}{al_{34} \cdot al_{12}}.$$

Hieraus sind die übrigen Ausdrücke mit Hülfe der linearen Transformation leicht abzuleiten.

Die Constantenbestimmung kann im allgemeinen Fall auf mehrfache Weise geschehen. Erstens durch Umkehrung der früheren Formeln, zweitens mit Hülfe der Werthe der Differentialquotienten für die Nullwerthe der Argumente und endlich drittens durch Recursionsformeln. Um die letzteren zu entwickeln, denken wir uns die rechte und linke Seite in der allgemeinen Gleichung nach u_1 zweimal differenzirt. Links treten dann Ausdrücke von der Form auf

$$al_0^{\alpha-2}(u_1, u_2) \cdot al_{34}^{\gamma}(u_1, u_2) \cdot al_{12}^{\delta}(u_1, u_2) \cdot al_0'(u_1)^2;$$
$$al_0^{\alpha}(u_1, u_2) \cdot al_{34}^{\gamma-1}(u_1, u_2) \cdot al_{12}^{\delta-1}(u_1, u_2) \cdot al_{34}'(u_1) \cdot al_{12}'(u_1);$$
$$al_0^{\alpha-1}(u_1, u_2) \cdot al_{34}^{\gamma}(u_1, u_2) \cdot al_{12}^{\delta}(u_1, u_2) \cdot al_0''(u_1).$$

Denken wir uns an Stelle der Grössen

$$al_0'(u_1)^2; \; al_{34}'(u_1) \cdot al_{12}'(u_1); \; al_0''(u_1)$$

die früher gefundenen Ausdrücke eingesetzt, so ergeben sich auf der linken Seite Producte von der Form

$$al_0^{\alpha_1}(u_1, u_2) \cdot al_{34}^{\gamma_1}(u_1, u_2) \cdot al_{12}^{\delta_1}(u_1, u_2),$$

wobei

$$\alpha_1 + \gamma_1 + \delta_1 + \beta_1 = 2\varkappa + 3 \quad \text{ist.}$$

Denken wir uns die Entwickelungen derselben eingesetzt, so giebt die Vergleichung der rechten und der linken Seiten eine Reihe von Coefficientenbeziehungen, die zu der Berechnung derselben dienen können. Hierbei ist die Bedingung fallen gelassen, dass δ resp. $\delta' < 4$ ist.

Wir nehmen jetzt Ausdrücke von der Form:

$$al_0^{\alpha}(u_1, u_2) \cdot al_{34}^{\gamma}(u_1, u_2) \cdot al_{12}^{\delta}(u_1, u_2),$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\varkappa, \quad \beta + \delta \equiv \gamma + \delta \equiv 0 \text{ mod. } 2.$$

Es treten bei diesen Ausdrücken $\frac{(2\varkappa)^2}{2} + 2$ Constanten willkürlich auf. Die Functionen, aus denen sich dieselben linear zusammensetzen lassen, sind zu wählen unter den Ausdrücken:

$$al_0^2(u_1, u_2), \; al_{34}^2(u_1, u_2), \; al_{12}^2(u_1, u_2),$$

deren geraden Ableitungen bis zur $2\varkappa - 2^{\text{ten}}$ incl., dem Ausdruck

$$al_0(u_1, u_2) \,.\, al_{34}(u_1, u_2) \,.\, al_{12}(u_1, u_2)$$

und dessen geraden Ableitungen bis zur $2\varkappa - 4^{\text{ten}}$.

Als Beispiel wählen wir den Fall $\varkappa = 2$.

Durch Umkehrung der früher gefundenen Formeln ergiebt sich dann nach einigen Reductionen:

$$6\varkappa^2 \mu_1{}^2 \cdot \mu_\lambda{}^2 \cdot \frac{al_0{}^4(u, u_2)}{al_0{}^4}$$

$$= \frac{1}{al_0{}^2} \cdot \left(\mu^2 \cdot \frac{\partial^2 al_0(u_1, u_2)^2}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial^2 al_0(u_1, u_2)^2}{\partial u_2{}^2}\right)$$

$$+ 4\,\frac{(\varkappa^2.\lambda^2.\mu_1{}^2 + \mu_\varkappa^2.\mu_\lambda^2)}{al_0{}^2}\, al_0{}^2(u_1, u_2)$$

$$- 2\lambda^2.\mu_\varkappa{}^2 - \frac{4\varkappa_1{}^2.\mu^4}{al_0.al_{34}.al_{12}}\, al_0(u_1, u_2).al_{34}(u_1, u_2).al_{12}(u_1, u_2),$$

$$\frac{6\varkappa_1{}^2 . \mu_1{}^2}{al_0^2 . al_{12}^2}\, al_0{}^2(u_1, u_2) . al_{12}^2(u_1, u_2)$$

$$= \frac{1}{al_0{}^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 al_0(u_1, u_2)^2}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial^2 al_0(u_1, u_2)^2}{\partial u_1{}^2}\right) - 2\varkappa_1{}^2 \cdot \frac{al_{34}^2(u_1, u_2)}{al_{34}^2}$$

$$+ 4(2 - \mu^2) \cdot \varkappa_1{}^2 \cdot \frac{al_0(u_1, u_2).al_{34}(u_1, u_2).al_{12}(u_1, u_2)}{al_0.al_{34}.al_{12}}.$$

Hieraus sind die übrigen Formeln mit leichter Mühe abzuleiten.

In Bezug auf die Constantenbestimmung im allgemeinen Fall gilt dasselbe wie vorhin.

Bei den entwickelten Sätzen ist die Voraussetzung nothwendig, dass die zur Darstellung der Potenzen resp. Producte von Thetafunctionen gebrauchten $\frac{(2\varkappa + 1)^2 + 1}{2}$ resp. $\frac{(2\varkappa)^2}{2} + 2$ Ausdrücke linear von einander unabhängig sind.

§ 3.

Die ungerade Transformation, insbesondere die Transformation 3ten Grades.

Wir kommen jetzt zu dem eigentlichen Transformationsproblem. Dasselbe lautet in der ursprünglichen Fassung — es soll ein beliebiger zu einem Grade n gehörender Repräsentant als rationale Function der ursprünglichen Thetafunctionen ausgedrückt werden. Dabei sehen wir als Repräsentant das Product einer transformirten Thetafunction multiplicirt mit der dazu gehörenden Exponentialgrösse an. Wir beschränken uns zunächst auf den Fall, dass n eine ungerade Zahl ist, ferner auf die Repräsentanten, welche vom Verfasser im 20ten Bande dieser Annalen eingeführt worden sind.

Dann findet sich nach Hermite die Darstellung

$$\vartheta_0(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = \sum c_{\alpha\beta\gamma\delta}.\vartheta^\alpha(v_1, v_2).\,\vartheta_b^\beta(v_1, v_2).\vartheta_c^\gamma(v_1, v_2).\vartheta_d^\delta(v_1, v_2),$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = n, \quad \beta + \delta \equiv \gamma + \delta \equiv 0 \bmod. 2, \quad \delta < 4$$

wobei zwischen den Grössen v_1', v_2', τ_{11}', τ_{12}', τ_{22}' und den Grössen v_1, v_2, τ_{11}, τ_{12}, τ_{22}, die bekannten Beziehungen stattfinden.

Diese Gleichung kann in die Form gebracht werden:

$$al_0(u_1', u_2', \varkappa', \lambda', \mu') \cdot \frac{\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')}{\vartheta_5(v_1 v_2)^n}$$

$$= \sum c_{\alpha\beta\gamma\delta}.\,al_0^\alpha(u_1, u_2).\,al_b^\beta(u_1, u_2).\,al_c^\gamma(u_1, u_2).\,al_d^\delta(u_1, u_2),$$

wobei

$$u_1' = M_0 \,.\, u_1 + M_1 \,.\, u_2, \quad u_2' = M_2 \,.\, u_1 + M_3 \,.\, u_2$$

gesetzt sind.

Die Constanten können auf zweierlei principiell von einander verschiedenen Methoden bestimmt werden.

Erstens lassen sie sich, wie der Verfasser gezeigt hat, als rationale Functionen der ursprünglichen und transformirten Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente ausdrücken, zweitens können sie, oder doch ihre Quotienten, wie Brioschi gezeigt hat, als rationale Functionen von

$$\vartheta_\alpha\left(\frac{m + m_1\tau_{11} + m_2\tau_{12}}{n}, \frac{m' + m_1\tau_{12} + m_2\tau_{22}}{n}\right)$$

ausgedrückt werden. Die Zahl der Constanten beträgt $\frac{n^2+1}{2}$.

Wir wollen nun das Problem so fassen: Es sollen die möglichst allgemeinen Beziehungen zwischen den Repräsentanten, die zu einer Transformation n^{ten} Grades gehören und den ursprünglichen Thetafunctionen aufgestellt werden.

Seien dazu $\vartheta_0(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$ und $\vartheta_0(v_1'', v_2'', \tau_{11}'', \tau_{12}'', \tau_{22}'')$ zwei beliebige von einander verschiedene Repräsentanten, so genügt der zweite Repräsentant denselben Gleichungen wie der erste. Hieraus folgt die Beziehung:

$$\vartheta_0(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = c_0 . \vartheta_0(v_1'', v_2'', \tau_{11}'', \tau_{12}'', \tau_{22}'')$$

$$+ \sum' c_{\alpha\beta\gamma\delta}.\vartheta_0^\alpha(v_1, v_2).\vartheta_b^\beta(v_1, v_2).\vartheta_c^\gamma(v_1, v_2).\vartheta_d^\delta(v_1, v_2)$$

wobei die letzte Summe über genau dieselben Verbindungen wie vorhin zu nehmen ist, mit Ausnahme einer einzigen. Es ist dieses dadurch angedeutet, dass die Summe mit einem Strich versehen ist. Solcher Gleichungen giebt es $\frac{n^2+1}{2}$ verschiedene.

Diejenige Art der Constantenbestimmung, die sich zuerst darbietet, bestände in der Elimination je eines Gliedes aus den beiden ursprünglichen Gleichungen, welche für die beiden Repräsentanten gefunden

sind. Jedenfalls folgt für die Constanten in dieser Gleichung unter solchen Umständen genau dasselbe wie für die Constanten in den ursprünglichen Gleichungen. Auch sie können auf doppelte Weise dargestellt werden als rationale Functionen der Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente und als rationale Functionen der Thetafunctionen mit den ursprünglichen Moduln, deren Argumente die Theilwerthe $\frac{m + m_1\tau_{11} + m_2\tau_{12}}{n}$, $\frac{m' + m_1\tau_{12} + m_2\tau_{22}}{n}$ sind.

Indessen dürfte die Darstellungsart wesentlich neue Resultate nicht liefern — auch nach anderer Richtung hin nicht zu empfehlen sein. Es empfiehlt sich von directen Methoden Gebrauch zu machen.

Dazu denken wir uns aus der ursprünglichen Gleichung durch Substitution halber Perioden 15 andere entwickelt, welche dieselben Constanten enthalten, ferner verbinden wir mit der ursprünglichen alle andern Gleichungen, die zwischen denselben zwei Repräsentanten bestehen. Wir erhalten dann 16 $\frac{n^2+1}{2}$ Gleichungen mit $\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$ Unbekannten, die linear auftreten.

Diese Gleichungen können in die Form gebracht werden.

$$a l_0(u_1', u_2', \varkappa', \lambda', \mu') \cdot \frac{\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')}{\vartheta_5(v_1, v_2)^n}$$

$$= e_0 \cdot a l_0(u_1'', u_2'', \varkappa'', \lambda'', \mu'') \cdot \frac{\vartheta_5(v_1'', v_2'', \tau_{11}'', \tau_{12}'', \tau_{22}'')}{\vartheta_5(v_1, v_2)^n}$$

$$+ \sum{}' c_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot a l_0^{\alpha}(u_1, u_2) \cdot a l_b^{\beta}(u_1, u_2) \cdot a l_c^{\gamma}(u_1, u_2) \cdot a l_d^{\delta}(u_1, u_2).$$

Dabei ist

$$u_1' = M_0' \cdot u_1 + M_1' \cdot u_2, \quad u_2' = M_2' \cdot u_1 + M_3' \cdot u_2,$$
$$u_1'' = M_0'' \cdot u_1 + M_1'' \cdot u_2, \quad u_2'' = M_2'' \cdot u_1 + M_3'' \cdot u_2.$$

Wir denken uns nun beide Seiten dieser Gleichungen nach Potenzen von u_1 und u_2 entwickelt. Die Coefficienten in der Entwickelung von $a l(u_1, u_2)$ sind dann jedenfalls rationale Functionen der ursprünglichen Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente, die Coefficienten in der Entwickelung von $a l_0(u_1', u_2', \varkappa', \lambda', \mu')$ und $a l_0(u_1'', u_2'', \varkappa'', \lambda'', \mu'')$ dagegen rationale Functionen der Grössen M', M'', und der transformirten Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente. Wir wollen die letzteren durch $0_\alpha'$, $0_\alpha''$ bezeichnen, dann folgt mit Hülfe weniger Schlüsse, dass alle Constanten sich rational durch die Grössen ϑ_α, $0_\alpha'$, $0_\alpha''$, M_i' und M_i'' ausdrücken lassen, während zwischen diesen Grössen unendlich viele rationale Beziehungen bestehen. Zweitens könnten die Constanten dadurch bestimmt werden, dass man an Stelle der Argumente v_1, v_2 die vorhin definirten Theilwerthe einsetzt. Wir

gehen auf diese Art der Bestimmung bei dieser Gelegenheit nicht näher ein.

In ähnlicher Weise können Beziehungen zwischen je drei, vier etc. Repräsentanten aufgestellt werden. Es ist klar, dass die Zahl derselben übereinstimmt mit der Zahl der Combinationen von $\frac{n^2+1}{2}$ Elementen zu je 2, 3 etc.

Hierbei würde sich dann von selbst das Problem ergeben, zwischen $\frac{n^2+1}{2}+1$ Repräsentanten lineare Beziehungen herzustellen. Die Auflösbarkeit des Problems folgt unmittelbar aus den vorhin gemachten Bemerkungen.

Wir können das Resultat auch so aussprechen. Bezeichnet man die Zahl der von einander verschiedenen Repräsentanten durch R — dieselbe ist im 3ten Bande der Acta mathematica bestimmt worden — so bestehen zwischen den R Repräsentanten $R-\frac{n^2+1}{2}$ von einander unabhängige Beziehungen, welche sämmtlich linear sind.

Noch allgemeiner können wir sagen: Die R Repräsentanten sind die Lösungen eines Systems von ebensovielen linearen Gleichungen. Die rechten Seiten bei $R-\frac{n^2+1}{2}$ dieser Gleichungen sind Null, bei den übrigen gleich $\vartheta_0^\alpha(v_1,v_2).\vartheta_b^\beta(v_1,v_2).\vartheta_c^\gamma(v_1,v_2).\vartheta_d^\delta(v_1,v_2)$ wobei die Grössen b, c, d, α, β, γ, δ die nun schon mehrfach aufgestellten Bedingungsgleichungen erfüllen. Die Constanten können auf mehrfache Weisen bestimmt werden, die principiell von einander verschieden sind. Die Ausdrucksformen sind unendlich mannigfache.

Dieser letzte Satz löst zu gleicher Zeit das Problem die Functionen $\vartheta_a^\alpha(v_1,v_2).\vartheta_b^\beta(v_1,v_2).\vartheta_c^\gamma(v_1,v_2).\vartheta_d^\delta(v_1,v_2)$ in Fourier'sche Reihen zu entwickeln.

Andererseits kann man die Fourier'schen Reihen für die ursprünglichen und die transformirten Thetafunctionen, die ja unmittelbar bekannt sind, zu Constantenbestimmungen benutzen. Es wird sich diese Methode vor allem da empfehlen, wo es sich um Aufstellung der linearen Relationen zwischen Repräsentanten allein handelt. Man erhält für eine Primzahltransformation auf diese Weise ohne alle Schwierigkeiten die Coefficientenbestimmung wie sie von Herrn Wiltheiss gegeben worden ist.

In allen andern Fällen ist die Anwendung der Fourier'schen Reihen keine so einfache, da es nicht leicht ist, die Potenzen resp. Producte von Thetafunctionen in passender Weise in Fourier'sche Reihen zu entwickeln. Zwar handelt es sich vermöge unserer Sätze immer nur um die Darstellung der $\frac{n^2+1}{2}$ ersten Glieder, indessen ist

es ohne Hinzunahme anderer Theorien schwer, diese Glieder in eine brauchbare Form zu bringen.

Bei diesen Entwickelungen ergeben sich dann unendlich viele Thetabeziehungen.

Bleiben wir bei denjenigen stehen, die zwischen den ursprünglichen und den transformirten Thetafunctionen bestehen, so zerfallen dieselben in zwei Categorien.

Erstens können in ihnen thatsächlich nur Quotienten von Thetafunctionen enthalten sein oder zweitens es ist dieses nicht der Fall. Je nachdem der erste oder der zweite Fall stattfindet, erhält man Beziehungen zwischen den Wurzeln der Modulargleichungen oder Multicatorgleichungen, deren Theorie in früheren Arbeiten von dem Verfasser entwickelt worden ist. Die Betrachtungen die in denselben angestellt worden sind, lassen klar erkennen, dass die eingeführten Gleichungen nur Vertreter zweier wesentlich von einander verschiedenen Gleichungsarten sind, dass ausser ihnen noch unendlich viele andere Gleichungen existiren müssen, die entweder zu der einen Art oder zu der andern gehören. Es hängt dieses wesentlich davon ab, ob wir es mit Thetaquotienten oder nicht zu thun haben. Als Vertreter der letzteren hat Verfasser die Multiplicatorgleichungen gewählt. Es könnten aber auch diejenigen Gleichungen gewählt werden, deren Wurzeln die Form $A.O_\alpha^2$ haben (siehe diese Annalen Band XX, p. 56). Der Existenzbeweis ändert sich nur ganz unwesentlich. Diese Gleichungen haben vor den andern insofern einen Vorzug, als ihr Character reiner und klarer hervortritt, dagegen aber können sie nicht mit dem Namen der Multiplicatorgleichungen bezeichnet werden, wenn man sich auf den Standpunkt der Transformationstheorie stellt und analog wie in der Theorie der elliptischen Functionen verfahren will.

In der schon citirten Arbeit beschäftigt sich Herr Wiltheiss mit Gleichungen, denen die Grössen $A.O_\alpha{}^2$ Genüge leisten, beschränkt sich aber darauf, in anderer Form den im Wesentlichen schon bekannten Satz abzuleiten, dass die repräsentirenden Grössen $A.O_\alpha{}^2$ Wurzeln einer und derselben Gleichung sind, deren Coefficienten sich rational aus den Grössen ϑ_α zusammensetzen lassen.

Es soll jetzt der Fall $n=3$ betrachtet werden.

Zwischen zwei willkürlichen Repräsentanten können dann fünf wesentlich von einander verschiedene Relationen hergestellt werden.

Erstens findet eine Relation von der Form statt:

$$\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = e_1 . \vartheta_5(v_1'', v_2'', \tau_{11}'', \tau_{12}'', \tau_{22}'')$$
$$+ e_2 . \vartheta_5(v_1, v_2) . \vartheta_1{}^2(v_1, v_2) + e_3 . \vartheta_5(v_1, v_2) . \vartheta_{02}^2(v_1, v_2)$$
$$+ e_4 . \vartheta_5(v_1, v_2) . \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) + e_5 . \vartheta_1(v_1, v_2) . \vartheta_{02}(v_1, v_2) . \vartheta_{34}(v_1, v_2).$$

Durch Substitution halber Perioden ergeben sich, nachdem die Argumente Null gesetzt sind, die Gleichungen:

$$O_5'.\vartheta_5 = e_1.O_5''.\vartheta_5 + e_4.\vartheta_5^2.\vartheta_{34}^2, \quad O_{03}'.\vartheta_{03} = e_1.O_{03}''.\vartheta_{03} + e_3.\vartheta_{03}^2.\vartheta_{23}^2,$$

$$O_4'.\vartheta_4 = e_1.O_4''.\vartheta_4 - e_2.\vartheta_4^2.\vartheta_{14}^2,$$

$$O_{34}'.\vartheta_{34} = e_1.O_{34}''.\vartheta_{34} + e_4.\vartheta_5^2.\vartheta_{34}^2, \quad O_{23}'.\vartheta_{23} = e_1.O_{23}''.\vartheta_{23} - e_3.\vartheta_{03}^2.\vartheta_{13}^2,$$

$$\varepsilon'.O_{14}'.\vartheta_{14} = e_1.\varepsilon''.O_{14}''.\vartheta_{14} + e_2.\vartheta_4^2.\vartheta_{14}^2,$$

$$O_0'.\vartheta_0 = e_1.O_0''.\vartheta_0 + e_2.\vartheta_0^2.\vartheta_{01}^2 + e_3.\vartheta_0^2.\vartheta_2^2 + e_4.\vartheta_0^2.\vartheta_{12}^2 + e_5.\vartheta_0.\vartheta_{01}.\vartheta_2.\vartheta_{12},$$

$$O_{01}'.\vartheta_{01} = e_1.O_{01}''.\vartheta_{01} - e_2.\vartheta_{01}^2.\vartheta_0^2 - e_3.\vartheta_{01}^2.\vartheta_{12}^2 + e_4.\vartheta_{01}^2.\vartheta_2^2 - e_5.\vartheta_0.\vartheta_{01}.\vartheta_2.\vartheta_{12},$$

$$O_2'.\vartheta_2 = e_1.O_2''.\vartheta_2 - e_2.\vartheta_2^2.\vartheta_{12}^2 - e_3.\vartheta_2^2.\vartheta_0^2 + e_4.\vartheta_2^2.\vartheta_{01}^2 - e_5.\vartheta_0.\vartheta_{01}.\vartheta_2.\vartheta_{12},$$

$$O_{12}'.\vartheta_{12} = e_1.O_{12}''.\vartheta_{12} + e_2.\vartheta_{12}^2.\vartheta_2^2 + e_3.\vartheta_{12}^2.\vartheta_{01}^2 + e_4.\vartheta_{12}^2.\vartheta_0^2 + e_5.\vartheta_0.\vartheta_{01}.\vartheta_2.\vartheta_{12}.$$

Dabei sind die Grössen ε' und ε'' je nach der Wahl der Repräsentanten gleich plus oder minus Eins. Um die Formeln übersichtlicher zu gestalten, setzen wir:

$$E_{\alpha\beta} = O_\alpha'.O_\beta'' - O_\beta'.O_\alpha''.$$

Ist α oder β gleich 14, so denken wir uns die entsprechende Function O mit dem Factor ε' oder ε'' versehen. Ferner setzen wir:

$$e_{\alpha\beta}' = O_\alpha'.\vartheta_\alpha + O_\beta'.\vartheta_\beta, \quad e_{\alpha\beta}'' = O_\alpha''.\vartheta_\alpha + O_\beta''.\vartheta_\beta$$

wenn

$\alpha = 4$, $\beta = 14$; $\alpha = 03$, $\beta = 23$; $\alpha = 0$, $\beta = 01$; $\alpha = 0$, $\beta = 2$

ist. Im ersten Falle denken wir uns überdies O_{14}^i mit dem Factor ε^i versehen.

Dagegen werde gesetzt:

$$e_{\alpha\beta}' = O_\alpha'.\vartheta_\alpha - O_\beta'.\vartheta_\beta, \quad e_{\alpha\beta}'' = O_\alpha''.\vartheta_\alpha - O_\beta''.\vartheta_\beta,$$

wenn $\alpha = 5$, $\beta = 34$; $\alpha = 0$, $\beta = 12$ ist.

Schliesslich führen wir die Bezeichnungen ein:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}' = O_\alpha'.\vartheta_\beta^3 - O_\beta'.\vartheta_\alpha^3, \quad \varepsilon_{\alpha\beta}'' = O_\alpha''.\vartheta_\beta^3 - O_\beta''.\vartheta_\alpha^3.$$

Ist wiederum α oder β gleich 14 so denken wir uns die entsprechende O Function mit ε' oder ε'' multiplicirt.

Aus den obigen Gleichungen ergeben sich dann die Relationen:

$$e_1 = \frac{e_{5,34}'}{e_{5,34}''} = \frac{e_{03,23}'}{e_{03,23}''} = \frac{e_{4,14}'}{e_{4,14}''},$$

$$e_2 = \frac{E_{14,4}}{\vartheta_4.\vartheta_{14}.e_{14,4}''}, \quad e_3 = \frac{E_{03,23}}{\vartheta_{03}.\vartheta_{23}.e_{03,23}''}, \quad e_4 = \frac{E_{34,5}}{\vartheta_5.\vartheta_{34}.e_{5,34}''},$$

$$e_{0,01}'.e_{5,34}'' - e_{0,01}''.e_{5,34}' = E_{23,03}.\vartheta_{23}.\vartheta_{03} + E_{34,5}.\vartheta_5.\vartheta_{34},$$

$$e_{0,2}'.e_{5,34}'' - e_{0,2}''.e_{5,34}' = E_{34,5}.\vartheta_{34}.\vartheta_5 + E_{14,4}.\vartheta_{14}.\vartheta_4,$$

$$e_{0,12}'.e_{5,34}'' - e_{0,12}''.e_{5,34}' = E_{14,4}.\vartheta_{14}.\vartheta_4 + E_{23,03}.\vartheta_{23}.\vartheta_{03}.$$

In ähnlicher Weise sind die andern Fälle zu behandeln. Für den zweiten Fall ergeben sich die Formeln:

$$\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = e_6 . \vartheta_5(v_1, v_2)^3 + e_7 . \vartheta_5(v_1'', v_2'', \tau_{11}'', \tau_{12}'', \tau_{22}'')$$
$$+ e_8 . \vartheta_5(v_1, v_2) . \vartheta_{02}^2(v_1, v_2) + e_9 . \vartheta_5(v_1, v_2) . \vartheta_{34}^2(v_1, v_2)$$
$$+ e_{10} . \vartheta_1(v_1, v_2) . \vartheta_{02}(v_1, v_2) . \vartheta_{34}(v_1, v_2),$$

$$e_6 = \frac{E_{4,14}}{\varepsilon''_{14,4}}, \qquad e_7 = \frac{\varepsilon'_{14,4}}{\varepsilon''_{14,4}},$$

$$e_8 . \vartheta_{03} . \vartheta_{23}^2 . \varepsilon''_{14,4} = \vartheta_4^3 . E_{03,14} + \vartheta_{14}^3 . E_{4,03} + \vartheta_{03}^3 . E_{14,4},$$
$$e_9 . \vartheta_5 . \vartheta_{34}^2 . \varepsilon''_{14,4} = \vartheta_4^3 . E_{5,14} + \vartheta_{14}^3 . E_{4,5} + \vartheta_5^3 . E_{14,4},$$

$$e'_{5,34} . \varepsilon''_{14,4} - e''_{5,34} . \varepsilon'_{14,4} = E_{4,14} . (\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4),$$
$$e'_{03,23} . \varepsilon''_{14,4} - e''_{03,23} . \varepsilon'_{14,4} = E_{4,14} . (\vartheta_{03}^4 + \vartheta_{23}^4),$$

$$e'_{0,01} - e_7 . e''_{0,01} = e_6 . (\vartheta_0^4 + \vartheta_{01}^4) - e_8 . \vartheta_{03}^2 . \vartheta_{23}^2 + e_9 . \vartheta_5^2 . \vartheta_{34}^2,$$
$$e'_{0,2} - e_7 . e''_{0,2} = e_6 . (\vartheta_0^4 + \vartheta_2^4) \qquad + e_9 . \vartheta_5^2 . \vartheta_{34}^2,$$
$$e'_{0,12} - e_7 . e''_{0,12} = e_6 . (\vartheta_0^4 - \vartheta_{12}^4) - e_8 . \vartheta_{02}^2 . \vartheta_{23}^2 .$$

Im dritten Falle ergeben sich die Formeln:

$$\vartheta_5(v_1', v_2' \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = e_{11} . \vartheta_5^3(v_1, v_2) + e_{12} . \vartheta_5(v_1, v_2) . \vartheta_1^2(v_1, v_2)$$
$$+ e_{13} . \vartheta_5(v_1'', v_2'', \tau_{11}'', \tau_{12}'', \tau_{22}'')$$
$$+ e_{14} . \vartheta_5(v_1, v_2) . \vartheta_{34}^2(v_1, v_2)$$
$$+ e_{15} . \vartheta_1(v_1, v_1) . \vartheta_{02}(v_1, v_2) . \vartheta_{34}(v_1, v_2),$$

$$e_{11} = \frac{E_{03,23}}{\varepsilon''_{23,03}}, \qquad e_{13} = \frac{\varepsilon'_{23,03}}{\varepsilon''_{23,03}},$$

$$e_{12} . \vartheta_4 . \vartheta_{14}^2 . \varepsilon''_{23,03} = \vartheta_{03}^3 . E_{23,4} + \vartheta_{23}^3 . E_{4,03} + \vartheta_4^3 . E_{03,23},$$
$$e_{14} . \vartheta_5 . \vartheta_{34}^2 . \varepsilon''_{23,03} = \vartheta_{03}^3 . E_{5,23} + \vartheta_{23}^3 . E_{03,5} + \vartheta_5^3 . E_{23,03},$$

$$e'_{5,34} . \varepsilon''_{23,03} - e''_{5,34} . \varepsilon'_{23,03} = E_{03,23} . (\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4),$$
$$e'_{4,14} . \varepsilon''_{23,03} - e''_{4,14} . . \varepsilon''_{23,03} = E_{03,23} . (\vartheta_4^4 + \vartheta_{14}^4),$$

$$e'_{0,01} - e_{13} . e''_{0,01} = e_{11} . (\vartheta_0^4 + \vartheta_{01}^4) \qquad + e_{14} . \vartheta_5^2 . \vartheta_{34}^2,$$
$$e'_{0,2} - e_{13} . e''_{0,2} = e_{11} . (\vartheta_0^4 + \vartheta_2^4) + e_{12} . \vartheta_4^2 . \vartheta_{14}^2 + e_{14} . \vartheta_5^2 . \vartheta_{34}^2,$$
$$e'_{0,12} - e_{13} . e''_{0,12} = e_{11} . (\vartheta_0^4 + \vartheta_{12}^4) + e_{12} . \vartheta_4^2 . \vartheta_{14}^2 .$$

Im vierten Falle erhalten wir die Relationen:

$$\begin{aligned}\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = {} & e_{16}.\vartheta_5^3(v_1, v_2) + e_{17}.\vartheta_5(v_1, v_2).\vartheta_1^2(v_1, v_2) \\ & + e_{18}.\vartheta_5(v_1, v_2).\vartheta_{02}^2(v_1, v_2) \\ & + e_{19}.\vartheta_5(v_1'', v_2'', \tau_{11}'', \tau_{12}'', \tau_{22}'') \\ & + e_{20}.\vartheta_1(v_1, v_2).\vartheta_{02}(v_1, v_2).\vartheta_{31}(v_1, v_2),\end{aligned}$$

$$e_{16} = \frac{E_{5,34}}{\varepsilon_{34,5}''}, \qquad e_{19} = \frac{\varepsilon_{5,34}'}{\varepsilon_{34,5}''},$$

$$e_{17}.\vartheta_4.\vartheta_{14}^2.\varepsilon_{34,5}'' = \vartheta_5^3.E_{34,4} + \vartheta_{34}^3.E_{4,5} + \vartheta_4^3.E_{5,34},$$

$$e_{18}.\vartheta_{03}.\vartheta_{23}^2.\varepsilon_{34,5}'' = \vartheta_5^3.E_{03.34} + \vartheta_{34}^3.E_{5,03} + \vartheta_{03}^3.E_{34,5},$$

$$e_{03,23}'.\varepsilon_{34,5}'' - e_{03,23}''.\varepsilon_{34,5}' = E_{5,34}.(\vartheta_{03}^4 + \vartheta_{23}^4),$$

$$e_{4,14}'.\varepsilon_{34,5}'' - e_{4,14}''.\varepsilon_{34,5}' = E_{5,34}.(\vartheta_4^4 + \vartheta_{14}^4),$$

$$e_{0,01}' - e_{19}.e_{0,01}'' = e_{16}.(\vartheta_0^4 + \vartheta_{01}^4) \qquad - e_{18}.\vartheta_{03}^2.\vartheta_{23}^2,$$

$$e_{0,2}' - e_{19}.e_{0,2}'' = e_{16}.(\vartheta_0^4 + \vartheta_2^4) + e_{17}.\vartheta_4^2.\vartheta_{14}^2,$$

$$e_{0,12}' - e_{19}.e_{0,12}'' = e_{16}.(\vartheta_0^4 = \vartheta_{12}^4) + e_{17}.\vartheta_4^2.\vartheta_{14}^2 - e_{18}.\vartheta_{03}^2.\vartheta_{23}^2.$$

Der fünfte und letzte Fall ergiebt die Ausdrucksform:

$$\begin{aligned}\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = {} & e_{21}.\vartheta_5^3(v_1, v_2) + e_{22}.\vartheta_5(v_1, v_2).\vartheta_1^2(v_1, v_2) \\ & + e_{23}.\vartheta_5(v_1, v_2).\vartheta_{02}^2(v_1, v_2) \\ & + e_{24}.\vartheta_5(v_1, v_2).\vartheta_{34}^2(v_1, v_2) \\ & + e_{25}.\vartheta_5(v_1'', v_2'', \tau_{11}'', \tau_{12}'', \tau_{22}'').\end{aligned}$$

Die Relationen, die sich in diesem Falle ergeben, mögen nicht weiter aufgestellt werden, da sie zu grosse Aehnlichkeit mit den ursprünglichen haben.

Bilden wir jetzt für einen jeden der fünf Fälle durch Substitution halber Perioden diejenigen sechs Gleichungen, auf deren linken Seiten Repräsentanten ungerader Thetafunctionen stehen und differenziren, so erhalten wir im Ganzen 60 weitere Gleichungen, die acht neue Unbekannten enthalten, die Grössen M' und M''. Diese Gleichungen können dazu dienen, weitere Beziehungen zwischen den ursprünglichen und den transformirten Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente herzustellen. Vor allem ergeben sich hieraus eine Reihe interessanter Beziehungen zwischen den fünfundzwanzig Constanten $e_1 \ldots e_{25}$, die nur schwer auf andere Weise herzuleiten wären.

In der That, nehmen wir die zu dem ersten der fünf Systeme gehörende Gleichung, welche sich auf die Thetafunctionen mit dem Index drei bezieht, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\varepsilon_1'\cdot\frac{0_5'}{\vartheta_5}\cdot Al_3'(u_2')_0.M_2' - \varepsilon_1''\cdot\frac{0_5''}{\vartheta_5}\cdot e_1\,Al_3'(u_2'')_0.M_2'' = e_5.\vartheta_4.\vartheta_{14}.al_{13}'(u_1)_0,$$

$$\varepsilon_1'\cdot\frac{0_5'}{\vartheta_5}\cdot Al_3'(u_2)_0\cdot\big(M_2'.al_{13}'(u_2)_0 - M_3'.al_{13}'(u_1)_0\big)$$
$$-\varepsilon_1''\cdot\frac{0_5''}{\vartheta_5}\cdot e_1\cdot Al_3'(u_2'')_0\big(M_2''.al_{13}'(u_2)_0 - M_3''.al_{13}'(u_1)_0\big)$$
$$= (e_3.\vartheta_{14}^2 - e_4.\vartheta_4^2).al_3'(u_2)_0.al_{13}'(u_1)_0.$$

Die Bedeutung der eingeführten Bezeichnungen braucht nicht weiter auseinandergesetzt zu werden. Es möge in Bezug hierauf überdies auf die Arbeit des Verfassers im 3ten Bande der Acta mathematica verwiesen werden.

Die entsprechenden Gleichungen in den andern vier Fällen ergeben sich aus den vorliegenden, wenn an Stelle von:

$$\begin{array}{llll} e_1 & e_3 & e_4 & e_5 \quad \text{gesetzt wird resp.} \\ e_7 & e_8 & e_9 & e_{10}, \\ e_{13} & 0 & e_{14} & e_{15}, \\ e_{19} & e_{18} & 0 & e_{20}, \\ e_{25} & e_{23} & e_{24} & 0\,. \end{array}$$

Aus diesen Gleichungen folgen die Relationen:

$$\frac{e_5-e_{10}}{e_1-e_7} = \frac{e_5-e_{15}}{e_1-e_{13}} = \frac{e_5-e_{20}}{e_1-e_{19}} = \frac{e_5}{e_1-e_{25}}.$$

$$\frac{\vartheta_{14}^2.(e_3-e_8)-\vartheta_4^2.(e_4-e_9)}{e_1-e_7} = \frac{\vartheta_{14}^2.e_3-\vartheta_4^2.(e_4-e_{14})}{e_1-e_{13}} = \frac{\vartheta_{14}^2.(e_3-e_{18})-\vartheta_4^2.e_4}{e_1-e_{19}}$$
$$= \frac{\vartheta_{14}^2.(e_3-e_{23})-\vartheta_4^2.(e_4-e_{24})}{e_1-e_{25}}.$$

Nehmen wir ferner die zum ersten Falle gehörende Gleichung, welche sich auf den Index 24 bezieht, so ergeben sich die Gleichungen

$$\varepsilon_1'\cdot\frac{0_5'}{\vartheta_5}\cdot Al_{24}'(u_1')_1.M_1' - \varepsilon_1''\cdot\frac{0_5''}{\vartheta_5}\cdot e_1\cdot Al_{24}'(u_1'')_0.M_1'' = -e_5.\vartheta_{23}.\vartheta_{03}.al_{04}'(u_2)_0,$$

$$\varepsilon_1'\cdot\frac{0_5'}{\vartheta_5}\cdot Al_{24}'(u_1')_0.\big(M_1'.al_{04}'(u_1)_0 - M_0'.al_{04}'(u_2)_0\big)$$
$$-\varepsilon_1''\cdot\frac{0_5''}{\vartheta_5}\cdot e_1\,Al_{24}''(u_1'').\big(M_1''.al_{04}'(u_1)_0 - M_0''.al_{04}'(u_2)_0\big)$$
$$= (e_2.\vartheta_{03}^2 - e_4.\vartheta_{23}^2).al_{24}'(u_1)_0.al_{04}'(u_2)_0.$$

Hieraus ergeben sich die weiteren Relationen:

$$\frac{\vartheta_{03}^2.e_2-\vartheta_{23}^2.(e_4-e_9)}{e_1-e_7} = \frac{\vartheta_{03}^2.(e_2-e_{12})-\vartheta_{23}^2.(e_5-e_{14})}{e_1-e_{13}} = \frac{\vartheta_{03}^2.(e_2-e_{17})-\vartheta_{23}^2.e_4}{e_1-e_{19}}$$
$$= \frac{\vartheta_{03}^2.(e_2-e_{22})-\vartheta_{23}^2.(e_4-e_{24})}{e_1-e_{25}}.$$

Auf eine ganz analoge Weise erhalten wir die Relationen:

$$\frac{\vartheta_4^2.(e_3-e_8)+\vartheta_{14}^2.(e_4-e_9)}{e_1-e_7}=\frac{\vartheta_4^2.e_3+\vartheta_{14}^2.(e_4-e_{14})}{e_1-e_{13}}=\frac{\vartheta_4^2.(e_3-e_{18})+\vartheta_{14}^2.e_4}{e_1-e_{19}}$$
$$=\frac{\vartheta_4^2.(e_3-e_{23})+\vartheta_{14}^2.(e_1-e_{24})}{e_1-e_{25}},$$

$$\frac{\vartheta_{23}^2.e_2+\vartheta_{03}^2.(e_4-e_9)}{e_1-e_7}=\frac{\vartheta_{23}^2.(e_2-e_{12})+\vartheta_{03}^2.(e_4-e_{14})}{e_1-e_{13}}=\frac{\vartheta_{23}^2.(e_2-e_{17})+\vartheta_{03}^2.e_4}{e_1-e_{19}}$$
$$=\frac{\vartheta_{23}^2.(e_2-e_{22})+\vartheta_{03}^2.(e_4-e_{24})}{e_1-e_{25}},$$

$$\frac{\vartheta_{34}^2.e_2+\vartheta_5^2.(e_3-e_8)}{e_1-e_7}=\frac{\vartheta_{34}^2.(e_2-e_{12})+\vartheta_5^2.e_3}{e_1-e_{13}}=\frac{\vartheta_{34}^2.(e_2-e_{17})+\vartheta_5^2.(e_3-e_{18})}{e_1-e_{19}}$$
$$=\frac{\vartheta_{34}^2.(e_2-e_{22})+\vartheta_5^2.(e_3-e_{23})}{e_1-e_{25}},$$

$$\frac{\vartheta_5^2.e_2+\vartheta_{34}^2.(e_3-e_8)}{e_1-e_7}=\frac{\vartheta_5^2.(e_2-e_{12})+\vartheta_{34}^2.e_3}{e_1-e_{13}}=\frac{\vartheta_5^2.(e_2-e_{17})+\vartheta_{34}^2.(e_3-e_{18})}{e_1-e_{19}}$$
$$=\frac{\vartheta_5^2.(e_2-e_{22})+\vartheta_{34}^2.(e_3-e_{23})}{e_1-e_{25}}.$$

Die hier aufgestellten Relationen mögen genügen. Es ist klar, dass durch weitere Differentiationen und durch Combination der gefundenen Formeln die Zahl derselben ins unendliche vermehrt werden kann.

Zu interessanten Resultaten führt ferner die Anwendung der supplementären Transformation. Es ergeben sich dann einfache Beziehungen zwischen den ursprünglichen Thetafunctionen und den Repräsentanten, die einer Transformation 3^{ten} und 9^{ten} Grades gehören. Wir sehen von der methodischen Aufstellung derselben als zu weitführend ab.

In ähnlicher Weise wie die Relationen zwischen je zwei der 40 Repräsentanten, lassen sich die Relationen zwischen je drei derselben ableiten. Es werden sich hierbei 10 von einander wesentlich verschiedene Ausdrucksformen ergeben. Wir begnügen uns damit eine einzige herauszugreifen, um die Anwendbarkeit der Methode zu zeigen. Die andern neun Fälle lassen sich auf genau dieselbe Weise behandeln.

Es ist:

$$\vartheta_5(v_1',v_2',\tau_{11}',\tau_{12}',\tau_{22}')=e_1.\vartheta_5(v_1'',v_2'',\tau_{11}'',\tau_{12}'',\tau_{22}'')+e_2.\vartheta_5(v_1''',v_2''',\tau_{11}''',\tau_{12}''',\tau_{22}''')$$
$$+e_3.\vartheta_5(v_1,v_2).\vartheta_{02}^2(v_1,v_2)+e_4.\vartheta_5(v_1,v_2).\vartheta_{34}^2(v_1,v_2)$$
$$+e_5.\vartheta_1(v_1,v_2).\vartheta_{02}(v_1,v_2).\vartheta_{34}(v_1,v_2).$$

Durch Substitution halber Perioden ergeben sich dann bei bekannter Bezeichnungsweise die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
&e_1.N = O_4'.O'''_{14} - O'_{14}.O_4''', \quad e_2.N = O_4''.O'_{14} - O''_{14}.O_4',\\
&e_3.\vartheta_{03}^2.\vartheta_{23}^2.N = O'_{03}.\vartheta_{03}.(O_4''.O'''_{14} - O''_{14}.O_4''') + O''_{03}.\vartheta_{03}.(O_4'''.O'_{14} - O'''_{14}.O_4')\\
&\qquad + O'''_{03}.\vartheta_{03}.(O_4'.O''_{14} - O'_{14}.O_4''),\\
&e_4.\vartheta_5^2.\vartheta_{34}^2.N = O_5'.\vartheta_5.(O_4''.O'''_{14} - O''_{11}.O_4''') + O_5''.\vartheta_5(O_4'''.O'_{14} - O'''_{14}.O_4')\\
&\qquad + O_5'''.\vartheta_5(O_4'.O''_{14} - O'_{14}.O_4''),\\
&N = O_4''.O'''_{14} - O''_{14}.O_4'''.
\end{aligned}$$

Dazu kommen die Thetabeziehungen:

$$\begin{aligned}
&(O_5'.\vartheta_5 - O'_{34}.\vartheta_{34}).(O_4''.O''_{14} - O''_{14}.O_4''') + (O_5''.\vartheta_5 - O''_{34}.\vartheta_{34}).(O_4'''.O'_{14} - O'''_{14}.O_4')\\
&\qquad + (O_5'''.\vartheta_5 - O'''_{34}.\vartheta_{34}).(O_4'.O''_{14} - O'_{14}.O_4'') = 0,\\
&(O'_{03}.\vartheta_{03} + O'_{23}.\vartheta_{23}).(O_4''.O'''_{14} - O''_{14}.O_4''') + (O''_{03}.\vartheta_{03} + O''_{23}.\vartheta_{23}).(O_4'''.O'_{14} - O'''_{14}.O_4')\\
&\qquad + (O'''_{03}.\vartheta_{03} + O'''_{23}.\vartheta_{23}).(O_4'.O''_{14} - O'_{14}.O_4'') = 0,\\
&(O_0'.\vartheta_0 + O'_{01}.\vartheta_{01}).(O_4''.O'''_{14} - O''_{14}.O_4''') + (O_0''.\vartheta_0 + O''_{01}.\vartheta_{01}).(O_4'''.O'_{14} - O'''_{14}.O_4')\\
&\qquad + (O_0'''.\vartheta_0 - O'''_{01}.\vartheta_{01}).(O_4'.O''_{14} - O'_{14}.O_4'')\\
&= (O_5'.\vartheta_5 - O'_{03}.\vartheta_{03}).(O_4''.O''_{14} - O''_{14}.O_4''') + (O_5''.\vartheta_5 - O''_{03}.\vartheta_{03}).(O_4'''.O'_{14} - O'''_{14}.O_4')\\
&\qquad + (O_5'''.\vartheta_5 - O'''_{03}.\vartheta_{03}).(O_4'.O''_{14} - O'_{14}.O_4''),\\
&(O_0'.\vartheta_0 + O_2'.\vartheta_2).(O_4''.O'''_{14} - O''_{14}.O_4''') + (O_0''.\vartheta_0 + O_2''.\vartheta_2).(O_4'''.O'_{14} - O'''_{14}.O_4')\\
&\qquad + (O_0'''.\vartheta_0 + O_2'''.\vartheta_2).(O_4'.O''_{14} - O'_{14}.O_4'')\\
&= \quad O_5'.\vartheta_5.(O_4''.O'''_{14} - O''_{14}.O_4''') + \quad O_5''.\vartheta_5.(O_4'''.O'_{11} - O'''_{14}.O_4')\\
&\qquad + \quad O_5'''.\vartheta_5.(O_4'.O''_{14} - O'_{14}.O_4''),\\
&(O_0'.\vartheta_0 - O'_{12}.\vartheta_{12}).(O_4''.O'''_{14} - O''_{14}.O_4''') + (O_0''.\vartheta_0 - O''_{12}.\vartheta_{12}).(O_4'''.O'_{14} - O'''_{14}.O_4')\\
&\qquad + (O_0'''.\vartheta_0 - O'''_{12}.\vartheta_{12}).(O_4'.O''_{14} - O'_{14}.O_4'')\\
&= \quad O'_{03}.\vartheta_{03}.(O_4'''.O''_{14} - O'''_{14}.O_4'') + \quad O''_{03}.\vartheta_{03}.(O_4'.O'''_{14} - O'_{14}.O_4''')\\
&\qquad + \quad O'''_{03}.\vartheta_{03}.(O_4''.O'_{14} - O''_{14}.O_4').
\end{aligned}$$

So haben wir auch in diesem Falle einige elegante Relationen gefunden. Durch Differentiation lässt sich die Zahl derselben bis ins unendliche vermehren. Der Verfasser glaubt von der weiteren Aufstellung derselben um so eher absehen zu dürfen, als die Methoden keinerlei Aenderungen erfahren.

In ähnlicher Weise können nun Beziehungen zwischen je vier, fünf und sechs beliebigen Repräsentanten hergestellt werden. Es ergeben sich resp. 10, 5, 1 wesentlich von einander verschiedene Ausdrucksformen. Da die Fourier'schen Entwickelungen der repräsentirenden Thetafunctionen unmittelbar bekannt sind, so liefert der zweite Fall zu gleicher Zeit die Fourier'sche Entwickelung der Ausdrücke:

$$\vartheta_5^3(v_1, v_2);\ \vartheta_5(v_1, v_2).\vartheta_1^2(v_1, v_2);\ \vartheta_5(v_1, v_2).\vartheta_{02}^2(v_1, v_2);$$

$$\vartheta_5(v_1, v_2).\vartheta_{34}^2(v_1, v_2);\ \vartheta_1(v_1, v_2).\vartheta_{02}(v_1, v_2).\vartheta_{34}(v_1, v_2).$$

Allerdings nehmen die Coefficienten eine etwas complicirte Form an. Es empfiehlt sich unter solchen Umständen umgekehrt die ersten Glieder in der Fourier'schen Entwickelung der eben genannten Functionen auf irgend eine Weise zu bestimmen und diese dann zur Berechnung der Coefficienten anzuwenden. Im ersten Falle nehmen die Resultate noch eine ziemlich complicirte Form an, dagegen gestaltet sich die Berechnung im zweiten und dritten Falle höchst einfach. Wir beschränken uns hier auf den dritten Fall.

Es findet nach dem früheren jedenfalls eine Gleichung von der Form statt:

$$\begin{aligned}\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') &= e_1 . \vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}}{3}, \frac{\tau_{12}}{3}, \frac{\tau_{22}}{3}\right)\\ &+ e_2 . \vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}-8}{3}, \frac{\tau_{12}}{3}, \frac{\tau_{22}}{3}\right)\\ &+ e_3 . \vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}}{3}, \frac{\tau_{12}-8}{3}, \frac{\tau_{22}}{3}\right)\\ &+ e_4 . \vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}}{3}, \frac{\tau_{12}}{3}, \frac{\tau_{22}-8}{3}\right)\\ &+ e_5 . \vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}-8}{3}, \frac{\tau_{12}-8}{3}, \frac{\tau_{22}-8}{3}\right)\end{aligned}$$

wobei die Function auf der linken Seite einen beliebigen Repräsentanten bedeutet, welcher von den auf der rechten Seite stehenden verschieden ist.

Setzen wir:

$$p = e^{\pi i \tau_{11}}, \quad q = e^{\pi i \tau_{12}}, \quad r = e^{\pi i \tau_{22}},$$

so ist:

$$\begin{aligned}\vartheta_5(v_1, v_2) = 1 &+ 2\sum p^{m_1^2}.\cos 2\pi m_1 v_1 + 2\sum q^{m_2^2}.\cos 2\pi m_2 v_2\\ &+ 2\sum\sum p^{m_1^2}.\, q^{-2m_1m_2}.\, r^{m_2^2}.\cos 2\pi(m_1 v_1 - m_2 v_2)\\ &+ 2\sum\sum p^{m_1^2}.\, q^{+2m_1m_2}.\, r^{m_2^2}.\cos 2\pi(m_1 v_1 + m_2 v_2)\end{aligned}$$

wobei die Summationen nach m_1 und m_2 von 1 bis ∞ zu nehmen sind.

Wir wollen nun setzen:

$$\begin{aligned}\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') &= a_0 + a_1.\cos 2\pi v_1 + a_2.\cos 2\pi v_2\\ &+ a_3.\cos 2\pi(v_1 - v_2) + a_4.\cos 2\pi(v_1 + v_2) + \cdots,\end{aligned}$$

so sind die Grössen a in jedem Falle unmittelbar bekannt. Für die Constanten $e_1 \ldots e_5$ ergeben sich dann die Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned}e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 &= a_0,\\ 2p^{\frac{1}{3}}.(e_1 + \varepsilon.e_2 + e_3 + e_4 + \varepsilon.e_5) &= a_1,\\ 2r^{\frac{1}{3}}.(e_1 + e_2 + e_3 + \varepsilon.e_4 + \varepsilon.e_5) &= a_2,\end{aligned}$$

$$2p^{\frac{1}{3}}.q^{-\frac{2}{3}}.r^{\frac{1}{3}}.(e_1+\varepsilon.e_2+\varepsilon\ .e_3+\varepsilon.e_4+\ e_5)=a_3,$$

$$2p^{\frac{1}{3}}.q^{+\frac{2}{3}}.r^{\frac{1}{3}}.(e_1+\varepsilon.e_2+\varepsilon^2.e_3+\varepsilon.e_4+\varepsilon.e_5)=a_4.$$

Diese fünf Gleichungen lehren mit leichter Mühe die fünf gesuchten Coefficienten kennen, da ihre Form eine ungemein übersichtliche ist. In ihnen ist

$$\varepsilon = e^{-\frac{8\pi i}{3}}$$

gesetzt worden.

Wählen wir z. B. als Repräsentanten auf der linearen Seite:

$$\vartheta_5(3v_1,\ 3v_2,\ 3\tau_{11},\ 3\tau_{12},\ 3\tau_{22})$$

so nehmen die Gleichungen die Form an:

$$\begin{aligned}
e_1+\ e_2+\ e_3+\ e_4+\ e_5&=1,\\
e_1+\varepsilon.e_2+\ e_3+\ e_4+\varepsilon.e_5&=0,\\
e_1+\ e_2+\ e_3+\varepsilon.e_4+\varepsilon.e_5&=0,\\
e_1+\varepsilon.e_2+\varepsilon.e_3+\varepsilon.e_4+\ e_5&=0,\\
e_1+\varepsilon.e_2+\varepsilon^2.e_3+\varepsilon.e_4+\varepsilon.e_5&=0.
\end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich die Werthe:

$$e_1=-\frac{2(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon).(2+\varepsilon^2)},\qquad e_2=\frac{1+\varepsilon^2}{(1-\varepsilon).(2+\varepsilon^2)}=e_4,$$

$$e_3=-\frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon).(2+\varepsilon^2)},\qquad e_5=\frac{1}{(1-\varepsilon).(2+\varepsilon^2)}.$$

Uebersichtlicher und eleganter gestalten sich die Ausdrucksformen, wenn man nach linearen Relationen sucht, die nicht nur zwischen je sechs der 40 Repräsentanten sondern zwischen allen 40 Repräsentanten bestehen. Man erhält dann die Resultate von Herrn Wiltheiss.

§ 4.

Die Transformation geraden Grades, insbesondere die Transformation zweiten Grades.

Wir gehen jetzt zu der Transformation paaren Grades über. Die Untersuchungen gestalten sich hier nicht so einfach wie bei der Transformation unpaaren Grades, vielmehr treten hier mehrere von einander verschiedene Fälle auf, die einzeln behandelt werden müssen. Die Gründe, auf welchen diese Unterschiede beruhen, zeigen sich im wesentlichen schon bei der Transformation zweiten Grades, wenngleich einige neue Momente bei der allgemeinen paaren Transformation hinzutreten.

Die Transformation zweiten Grades nun ist in mannigfachen Arbeiten von Göpel, Königsberger, Pringsheim, Rohn, Borchardt, Caspary u. a. in ausgiebiger Weise behandelt worden. Wir wollen

unter solchen Umständen den Fall der paaren Transformation nicht vollständig durchführen, vielmehr uns damit begnügen die entwickelte Methode auf einen Fall derselben wirklich anzuwenden, während die andern Fälle unberücksichtigt bleiben sollen.

Wir wählen dieselben Ausdrücke zu Repräsentanten, nur sollen die Zahlen links von der Diagonalreihe nicht nothwendiger Weise durch acht theilbar sein.

Setzen wir:

$$\Pi(v_1, v_2)_\lambda = \vartheta_\lambda(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$$

wobei λ das Indicessystem μ, ν, p, q repräsentiren möge, so finden die Gleichungen statt:

$$\begin{aligned}
\Pi(v_1 + 1, v_2)_\lambda &= (-1)^{\mathfrak{m}} . \Pi(v_1, v_2)_\lambda, \\
\Pi(v_1, v_2 + 1)_\lambda &= (-1)^{\mathfrak{n}} . \Pi(v_1, v_2)_\lambda, \\
\Pi(v_1 + \tau_{11}, v_2 + \tau_{12})_\lambda &= (-1)^{\mathfrak{q}} . e^{-n\pi i(2v_1+\tau_{11})} \Pi(v_1, v_2)_\lambda, \\
\Pi(v_1 + \tau_{12}, v_2 + \tau_{22})_\lambda &= (-1)^{\mathfrak{p}} . e^{-n\pi i(2v_2+\tau_{22})} \Pi(v_1, v_2)_\lambda,
\end{aligned}$$

wobei:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m} &= a_0 . \mu, \\
\mathfrak{n} &= b_0 . \mu + b_1 . \nu, \\
\mathfrak{p} &= c_0 . \mu + c_1 . \nu + c_2 . p + c_1 . c_2, \\
\mathfrak{q} &= d_0 . \mu + d_1 . \nu + d_2 . p + d_3 . q + d_0 . d_3 + d_1 . d_2
\end{aligned}$$

ist.

Es ergeben sich nun eine Reihe wesentlich von einander verschiedener Fälle, je nach dem Verhalten der Grössen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ nach dem Modul zwei.

Wir wollen lediglich den einen Fall betrachten, dass sämmtliche Zahlen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ durch 2 theilbar sind und auch diesen nicht in voller Ausführlichkeit.

Wir fragen zunächst, giebt es immer Zahlen μ, ν, p, q welche die soeben genannten Bedingungen erfüllen, welches ist ihre Anzahl und wie findet man dieselben?

Die Frage ist offenbar identisch mit der Frage nach der Auflösung der Congruenzen:

$$\begin{aligned}
0 &\equiv a_0 . x, \\
0 &\equiv b_0 . x + b_1 . y, \\
0 &\equiv c_0 . x + c_1 . y + c_2 . z + c_1 . c_2, \\
0 &\equiv d_0 . x + d_1 . y + d_2 . z + d_3 . w + d_0 . d_3 + d_1 . d_2
\end{aligned}$$

wobei die Bedingungsgleichungen bestehen:

$$\begin{aligned}
c_0 . d_3 + c_1 . d_2 - c_2 . d_1 &= 0, \\
b_0 . d_3 + b_1 . d_2 &= 0, \\
a_0 . d_3 + b_1 . c_2 &= n.
\end{aligned}$$

Es werden nun mehrere Fälle eintreten können. Erstens giebt es Repräsentanten, für welche alle Indicessysteme (x, y, z, w) oder was dasselbe sagt (μ, ν, p, q) diesen Congruenzen Genüge leisten. Es sind dieses die Repräsentanten, bei denen alle Transformationszahlen durch 2 theilbar sind. Zweitens giebt es Repräsentanten, für welche acht Indicessysteme den obigen Congruenzen genüge leisten. Es sind dieses z. B. diejenigen Repräsentanten, bei denen die sämmtlichen Transformationszahlen in drei Horizontal- oder Verticalreihen durch 2 theilbar sind, oder aber bei denen die Transformationszahlen in zwei Horizontalreihen durch zwei theilbar sind, während sie in den beiden andern einander congruent nach dem Modul zwei sind. Es würden hierfür Beispiele die Repräsentanten sein, deren Zahlen nach dem Modul zwei resp. gleich sind.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

also etwa für $n = 12$ die Repräsentanten

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & +1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Zu ihnen gehören die Indicessysteme:

0000, 1000, 0100, 0010, 1100, 1010, 0110, 1110

resp. 1000, 0100, 0010, 1001, 0101, 0011, 1110, 1111

oder was dasselbe sagt, die Thetafunctionen mit den Indices:

5, 01, 4, 34, 23, 2, 3, 24

resp. 01, 4, 34, 02, 03, 0, 24, 14.

Diese Repräsentanten bilden eine Eigenthümlichkeit der Zahlen, die mindestens durch die 2te Potenz von 2 theilbar sind und verdienen daher besondere Berücksichtigung. Endlich giebt es Repräsentanten, zu denen lediglich vier Lösungen des obigen Congruenzsystems gehören.

Wir greifen aus ihnen diejenigen heraus, die für die Folge von Bedeutung sind.

Für die Repräsentanten, die nach dem Modul 2 die Form haben:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ergeben sich die Indices 5, 01, 4, 23. Für die Repräsentanten:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i'' & 0 & -i & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ i & i''' & 0 & 0 \\ i'' & i & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

resp. die Thetafunctionen mit den Indices 5, 01, 34, 2; 5, 4, 12, 03; 5, 34, 12, 0.

Die auf diese Weise gefundenen Repräsentanten zerfallen dann von selbst in zwei Categorien, die gesondert betrachtet werden müssen. Die eine Categorie enthält die geraden, die andere die ungeraden Thetafunctionen. Die Zahl der einen wie der andern ist unmittelbar anzugeben. In dem Falle nun, dass die Grössen μ, ν, p, q eine ungerade Thetafunction definiren, können die Göpel'schen Quadrupel nicht mehr gebraucht werden. An ihre Stelle treten vielmehr Quadrupel, welche bei bekannter Bezeichnungsweise die Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} &\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 0, \\ &\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 0, \\ &p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0, \\ &q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0, \\ &s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 1, \quad s_i = \mu_i . q_i - \nu_i . p_i . \end{aligned}$$

Wir wollen diesen Fall nicht weiter in Betracht ziehen, beschränken uns vielmehr auf die geraden Thetafunctionen μ, ν, p, q, für welche die dazu gehörenden Grössen $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ sämmtlich Null sind. Ist die Transformationszahl von der Form $2m$, wo m eine ungerade Zahl ist und nennen wir die Zahl der zu m gehörenden Repräsentanten r, so ist die Zahl der definirten Thetafunctionen gleich 60 r und ebenso einfach kann dieselbe im allgemeinsten Falle bestimmt werden. Wir wollen sie mit R bezeichnen. Dann folgt leicht, dass alle diese Functionen $\frac{n^2}{2} + 2$ willkürliche Constanten enthalten.

Denken wir uns nun ein beliebiges Göpel'sches Quadrupel herausgegriffen (a, b, c, d) und bilden den Ausdruck:

$$\vartheta_a^\alpha(v_1, v_2) . \vartheta_b^\beta(v_1, v_2) . \vartheta_c^\gamma(v_1, v_2) . \vartheta_d^\delta(v_1, v_2),$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = n, \quad \beta + \delta = 0, \quad \gamma + \delta = 0,$$

so genügt er denselben Bedingungsgleichungen, wie unsere repräsentirenden Thetafunctionen. Nehmen wir die Bedingung $\delta < 4$ hinzu, so erhalten wir gerade $\frac{n^2}{2} + 2$ linear von einander unabhängige Ausdrücke.

Hieraus ergiebt sich der Satz:

Eine jede der R vorhin definirten transformirten Thetafunctionen hat die Form:

$$\vartheta_a(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = \sum e_{\alpha\beta\gamma\delta} . \vartheta_a{}^\alpha(v_1, v_2) . \vartheta_b{}^\beta(v_1, v_2) . \vartheta_c{}^\gamma(v_1, v_2) . \vartheta_d{}^\delta(v_1, v_2),$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = n, \quad \beta + \delta = 0, \quad \delta < 4.$$

Damit ist der Hauptsatz abgeleitet. Die übrigen Betrachtungen können ganz analog, wie im Falle der unpaaren Transformation angestellt werden.

Sind zwei beliebige der vorhin definirten Thetafunctionen vorgelegt, so besteht zwischen ihnen eine Relation:

$$\vartheta_a(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = e_1 . \vartheta_\beta(v_1'', v_2'', \tau_{11}'', \tau_{12}'', \tau_{22}'')$$
$$+ \sum{}' e_{\alpha\beta\gamma\delta} . \vartheta_a{}^\alpha(v_1, v_2) . \vartheta_b{}^\beta(v_1, v_2) . \vartheta_c{}^\gamma(v_1, v_2) . \vartheta_d{}^\delta(v_1, v_2),$$

wobei die Summe über alle früheren Ausdrücke mit Ausnahme eines einzigen auszudehnen ist. Die Zahl der von einander verschiedenen Ausdrucksformen ist gleich $\frac{n^2}{2} + 2$.

Ebenso folgt, dass zwischen je drei der R repräsentirenden Thetafunctionen lineare Beziehungen hergestellt werden können, welche gleich einer Summe von $\frac{n^2}{2}$ Gliedern der ursprünglichen Art sind u. s. f. Wir können schliesslich so sagen: Zwischen den R definirten Thetafunctionen bestehen $R - \frac{n^2}{2} - 2$ lineare Gleichungen. Es lassen sich ferner aus ihnen $\frac{n^2}{2} + 2$ Ausdrücke linear zusammensetzen, welche gleich einem der $\frac{n^2}{2} + 2$ Ausdrücke $\vartheta_a{}^\alpha(v_1, v_2) . \vartheta_b{}^\beta(v_1, v_2) . \vartheta_c{}^\gamma(v_1, v_2) . \vartheta_d{}^\delta(v_1, v_2)$ sind, vorausgesetzt, dass die früher angegebenen Bedingungen erfüllt werden.

Die Coefficientenbestimmung kann ähnlich wie im Falle der ungeraden Transformation vorgenommen werden. Bei der wirklichen Berechnung tritt insofern eine Complicirung ein, als es nicht mehr möglich ist von der Thetafunction mit dem Index α durch Substitution halber Perioden zu einer Thetafunction mit einem beliebigen andern Index β überzugehen. Die Constanten sind demnach nicht mehr in sechszehn Gleichungen dieselben, sondern wie eine leichte Betrachtung zeigt, höchstens in vier. Das Princip bleibt aber hierbei ungeändert. Als Beispiel behandeln wir in aller Kürze den Fall $n = 2$.

Für ihn folgt, dass die 60 Functionen:

$$\vartheta_a(2v_1, 2v_2, 2\tau_{11}, 2\tau_{12}, 2\tau_{22}) \qquad \alpha : 5, 01, 4, 23,$$
$$\vartheta_\beta\left(2v_1, v_2, 2\tau_{11}, \tau_{12}, \frac{\tau_{22} - i}{2}\right) \quad \beta : 5, 01, 34, 2.$$

$$\vartheta_\gamma\left(v_1+iv_2, 2v_2, \frac{-i_1+\tau_{11}+2i\tau_{12}+i^2\tau_{22}}{2}, \tau_{12}+i\tau_{12}, 2\tau_{22}\right);\quad \gamma{:}5,\ 4,\ 12,\ 03,$$

$$\vartheta_\delta\left(v_1, v_2, \frac{-i_1+\tau_{11}}{2}, \frac{-i+\tau_{12}}{2}, \frac{-i_2+\tau_{22}}{2}\right);\quad \delta : 5,\ 34,\ 12,\ 0$$

sich sämmtlich linear durch die Quadrate der nämlichen vier Thetafunctionen ausdrücken lassen, zwischen denen eine Göpel'sche Relation besteht.

Wählen wir z. B. das Quadrupel 5, 34, 12, 0, so ergeben sich nach leichten Rechnungen die Beziehungen:

$$4O_5.\vartheta_5(2v_1, 2v_2, 2\tau_{11}, 2\tau_{12}, 2\tau_{22})$$
$$=\vartheta_0^2(v_1, v_2)+\vartheta_5^2(v_1, v_2)+\vartheta_{34}^2(v_1, v_2)+\vartheta_{12}^2(v_1, v_2),$$

$$2O_5.\vartheta_5\left(2v_1, v_2, 2\tau_{11}, \tau_{12}, \frac{\tau_{22}}{2}\right).(\vartheta_2^4-\vartheta_{01}^4)$$
$$=(\vartheta_{23}^2.\vartheta_2^2+\vartheta_{14}^2.\vartheta_{01}^2).(\vartheta_0^2(v_1, v_2)+\vartheta_{34}^2(v_1, v_2))$$
$$+(\vartheta_2^4-\vartheta_{01}^4-\vartheta_{14}^2.\vartheta_2^2-\vartheta_{23}^2.\vartheta_{01}^2).(\vartheta_5^2(v_1, v_2)+\vartheta_{12}^2(v_1, v_2)),$$

$$2O_5.\vartheta_5\left(v_1, 2v_2, \frac{\tau_{11}}{2}, \tau_{12}, 2\tau_{22}\right).(\vartheta_2^4-\vartheta_{01}^4)$$
$$=(\vartheta_{23}^2.\vartheta_{03}^2+\vartheta_4^2.\vartheta_{14}^2).(\vartheta_0^2(v_1, v_2)+\vartheta_{12}^2(v_1, v_2)$$
$$+(\vartheta_2^4-\vartheta_{01}^4-\vartheta_{23}^2.\vartheta_4^2-\vartheta_{03}^2.\vartheta_{14}^2).(\vartheta_5^2(v_1, v_2)+\vartheta_{34}^2(v_1, v_2)),$$

$$O_5.\vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}\right).(\vartheta_2^4-\vartheta_{01}^4)$$
$$=(\vartheta_{14}^2.\vartheta_4^2+\vartheta_{14}^2.\vartheta_{01}^2-\vartheta_2^2.\vartheta_{03}^2).\vartheta_0^2(v_1, v_2)$$
$$+(\vartheta_2^4-\vartheta_{01}^4-\vartheta_4^2.\vartheta_{01}^2-\vartheta_{23}^2.\vartheta_{01}^2-\vartheta_{23}^2.\vartheta_4^2).\vartheta_5^2(v_1, v_2)$$
$$+(\vartheta_4^2.\vartheta_2^2+\vartheta_{23}^2.\vartheta_2^2-\vartheta_{14}^2.\vartheta_{03}^2).\vartheta_{34}^2(v_1, v_2)$$
$$+(\vartheta_{23}^2.\vartheta_{03}^2+\vartheta_{01}^2.\vartheta_{03}^2-\vartheta_{14}^2.\vartheta_2^2).\vartheta_{12}^2(v_1, v_2).$$

Die übrigen Ausdrücke für die transformirten Thetafunctionen mit dem Index 5 ergeben sich aus den hier stehenden mit Hülfe der linearen Transformationen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

welche das Quadrupel (0, 5, 34, 12) von der Reihenfolge der Thetafunctionen abgesehen, in sich überführt. Ebenso einfach sind die Ausdrücke für die übrigen 45 transformirten Thetafunctionen aus den obigen abzuleiten.

Es könnten nun Relationen zwischen je zwei, drei, vier der 60 Repräsentanten und den ursprünglichen Thetafunctionen abgeleitet werden. Der letzte Fall giebt die Fourier'schen Entwickelungen der Quadrate der ursprünglichen Thetafunctionen und ist mehrfach behandelt worden, wenn auch nicht unter dem hier aufgestellten allgemeinen Gesichtspunkt. Schliesslich ergeben sich zwischen je fünf der genannten Thetafunctionen lineare Beziehungen. Die Coefficientenbestimmung erfolgt auch hier am besten mit Hülfe der Fourier'schen Reihenentwickelung.

Ist $\vartheta_\alpha(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$ eine beliebige der 60 definirten Functionen, so findet z. B. immer eine Gleichung von der Form statt:

$$\begin{aligned}\vartheta_\alpha(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = e_1 . \vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}-1}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}\right)\\ + e_2 . \vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}-1}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}\right)\\ + e_3 . \vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{22}-1}{2}\right)\\ + e_4 . \vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}\right).\end{aligned}$$

Setzen wir:

$$\begin{aligned}\vartheta_\alpha(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = a_0 + a_1 . \cos 2\pi v_1 + a_2 . \cos 2\pi v_2\\ + a_3 . \cos 2\pi(v_1 + v_2) + \cdots\end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned}2(\quad e_1 + e_2 + \quad e_3 + e_4) &= a_0,\\ 2p^{\frac{1}{2}} . (-ie_1 + e_2 + \quad e_3 + e_4) &= a_1,\\ 2q^{\frac{1}{2}} . (\quad e_1 + e_2 - ie_3 + e_4) &= a_2,\\ 2p^{\frac{1}{2}} . q . r^{\frac{1}{2}} . (-ie_1 - e_2 - ie_3 + e_4) &= a_3,\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist unmittelbar auflösbar. So ergeben sich u. a. die Beziehungen:

$$\begin{aligned}2\vartheta_5(2v_1, 2v_2, 2\tau_{11}, 2\tau_{12}, 2\tau_{22}) = (1-i) . \vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}-1}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}\right)\\ - \vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}-1}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}\right)\\ + (1-i) . \vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{22}-1}{2}\right)\\ + (2i+1) . \vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}\right),\end{aligned}$$

$$2\vartheta_{23}(2v_1, 2v_2, 2\tau_{11}, 2\tau_{12}, 2\tau_{22}) = -\vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}-1}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}\right) + \vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}\right),$$

$$2\vartheta_{01}(2v_1, 2v_2, 2\tau_{11}, 2\tau_{12}, 2\tau_{22}) = \vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}-1}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}\right) - (1-i).\vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{22}-1}{2}\right) - i.\vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}\right),$$

$$2\vartheta_4(2v_1, 2v_2, 2\tau_{11}, 2\tau_{12}, 2\tau_{22}) = -(1-i).\vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}-1}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}\right) + \vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}-1}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}\right) - i.\vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}\right).$$

Einfacher und übersichtlicher würden sich die Formeln gestalten, wenn wir nicht nur zwischen je fünf, sondern zwischen sämmtlichen 60 repräsentirenden Thetafunctionen Beziehungen gesucht hätten, indessen glaubt der Verfasser hiervon absehen zu dürfen.

Warnemünde, September 1884.

Ueber die algebraischen Charakteristiken der hyperelliptischen Thetafunctionen.

Von

Otto Staude in Breslau.

Die Riemann'schen Charakteristiken der 16 Thetafunctionen zweier Veränderlicher können als *transcendente* Charakteristiken bezeichnet werden, insofern sie die Entstehung der abgeleiteten Thetafunctionen aus einer Fundamentalthetafunction durch Aenderung der Argumente der letzteren um Halbe der zusammengehörigen Periodicitätsmoduln (transcendenten Moduln) andeuten. Demgegenüber kann man *algebraische* Charakteristiken diejenigen nennen, durch welche eine *Vertheilungsart* der 16 Thetafunctionen auf die 6 Verzweigungspunkte (algebraischen Moduln) einer zweiblättrigen Riemann'schen Fläche vom Geschlecht 2 zum Ausdrucke gebracht wird. Diese Unterscheidung schliesst nicht aus, dass es Charakteristiken giebt, in welche sich *gleichzeitig* jene beiden Beziehungen hineinlegen lassen.

In einer Abhandlung „Ueber die Parameterdarstellung der Verhältnisse der Thetafunctionen zweier Veränderlicher"*) habe ich *eine doppelte Form algebraischer Charakteristikenbezeichnung* der 16 Thetafunctionen erwähnt**). Bei der einen sind die Indices (Charakteristiken) von *sechs* Thetafunctionen bezüglich die 6 Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, während jeder der *zehn* übrigen Thetafunctionen eine der 10 Eintheilungen dieser 6 Zahlen in 2 Tripel beigeschrieben wird; bei der anderen erhält *eine* Thetafunction keinen, die *fünfzehn* übrigen aber je 2 verschiedene jener 6 Zahlen als Indices. Diese doppelte Bezeichnung entspricht einer doppelten Vertheilungsart der 16 Thetafunctionen auf die 6 Verzweigungspunkte a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 des hyperelliptischen Gebildes. Das eine Mal ist jedem einzelnen Verzweigungspunkte und ausserdem jeder Gruppirung der 6 Verzweigungspunkte in 2 Tripel je eine Thetafunction zugeordnet; das andere Mal gehören 15 Thetafunctionen bezüglich zu den 15 Paaren zweier verschiedener der 6 Verzweigungspunkte und die eine noch übrige Thetafunction zu keinem oder, wenn man will, zu allen 6 Verzweigungspunkten.

Es ist *die Absicht der vorliegenden Arbeit* diese beiden Gruppirungen der 16 Thetafunctionen und 6 Verzweigungspunkte in ihrer Bedeutung

*) Diese Annalen, Bd. 24, S. 281 ff. (Die Abhandlung ist im Verlaufe des vorliegenden Textes unter „P. D." citirt).

**) P. D. § 10.

und wechselseitigen Beziehung zu behandeln und dieselben aus dem *Abel'schen Additionstheorem als ihrer gemeinsamen Quelle* hervorgehen zu lassen.

Die Betrachtungen des *I. Kapitels*, welche die Bedeutung *der algebraischen Charakteristiken der* 1. (oben erwähnten) *Art* begründen sollen, haben eine zweifache Grundlage, die Rosenhain'sche Parameterdarstellung*) der 16 Thetafunctionen (§ 1, I) einerseits und ein System von 16 einfachsten Additionstheoremen hyperelliptischer Integrale (§ 3, A_1, A_2) andererseits. Auf diese zweifache Grundlage stützt sich *die Beziehung***) *zwischen den Nullpunkten der* 16 *Thetafunctionen und den* 16 *Additionstheoremen hyperelliptischer Integrale* (§ 3, I), welche den folgenden Untersuchungen als wesentliches Hilfsmittel dient. Mit Anwendung desselben ergiebt sich unter anderen, dass aus der algebraischen Charakteristik 1. Art einer Thetafunction unmittelbar abzulesen ist, welche Form man den Argumenten der Thetafunction geben muss, damit dieselbe, als Function einer Stelle des hyperelliptischen Gebildes betrachtet, für 2 beliebig gegebene andere Stellen verschwindet (§ 4, II).

Während als Merkmal des I. Kapitels die Rosenhain'sche Parameterdarstellung mit ihrer Gruppirung der 16 Thetafunctionen zu 6 und 10 zu betrachten ist, prägt sich die Bedeutung des *II. Kapitels* besonders in der Prym'schen Parameterdarstellung der Thetafunction***) (§ 6, I) aus, bei welcher die Gruppirung der 16 Thetafunctionen zu 1 und 15 *den Charakteristiken der* 2. (oben erwähnten) *Art* entspricht. Diese Parameterdarstellung ergiebt sich in einfacher Weise, nachdem die Beziehung der Nullpunkte der Thetafunctionen zu den algebraischen Charakteristiken 2. Art in demselben Sinne hergestellt ist (§ 5, II), wie es zuvor mit Bezug auf die Charakteristiken 1. Art geschehen war (§ 4, II).

Im Anschluss an die Resultate der §§ 1—6 zeigt § 7 in den Sätzen I und II, wie die Rosenhain'sche und Prym'sche Parameterdarstellung bezüglich als Repräsentanten zweier Systeme von je 16 coordinirten Parameterdarstellungen zu betrachten sind; das eine dieser beiden Systeme dient zur Lösung der 16 Jacobi'schen Umkehrprobleme (§ 7, 28), das andere der 16 Riemann'schen Umkehrprobleme

*) Rosenhain, Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, Mémoires présentés par divers savants, Bd. XI, S. 422, Formeln (97).

**) Begründet ist dieselbe in der allgemeinen Beziehung der Nullpunkte der Thetafunctionen zu den additiven Constanten ihrer Argumente, vgl. Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen, Art. 22, ferner C. Neumann, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale, 2. Aufl. (Leipzig 1884), Satz auf S. 367.

***) Prym, Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen, Denkschriften der Wiener Academie, Bd. 24, S. 57, Formeln (F).

(§ 7, 29) der hyperelliptischen Integrale 1. Ordnung; der Gegensatz dieser beiden Systeme von Umkehrproblemen geht wiederum dem Gegensatz der algebraischen Charakteristiken 1. und 2. Art parallel. Das Ergebniss der beiden ersten Kapitel liegt, allgemein zu reden, in dem Nachweise, *dass zwischen der doppelten Gruppirung der* 16 *Thetafunctionen zu* 6 *und* 10 *und zu* 1 *und* 15, *damit aber auch zwischen den Charakteristiken* 1. *und* 2. *Art eine durchgehende Gleichberechtigung besteht*, die in der Bestimmung der Nullpunkte und der algebraischen Parameterdarstellung der Thetafunctionen, sowie in den 32 verschiedenen Formen des Umkehrproblems der hyperelliptischen Integrale 1. Ordnung zum Ausdrucke gelangt.

Dieses vorläufige Ergebniss erhält seinen Abschluss durch das *III. Kapitel*, welches zeigt, *dass jene doppelte Gruppirung und keine andere vorgebildet ist in dem allgemeinen Abel'schen Additionstheorem der einer zweiblättrigen Riemann'schen Fläche mit* 6 *Verzweigungspunkten zugehörigen hyperelliptischen Integrale.* Betrachtet man nämlich das Problem der Addition einer bestimmten Anzahl hyperelliptischer Integrale 1. Ordnung mit variablen oberen und constanten unteren Grenzen, so ergiebt sich bei allen möglichen Auswahlen der unteren Grenzen aus den 6 Verzweigungspunkten des hyperelliptischen Gebildes immer ein System von 16 untereinander verschiedenen Additionstheoremen. In einem derartigen System aber herrscht stets die eine oder andere der beiden Gruppirungen der 16 Elemente des Systems zu 6 und 10 oder zu 1 und 15 vor, jenachdem die Anzahl der zu addirenden Integrale ungerade oder gerade ist (§ 8). Andererseits kann die Bestimmung der Nullpunkte der 16 Thetafunctionen, deren Argumente Summen von ein, zwei oder mehr Integralen 1. Gattung sind, auf die Lösung eines derartigen Systems von Additionstheoremen zurückgeführt werden. Somit übertragen sich die zwei den Additionstheoremen eigenthümlichen Gruppirungen zunächst auf die Nullpunkte der 16 Thetafunctionen; für die Bestimmung derselben ist die eine oder andere Gruppirung maassgebend, jenachdem die Argumente Summen aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von Integralen sind (§ 9). In entsprechender Weise aber beherrscht die doppelte Gruppirung die ganze Reihe von Folgerungen, die sich an die Bestimmung der Nullpunkte der Thetafunctionen anschliessen, in demselben Umfange, in welchem man die zweiblättrige Riemann'sche Fläche mit 6 Verzweigungspunkten als Normalform des hyperelliptischen Gebildes zu Grunde legt. Diesem Gedankengang des III. Kapitels dienen die Betrachtungen der beiden vorangehenden nicht blos als Grundlage; vielmehr enthalten sie zugleich die beiden einfachsten Fälle, in denen die allgemeinen Resultate des III. Kapitels zur Anschauung gelangen. Weil nämlich bei der Rosenhain'schen und Prym'schen Parameterdar-

stellung der Thetafunctionen die letzteren bezüglich von *zwei* oder von *einer* variablen Stelle des hyperelliptischen Gebildes abhängen, so zeigt sich in diesen beiden einfachsten Parameterdarstellungen bereits der Gegensatz der beiderlei algebraischen Charakteristiken in derselben Weise, wie er sich weiterhin bei der ganzen Reihe von Parameterdarstellungen wiederfindet, bei denen die Argumente der Thetafunctionen von *mehr als zwei* variablen Stellen abhängen. Die Reihe dieser Parameterdarstellungen ist in §§ 10—12 soweit entwickelt, als sie zur Lösung der 32 Umkehrprobleme der hyperelliptischen Integrale 1. Ordnung erfordert wird.

Mit den Untersuchungen des III. Kapitels ist gleichzeitig darauf hingewiesen, dass sich auch für die hyperelliptischen Thetafunctionen *höherer* Ordnung eine Theorie der algebraischen Charakteristiken auf das Abel'sche Theorem begründen lässt.

Kapitel I.

Die algebraischen Charakteristiken erster Art.

§ 1.

Die Rosenhain'sche Parameterdarstellung der 16 Thetafunctionen.

In dem hyperelliptischen Gebilde 1. Ordnung

$$s^2 = (a_0 - z)(a_1 - z)(a_2 - z)(a_3 - z)(a_4 - z)(a_5 - z)$$

werden zwei überall endliche Integrale:

$$(1) \qquad u_1 = \int_{z_2, -s_2}^{z_1, s_1} \frac{(z - g_1)\,dz}{2s}, \qquad u_2 = \int_{z_2, -s_2}^{z_1, s_1} \frac{(z - g_2)\,dz}{2s},$$

angenommen*), welche sich durch die gegebenen Constanten g_1 und g_2 von einander unterscheiden. Zur Abkürzung wird

$$(1) \qquad \frac{(z - g_1)\,dz}{2s} = dw_1, \qquad \frac{(z - g_2)\,dz}{2s} = dw_2$$

gesetzt.

Die gemeinsame Bahn der beiden Integrale u_1, u_2 erstreckt sich zwischen zwei beliebigen Stellen z_2, $-s_2$ und z_1, s_1 des hyperelliptischen Gebildes z, s; die Abhängigkeit von den Stellen z_1, s_1 und z_2, s_2 ist eine symmetrische, insofern mit Bezug auf Vielfache der zusammengehörigen Periodicitätsmoduln der beiden Integrale die Congruenzen bestehen:

---

*) Vgl. über diese Integralform Weber, Ueber die Kummer'sche Fläche 4. Ordnung mit 16 Knotenpunkten und ihre Beziehung zu den Thetafunctionen mit 2 Veränderlichen, Crelle's Journal, Bd. 84, S. 339 (1877).

$$(2)\qquad \int\limits_{z_2,-s_2}^{z_1,s_1} dw_{\mathrm{r}} \equiv \int\limits_{z_1,-s_1}^{z_2,s_2} dw_1,\quad \int\limits_{z_2,-s_2}^{z_1,s_1} dw_2 \equiv \int\limits_{z_1,-s_1}^{z_2,s_2} dw_2,$$

oder auch, unter a_i einen der 6 Verzweigungspunkte des hyperelliptischen Gebildes verstanden, die Congruenzen*):

$$(2)\quad \int\limits_{z_2,-s_2}^{z_1,s_1} dw_1 \equiv \int\limits_{a_i}^{z_1,s_1} dw_1 + \int\limits_{a_i}^{z_2,s_2} dw_1,\quad \int\limits_{z_2,-s_2}^{z_1,s_1} dw_2 \equiv \int\limits_{a_i}^{z_1,s_1} dw_2 + \int\limits_{a_i}^{z_2,s_2} dw_2.$$

Mit Rücksicht hierauf mögen die Integrale u_1, u_2, auch wenn sie in der Form (1) geschrieben sind, nicht als Functionen von z_1, s_1 und $z_2, -s_2$, sondern von z_1, s_1 und z_2, s_2 behandelt werden.

Zwei Stellen von der Form z, s und $z, -s$ sollen *zwei einander entgegengesetzte Stellen* des Gebildes z, s heissen.

Die Integrale u_1, u_2 führe man nun in die Thetafunction zweier Variabler:

$$\vartheta(v_1, v_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_2}\, e^{a_{11}n_1^2 + 2a_{12}n_1n_2 + a_{22}n_2^2 + 2n_1v_1 + 2n_2v_2}$$

in der Weise ein, dass man

$$v_1 = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2,$$
$$v_2 = \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2$$

setzt und alsdann die Function $\vartheta(v_1, v_2)$ mit $\Theta(u_1, u_2)$ bezeichnet. Dabei seien die Constanten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ nach den von Rosenhain begründeten Anschauungen, wie ich sie P. D. § 4 dargelegt habe, bestimmt oder um die Riemann'sche Terminologie zu brauchen**), in der Weise bestimmt, dass v_1, v_2 ein Paar von Normalintegralen werden. Wie die Fundamentalfunction $\vartheta(v_1, v_2)$ durch $\Theta(u_1, u_2)$, so ersetze man auch die in bekannter Weise aus jener abgeleiteten 15 Functionen $\vartheta_{i\varkappa}(v_1, v_2)$ durch entsprechende Functionen $\Theta_{i\varkappa}(u_1, u_2)$.

Zur Unterscheidung der 16 Thetafunctionen von einander sollen im Folgenden, je nach den gerade leitenden Gesichtspunkten der Betrachtung, die algebraischen Charakteristiken 1. Art oder 2. Art (vgl. die Einleitung) verwendet werden. Der Zusammenhang dieser Bezeichnungsweisen mit der Riemann'schen und Weierstrass'schen Bezeichnung findet sich P. D. § 1 und § 10 angegeben; die Beziehung der algebraischen Charakteristiken 1. und 2. Art zu einander giebt die

---

*) Vgl. Prym, Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche, Denkschriften der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft, Bd. 22, S. 15 (1866).

**) Vgl. Prym, Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen, Denkschriften der Wiener Academie, Bd. 24, S. 28 (1864).

folgende Tabelle (P. D. § 10), bei der die gemeinsamen Argumente u_1, u_2 der Functionen weggelassen sind:

$$
(3)\left\{\begin{array}{lll}
 & \Theta_0 = \Theta_{24}, & \Theta_1 = \Theta_{35}, \\
 & \Theta_2 = \Theta_{40}, & \Theta_3 = \Theta_{51}, \\
 & \Theta_4 = \Theta_{02}, & \Theta_5 = \Theta_{13}, \\
 & \Theta_{\substack{024\\135}} = \Theta, & \\
\Theta_{\substack{124\\035}} = \Theta_{01}, & \Theta_{\substack{140\\235}} = \Theta_{21}, & \Theta_{\substack{102\\435}} = \Theta_{41}, \\
\Theta_{\substack{324\\051}} = \Theta_{03}, & \Theta_{\substack{340\\251}} = \Theta_{23}, & \Theta_{\substack{302\\451}} = \Theta_{43}, \\
\Theta_{\substack{524\\013}} = \Theta_{05}, & \Theta_{\substack{540\\213}} = \Theta_{25}, & \Theta_{\substack{502\\413}} = \Theta_{45}.
\end{array}\right.
$$

Die *Reihenfolge* der 3 Zahlen eines Tripels bei den Charakteristiken 1. Art und der beiden Zahlen eines Paares bei denen 2. Art ist hierbei ohne Bedeutung. Die 6 zuerst aufgeführten Functionen sind die 6 *ungeraden*, die 10 anderen die 10 *geraden* Thetafunctionen der Argumente u_1, u_2.

Dieselben beiderlei Charakteristiken, wie sie in (3) für die 16 Thetafunctionen zusammengestellt sind, sollen auch zur Bezeichnung der 16 *Sigmafunctionen* dienen, welche P. D. § 8 definirt sind und sich von den entsprechenden Thetafunctionen je nur um einen constanten Factor unterscheiden.

Dies festgesetzt, können die Verhältnisse der Quadrate der 16 *σ-Functionen in ihrer Abhängigkeit von den Grenzstellen z_1, s_1 und z_2, s_2 der Integrale u_1, u_2, welche ihre Argumente bilden, also dargestellt werden:**)

$$
(\mathrm{I})\left\{\begin{array}{l}
\sigma_\lambda^2(u_1, u_2) = \varphi^2 (z_1 - z_2)^2 (a_\lambda - z_1)(a_\lambda - z_2) \\
\sigma^2_{\substack{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\\ \lambda_3\lambda_4\lambda_5}}(u_1, u_2) = \varphi^2 \begin{vmatrix} \sqrt{(a_{\lambda_0}-z_1)(a_{\lambda_1}-z_1)(a_{\lambda_2}-z_1)} & \sqrt{(a_{\lambda_0}-z_2)(a_{\lambda_1}-z_2)(a_{\lambda_2}-z_2)} \\ \sqrt{(a_{\lambda_3}-z_1)(a_{\lambda_4}-z_1)(a_{\lambda_5}-z_1)} & \sqrt{(a_{\lambda_3}-z_2)(a_{\lambda_4}-z_2)(a_{\lambda_5}-z_2)} \end{vmatrix}^2;
\end{array}\right.
$$

hier ist φ^2 ein Proportionalitätsfactor, bedeutet λ eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 *und bedeuten λ_0, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 dieselben* 6 *Zahlen in irgend welcher Reihenfolge.*

Die vorkommenden Quadratwurzeln sind bezüglich ihrer Zweideutigkeit für $i = 1, 2$ der Bedingung:

$$2\sqrt{(a_{\lambda_0} - z_i)(a_{\lambda_1} - z_i)(a_{\lambda_2} - z_i)}\sqrt{(a_{\lambda_3} - z_i)(a_{\lambda_4} - z_i)(a_{\lambda_5} - z_i)} = s_i$$

zu unterwerfen. Man wird sich also bei gegebenem z_i, s_i die Vorzeichen der 12 einfachen Quadratwurzeln $\sqrt{a_\lambda - z_i}$ den beiden Bedingungen

*) P. D. § 9.

$$\sqrt{a_0-z_i}\,\sqrt{a_1-z_i}\,\sqrt{a_2-z_i}\,\sqrt{a_3-z_i}\,\sqrt{a_4-z_i}\,\sqrt{a_5-z_i}=s_i\,,\quad i=1,2,$$

entsprechend, aber übrigens beliebig angenommen denken, und hat alsdann unter

$$\sqrt{(a_{\lambda_0}-z_i)\,(a_{\lambda_1}-z_i)\,(a_{\lambda_2}-z_i)}$$

für jede Auswahl der 3 Zahlen $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ aus der Reihe 0, 1, 2, 3, 4, 5 das Product

$$\sqrt{a_{\lambda_0}-z_i}\,\sqrt{a_{\lambda_1}-z_i}\,\sqrt{a_{\lambda_2}-z_i}$$

zu verstehen (vgl. auch unten § 12).

Zur Abkürzung sei im Folgenden allgemein

$$(4)\qquad (a_{\lambda_0}-z_i)\,(a_{\lambda_1}-z_i)\,(a_{\lambda_2}-z_i)=\varphi_i^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}$$

gesetzt, sodass die Formeln (I) die Gestalt annehmen:

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned} &\sigma_\lambda^2(u_1, u_2) = \varphi^2 (z_1 - z_2)^2 (a_\lambda - z_1)\,(a_\lambda - z_2) \\ &\sigma^2_{\substack{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\\ \lambda_3\lambda_4\lambda_5}}(u_1, u_2) = \varphi^2 \begin{vmatrix} \sqrt{\varphi_1^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}} & \sqrt{\varphi_2^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}} \\ \sqrt{\varphi_1^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} & \sqrt{\varphi_2^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} \end{vmatrix}^2 \end{aligned}\right.$$

mit der Bedingung:

$$(5)\qquad \sqrt{\varphi_i^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}}\,\sqrt{\varphi_i^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}}=s_i\,,\quad i=1,2.$$

Diese Formeln, welche die Rosenhain'sche Parameterdarstellung enthalten, führen unmittelbar zu der Bemerkung:

Die algebraischen Charakteristiken 1. *Art der* 16 *Thetafunctionen charakterisiren die Vertheilung der* 6 *Verzweigungspunkte* a_λ *des hyperelliptischen Gebildes auf die* 16 *algebraischen Ausdrücke, welchen bei der Rosenhain'schen Parameterdarstellung die* 16 *Thetafunctionen proportional gesetzt werden.*

§ 2.

Die Nullpunkte der Thetafunctionen in ihrer Beziehung zu den algebraischen Charakteristiken 1. Art.

In den Integralen (u_1, u_2) soll jetzt die Grenzstelle z_2, s_2 als beliebiger, aber fest gedachter *Parameter*, die Grenzstelle z_1, s_1 aber, die dabei unter Weglassung des Index 1 mit z, s bezeichnet sei, als *Variable* angesehen werden. Nach bekannten Sätzen von Riemann*) wird alsdann eine jede Thetafunction bei gegebenem Parameter z_2, s_2 *im Allgemeinen für* 2 *Stellen* z, s des hyperelliptischen Gebildes verschwinden; jedoch wird es *besondere* Werthe des Parameters z_2, s_2 geben können, für welche sie in Bezug auf die Variable z, s *identisch* verschwindet.

*) Vgl. Prym, Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche (a. a. O.), S. 14.

Da bei der Discussion ihrer Nullpunkte die Thetafunctionen und Sigmafunctionen nicht als verschieden zu gelten haben, so ist die Lage der beiden Nullstellen der Thetafunctionen aus der algebraischen Darstellung (§ 1, I) der Verhältnisse der Sigmaquadrate unmittelbar zu ersehen. Man erkennt nämlich:

I. *Die Function* $\Theta_\lambda(u_1, u_2)$, *wo* $u_1 = \int_{z_2, -s_2}^{z, s} dw_1$, $u_2 = \int_{z_2, -s_2}^{z, s} dw_2$, *verschwindet im Allgemeinen für die beiden Punkte* $z = a_\lambda$*) *und* $z, s = z_2, -s_2$; *die Function* $\Theta_{\substack{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \\ \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}}(u_1, u_2)$ *für diejenigen beiden Punkte* z, $s = z_0$, s_0 *und* z, $s = z_1$, s_1, *welche neben dem Punkte* z, $s = z_2$, s_2 *der Bedingung genügen:*

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} \sqrt{\varphi^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}} & \sqrt{\varphi_2^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}} \\ \sqrt{\varphi^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} & \sqrt{\varphi_2^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} \end{vmatrix} = 0, \quad \textit{wobei:} \quad \begin{aligned} \sqrt{\varphi^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}}\sqrt{\varphi^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} &= s, \\ \sqrt{\varphi_2^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}}\sqrt{\varphi_2^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} &= s_2. \end{aligned}$$

Bei Erläuterung dieses Resultates sei es gestattet, der einfacheren Schreibweise wegen, $\Theta_0(u_1, u_2)$ für die 6 ungeraden Functionen $\Theta_\lambda(u_1, u_2)$ und $\Theta_{\substack{024 \\ 135}}(u_1, u_2)$ für die 10 geraden $\Theta_{\substack{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \\ \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}}(u_1, u_2)$ als Repräsentanten auszuwählen, wodurch bei dem durchsichtigen Aufbau der Formeln § 1, I der Allgemeinheit kein Abbruch geschieht.

Um die beiden unter der Annahme $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 3$, $\lambda_5 = 5$ in (6) definirten Stellen z_0, s_0 und z_1, s_1 zu bestimmen, benutzt man zuerst die Gleichung 3. Grades in z:

$$(7)\qquad G(z) = \begin{vmatrix} \sqrt{\varphi^{(024)}} & \sqrt{\varphi_2^{(024)}} \\ \sqrt{\varphi^{(135)}} & \sqrt{\varphi_2^{(135)}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\sqrt{\varphi^{(024)}} & \sqrt{\varphi_2^{(024)}} \\ \sqrt{\varphi^{(135)}} & \sqrt{\varphi_2^{(135)}} \end{vmatrix}$$
$$= \varphi_2^{(024)}\varphi^{(135)} - \varphi_2^{(135)}\varphi^{(024)} = 0,$$

welche neben $z = z_2$ die beiden gesuchten Werthe $z = z_0$ und $z = z_1$ zu Wurzeln hat. Zur Ermittlung der zugehörigen Werthe s_0 und s_1, welche mit z_0 und z_1 nur erst in ihren Quadraten bestimmt sind, dient dann die ursprüngliche Gleichung (6); sie bestimmt nämlich, wenn man in ihr $z = z_0$, resp. $z = z_1$ setzt, eindeutig die Wurzel s_0, resp. s_1, in deren Factoren sie linear und homogen ist. Man kann hierbei die Gleichung (6) im Allgemeinen durch Multiplication mit

$$\sqrt{\varphi^{(024)}}\sqrt{\varphi_2^{(024)}} \qquad \text{oder} \qquad \sqrt{\varphi^{(135)}}\sqrt{\varphi_2^{(135)}}$$

und nachheriger Auflösung nach s auf die übersichtlichere Form bringen:

---

*) Wenn z einem Verzweigungspunkte gleich ist, wird die sonst zur Unterscheidung zweier entgegengesetzter Stellen des Gebildes erforderliche Angabe des Werthes von s überflüssig.

$$(8)\quad s = \frac{(a_0-z)(a_2-z)(a_4-z)}{(a_0-z_2)(a_2-z_2)(a_4-z_2)}\,s_2 \quad \text{oder} \quad s = \frac{(a_1-z)(a_3-z)(a_5-z)}{(a_1-z_2)(a_3-z_2)(a_5-z_2)}\,s_2.$$

Auch aus der Gleichung (7) lässt sich, durch Ausführung der Division mit $z-z_2$, die quadratische Gleichung für z_0 und z_1 in einer characteristischen Form herstellen. Es ist nämlich:

$$\frac{\varphi_2^{(024)}\,\varphi^{(135)} - \varphi_2^{(135)}\,\varphi^{(024)}}{z-z_2}$$

$$= \frac{(a_2-a_4).(a_0-a_1)(a_0-a_3)(a_0-a_5).(a_2-z_2)(a_4-z_2)(a_2-z)(a_4-z)+\cdots+\cdots}{(a_2-a_4)(a_4-a_0)(a_0-a_2)}$$

$$= -\frac{(a_3-a_5).(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_4).(a_3-z_2)(a_5-z_2)(a_3-z)(a_5-z)+\cdots+\cdots}{(a_3-a_5)(a_5-a_1)(a_1-a_3)},$$

wo die beiden durch Punkte angedeuteten Glieder im Zähler der Ausdrücke rechter Hand aus dem ausgeschriebenen Gliede durch cyklische Vertauschung der Buchstaben a_0, a_2, a_4 für den ersten und a_1, a_3, a_5, für den zweiten Ausdruck hervorgehen. Die gesuchte quadratische Gleichung kann daher in den beiden untereinander äquivalenten Formen gegeben werden:

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(a_2-a_4).(a_0-a_1)(a_0-a_3)(a_0-a_5)}{(a_0-z_2)(a_0-z)} + \frac{(a_4-a_0).(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_5)}{(a_2-z_2)(a_2-z)} \\ &\qquad + \frac{(a_0-a_2).(a_4-a_1)(a_4-a_3)(a_4-a_5)}{(a_4-z_2)(a_4-z)} = 0, \\ &\frac{(a_3-a_5).(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_4)}{(a_1-z_2)(a_1-z)} + \frac{(a_5-a_1).(a_3-a_0)(a_3-a_2)(a_3-a_4)}{(a_3-z_2)(a_3-z)} \\ &\qquad + \frac{(a_1-a_3).(a_5-a_0)(a_5-a_2)(a_5-a_4)}{(a_5-z_2)(a_5-z)} = 0. \end{aligned}\right.$$

Man kann hiernach an Stelle der ursprünglich durch die Gleichung (6) gebotenen Bestimmungsweise der Stellen z_0, s_0 und z_1, s_1 auch die in folgendem Satze bezeichnete eintreten lassen:

I'. *Zur Bestimmung der Nullpunkte $z, s = z_0, s_0$ und $z, s = z_1, s_1$ der Function:*

$$\Theta_{\substack{024\\135}}\left(\int_{z_2,\,-s_2}^{z,\,s} dw_1,\ \int_{z_2,\,-s_2}^{z,\,s} dw_2\right)$$

von z, s dient die eine oder andere der in z quadratischen Gleichungen (9), *welche z_0 und z_1 zu Wurzeln hat; und die eine oder andere der Functionen* (8) *von z welche mit $z=z_0$ den Werth s_0 und mit $z=z_1$ den Werth s_1 giebt.*

Die unmittelbar ersichtliche Abhängigkeit der quadratischen Gleichungen (9) und der Functionen (8) von derjenigen Gruppirung $(a_0\,a_2\,a_4)$ $(a_1\,a_3\,a_5)$ der 6 Verzweigungspunkte des hyperelliptischen Gebildes z, s, auf welche die Charakteristik der betrachteten Thetafunction

hinweist, macht die Aufstellung des Satzes I' in allgemeiner, alle 10 geraden Thetafunctionen umfassender Form überflüssig.

Indessen knüpfen sich noch einige speciellere Bemerkungen an die ausgesprochenen Sätze. Die 3 Coefficienten der quadratischen Gleichungen (9) können, wie man sich leicht überzeugt, für keinen Werth von z_2 gleichzeitig verschwinden, solange die 6 Verzweigungspunkte $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ alle untereinander verschieden sind. Dementsprechend verschwinden die 10 geraden Thetafunctionen mit den Argumenten:

$$u_1 = \int\limits_{z_2, -s_2}^{z, s} d w_1, \quad u_2 = \int\limits_{z_2, -s_2}^{z, s} d w_2$$

für keinen Werth der Parameter z_2, s_2 identisch in Bezug auf das Argument z, s*) (vgl. jedoch § 4, I). Unter den besonderen Annahmen $z = a_0$; a_2; a_4; a_1; a_3 oder a_5 für den Parameter z_2, s_2 der Function $\Theta_{\substack{024\\135}}(u_1, u_2)$ ergiebt die Anwendung der Gleichung (7) bezüglich folgende Paare von Nullpunkten: a_2, a_4; a_4, a_0; a_0, a_2; a_3, a_5; a_5, a_1 oder a_1, a_3. Analoges gilt für die 9 anderen geraden Thetafunctionen.

Die ungerade Function $\Theta_\lambda(u_1, u_2)$ verschwindet zufolge der Structur der Formeln § 1, I in Bezug auf das Argument z, s identisch, wenn ihr Parameter z_2, s_2 dem ihr zugehörigen Verzweigungspunkt a_λ gleich wird; tritt ein anderer Verzweigungspunkt oder überhaupt ein anderer Punkt des hyperelliptischen Gebildes als Parameter ein, so gilt die in Satz I angegebene Bestimmung der beiden Nullpunkte.*)

In Beziehung auf den Fall, dass der Parameter der Thetafunction ein Verzweigungspunkt ist, gelten somit die beiden Sätze:

II. *Die ungerade Thetafunction:*

$$\Theta_\lambda\Big(\int\limits_{a_\mu}^{z, s} d w_1, \int\limits_{a_\mu}^{z, s} d w_2\Big)$$

verschwindet identisch, wenn $\mu = \lambda$, *dagegen für die beiden Verzweigungspunkte* $z = a_\lambda$ und $z = a_\mu$, *wenn* $\mu \neq \lambda$ *ist. Die gerade Thetafunction:*

$$\Theta_{\substack{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2\\ \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}}\Big(\int\limits_{a_\mu}^{z, s} d w_1, \int\limits_{a_\mu}^{z, s} d w_2\Big)$$

verschwindet für diejenigen beiden Verzweigungspunkte $z = a_{\mu'}$ *und* $z = a_{\mu''}$, *deren Indices* μ' *und* μ'' *mit* μ *zusammen das eine oder andere der beiden Tripel* $\lambda_0\, \lambda_1\, \lambda_2$ *und* $\lambda_3\, \lambda_4\, \lambda_5$ *bilden.*

Aus den Sätzen I (I') und II geht hervor, wie die Bestimmung der Nullpunkte der Thetafunctionen mit den Argumenten:

*) Vgl. über diese Sätze Prym, a. zuletzt a. O. S. 18.

$$u_1 = \int_{z_2,\,-s_2}^{z,\,s} dw_1, \quad u_2 = \int_{z_2,\,-s_2}^{z,\,s} dw_2,$$

sei es, dass der Parameter z_2, s_2 Verzweigungspunkt ist oder nicht, derjenigen Gruppirung der 6 Verzweigungspunkte des hyperelliptischen Gebildes folgt, welche in der algebraischen Charakteristik 1. Art ihren Ausdruck findet.

§ 3.

Die Nullpunkte der Thetafunctionen in ihrer Beziehung zu dem Jacobi'schen Additionstheorem.

Jacobi hat ein Additionstheorem hyperelliptischer Integrale 1. Ordnung behandelt*), welches nicht sowohl dazu dient, eine *grössere* Anzahl von hyperelliptischen Integralen auf *zwei* zu reduciren, als vielmehr *ein* hyperelliptisches Integral in *zwei* zu zerlegen. Das Theorem kann in vervollständigter Form und in der Bezeichnungsweise der vorstehenden Paragraphen so ausgesprochen werden:

A_1. *Zur Bestimmung der beiden Stellen z_0, s_0 und z_1, s_1 des hyperelliptischen Gebildes z, s, welche bei gegebenem z_2, s_2 den transcendenten Relationen*

$$\tag{10} \left\{\begin{aligned} \int_{a_0}^{z_0,\,s_0} dw_1 + \int_{a_2}^{z_1,\,s_1} dw_1 + \int_{a_4}^{z_2,\,s_2} dw_1 \equiv 0, \\ \int_{a_0}^{z_0,\,s_0} dw_2 + \int_{a_2}^{z_1,\,s_1} dw_2 + \int_{a_4}^{z_2,\,s_2} dw_2 \equiv 0, \end{aligned}\right.$$

oder

$$\left\{\begin{aligned} \int_{a_1}^{z_0,\,s_0} dw_1 + \int_{a_3}^{z_1,\,s_1} dw_1 + \int_{a_5}^{z_2,\,s_2} dw_1 \equiv 0, \\ \int_{a_1}^{z_0,\,s_0} dw_2 + \int_{a_3}^{z_1,\,s_1} dw_2 + \int_{a_5}^{z_2,\,s_2} dw_2 \equiv 0 \end{aligned}\right.$$

entsprechen, dient die in z quadratische Gleichung:

$$\frac{(a_0-z_2)(a_2-z_2)(a_4-z_2)\,.\,(a_1-z)(a_3-z)(a_5-z) - (a_1-z_2)(a_3-z_2)(a_5-z_2)\,.\,(a_0-z)(a_2-z)(a_4-z)}{z-z_2} = 0,$$

welche z_0 und z_1 als Wurzeln hat; und die Function:

---

*) Jacobi, De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, etc., Ges. Werke, hrsg. von Borchardt und Weierstrass, Bd. II, S. 46 (1834).

$$s = \frac{(a_0 - z)(a_2 - z)(a_4 - z)}{(a_0 - z_2)(a_2 - z_2)(a_4 - z_2)} s_2 \quad oder \quad s = \frac{(a_1 - z)(a_3 - z)(a_5 - z)}{(a_1 - z_2)(a_3 - z_2)(a_5 - z_2)} s_2,$$

welche mit $z = z_0$ den Werth s_0 und mit $z = z_1$ den Werth s_1 giebt.

Dabei können in den transcendenten Relationen (10) *die unteren Grenzen a_0, a_2, a_4 unter sich, sowie a_1, a_3, a_5 unter sich beliebig vertauscht werden*, weil dieselben in die entsprechenden algebraischen Relationen bezüglich symmetrisch eingehen.

Der Satz zeichnet die Gruppirung $(a_0 a_2 a_4)(a_1 a_3 a_5)$ der 6 Verzweigungspunkte aus; analoge Sätze gelten für die 9 übrigen Gruppirungen dieser Art.

Das Additionstheorem I kann noch durch folgenden Zusatz ergänzt werden, dessen Beweis sich unter anderen aus bekannten Riemann'schen Sätzen*) über das Verschwinden der Thetafunctionen ergiebt:

A_2. *Wenn 3 Stellen z_0, s_0; z_1, s_1; z_2, s_2 des hyperelliptischen Gebildes durch die transcendenten Relationen:*

$$\int_{a_0}^{z_0, s_0} dw_1 + \int_{a_0}^{z_1, s_1} dw_1 + \int_{a_0}^{z_2, s_2} dw_1 \equiv 0,$$

$$\int_{a_0}^{z_0, s_0} dw_2 + \int_{a_0}^{z_1, s_1} dw_2 + \int_{a_0}^{z_2, s_2} dw_2 \equiv 0$$

mit einander verknüpft sind, so ist nothwendig die eine $= a_0$ und sind gleichzeitig die beiden anderen zwei entgegengesetzte Stellen (z, s und z, $-s$) des Gebildes (eingeschlossen den Fall, dass z ein Verzweigungspunkt und dann $\pm s = 0$ ist).

Der Satz zeichnet den Verzweigungspunkt a_0 aus; analoge Sätze gelten für die 5 übrigen Verzweigungspunkte.

Die beiden Additionstheoreme sind auch als specielle Fälle in dem Abel'schen Additionstheorem**) der hyperelliptischen Integrale enthalten. Von dem ersten derselben ist noch eine besondere Anwendung hervorzuheben. Nimmt man nämlich in den Gleichungen (10) $z_2 = a_5$, so ergiebt sich aus der quadratischen Gleichung des Theoremes für z_0, z_1 das Werthepaar a_1, a_3. Es müssen also die Relationen gelten:

$$(12) \quad \begin{cases} \int_{a_0}^{a_1} dw_1 + \int_{a_2}^{a_3} dw_1 + \int_{a_4}^{a_5} dw_1 \equiv 0, \\ \int_{a_0}^{a_1} dw_2 + \int_{a_2}^{a_3} dw_2 + \int_{a_4}^{a_5} dw_2 \equiv 0, \end{cases}$$

*) Vgl. Prym, a. zuletzt a. O. S. 14 und S. 18.

**) Abel, Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes, Oeuvres compl. publ. par Sylow et Lie, p. 444 (1828).

in denen wiederum die 3 oberen Grenzen unter sich und die 3 unteren unter sich beliebig vertauschbar sind.

Durch Vergleichung der Additionstheoreme A_1 und A_2 mit den Resultaten des § 2 (in (I), (7) und (8)) ergiebt sich jetzt folgender, sogleich mit allgemeiner Bezeichnung auszusprechender Satz:

I. *Sind 3 Stellen* $z_0, s_0;\ z_1, s_1;\ z_2, s_2$ *des hyperelliptischen Gebildes durch die beiden Relationen:*

$$(13)\qquad \begin{cases} \int\limits_{a_\lambda}^{z_0, s_0} dw_1 + \int\limits_{a_\lambda}^{z_1, s_1} dw_1 + \int\limits_{a_\lambda}^{z_2, s_2} dw_1 \equiv 0, \\ \int\limits_{a_\lambda}^{z_0, s_0} dw_2 + \int\limits_{a_\lambda}^{z_1, s_1} dw_2 + \int\limits_{a_\lambda}^{z_2, s_2} dw_2 \equiv 0 \end{cases}$$

mit einander verknüpft, und nimmt man die eine dieser Stellen als Parameter z', s' *der ungeraden Thetafunction:*

$$\Theta_\lambda \left(\int\limits_{z', -s'}^{z, s} dw_1, \quad \int\limits_{z', -s'}^{z, s} dw_2 \right),$$

so sind die beiden anderen die Nullpunkte dieser Function.

Sind 3 Stellen $z_0, s_0;\ z_1, s_1;\ z_2, s_2$ *durch die beiden Relationen:*

$$\begin{cases} \int\limits_{a_{\lambda_0}}^{z_0, s_0} dw_1 + \int\limits_{a_{\lambda_1}}^{z_1, s_1} dw_1 + \int\limits_{a_{\lambda_2}}^{z_2, s_2} dw_1 \equiv 0, \\ \int\limits_{a_{\lambda_0}}^{z_0, s_0} dw_2 + \int\limits_{a_{\lambda_1}}^{z_1, s_1} dw_2 + \int\limits_{a_{\lambda_2}}^{z_2, s_2} dw_2 \equiv 0 \end{cases}$$

(14) *oder*

$$\begin{cases} \int\limits_{a_{\lambda_3}}^{z_0, s_0} dw_1 + \int\limits_{a_{\lambda_4}}^{z_1, s_1} dw_1 + \int\limits_{a_{\lambda_5}}^{z_2, s_2} dw_1 \equiv 0, \\ \int\limits_{a_{\lambda_3}}^{z_0, s_0} dw_2 + \int\limits_{a_{\lambda_4}}^{z_1, s_1} dw_2 + \int\limits_{a_{\lambda_5}}^{z_2, s_2} dw_2 \equiv 0 \end{cases}$$

mit einander verknüpft, und nimmt man die eine dieser Stellen als Parameter z', s' *der geraden Thetafunction:*

$$\Theta_{\substack{\lambda_0\lambda_1\lambda_2 \\ \lambda_3\lambda_4\lambda_5}} \left(\int\limits_{z', -s'}^{z, s} dw_1, \quad \int\limits_{z', -s'}^{z, s} dw_2 \right),$$

so sind die beiden anderen die Nullpunkte dieser Function.

Im ersteren Satze ist der *Fall des identischen Verschwindens* einbegriffen: ist nämlich $z' = z_0 = a_0$, so sind die beiden anderen den Relationen (13) genügenden Stellen, z_1, s_1 und z_2, s_2, zwei *beliebige* einander entgegengesetzte Stellen, $z_1, s_1 = z, s$ und $z_2, s_2 = z, -s$; es ist also *jede* Stelle des Gebildes z, s Nullpunkt der Function.

Man bemerkt sofort die Uebereinstimmung der Indices der Thetafunctionen mit den Indices der unteren Integralgrenzen in den Additionstheoremen (13) und (14) und hat hiernach jeder Thetafunction zur Bestimmung ihrer Nullpunkte ein Jacobi'sches Additionstheorem zuzuordnen in folgender Weise:

Zu jeder ungeraden Thetafunction gehört ein Additionstheorem dreier Integrale, deren untere Grenzen (wie in (13)) alle drei dem der Thetafunction zugeordneten*) Verzweigungspunkte gleich sind.

Zu jeder geraden Thetafunction gehört ein Additionstheorem dreier Integrale, deren untere Grenzen (wie in (14)) dem einen oder anderen der beiden der Thetafunction zugeordneten*) Tripel von Verzweigungspunkten gleich sind.

Im Besonderen gehört zu jeder der 10 geraden Thetafunctionen:

$$\Theta_{\substack{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\\ \lambda_3\lambda_4\lambda_5}}(u_1, u_2)$$

ein zwischen drei Halben der zusammengehörigen Periodicitätsmoduln der Integrale u_1, u_2 bestehendes Relationenpaar von der Form (12), nämlich:

$$(15)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{a_{\lambda_3}}^{a_{\lambda_0}} dw_1 + \int_{a_{\lambda_4}}^{a_{\lambda_1}} dw_1 + \int_{a_{\lambda_5}}^{a_{\lambda_2}} dw_1 = 0, \\[2ex] \displaystyle\int_{a_{\lambda_3}}^{a_{\lambda_0}} dw_2 + \int_{a_{\lambda_4}}^{a_{\lambda_1}} dw_2 + \int_{a_{\lambda_5}}^{a_{\lambda_2}} dw_2 = 0, \end{cases}$$

in welchem es auf die Reihenfolge der Zahlen innerhalb der beiden Tripel ($\lambda_0\ \lambda_1\ \lambda_2$) und ($\lambda_3\ \lambda_4\ \lambda_5$) ebensowenig ankommt, wie in der Charakteristik der Thetafunction. Man kann die Gesammtheit der 10 Relationenpaare (15) auch so charakterisiren:

A_3. *Die Relationen* (15) *gelten, so oft* λ_0, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 *die* 6 *Zahlen* 0, 1, 2, 3, 4, 5 *in irgend welcher Reihenfolge bedeuten.*

Die Verbindung dieses Resultates mit dem Satze (A_2) führt noch zu einer später zu verwendenden Bemerkung.

Setzt man nämlich in diesem Satze, indem man ihn mit dem allgemeinen Werth a_{λ_0} für den speciellen a_0 anwendet, ausserdem $z_0 = a_{\lambda_1}$, $z_1 = a_{\lambda_2}$, $z_2 = a_{\lambda_3}$, so lautet er: Die Relationen:

*) Vgl. oben die Einleitung.

$$\int_{a_{\lambda_0}}^{a_{\lambda_1}} dw_1 + \int_{a_{\lambda_0}}^{a_{\lambda_2}} dw_1 + \int_{a_{\lambda_0}}^{a_{\lambda_3}} dw_1 \equiv 0,$$

$$\int_{a_{\lambda_0}}^{a_{\lambda_1}} dw_2 + \int_{a_{\lambda_0}}^{a_{\lambda_2}} dw_2 + \int_{a_{\lambda_0}}^{a_{\lambda_3}} dw_2 \equiv 0$$

können nur bestehen, wenn von den 3 Zahlen λ_1, λ_2, λ_3 eine gleich λ_0, die beiden anderen aber einander gleich sind; oder was (vgl. § 1, 2) dasselbe bedeutet: Das Bestehen der Relationen:

$$\int_{a_{\lambda_0}}^{a_{\lambda_1}} dw_1 + \int_{a_{\lambda_2}}^{a_{\lambda_3}} dw_1 \equiv 0,$$

$$\int_{a_{\lambda_0}}^{a_{\lambda_1}} dw_2 + \int_{a_{\lambda_2}}^{a_{\lambda_3}} dw_2 \equiv 0$$

bedingt, dass die 4 Grenzen a_{λ_0}, a_{λ_1}, a_{λ_2}, a_{λ_3} paarweise gleich sind.

Da nun diese letzteren Relationen aus (15) hervorgehen würden, wenn man $\lambda_4 = \lambda_5$ nähme, so ist diese Annahme in (15) nur statthaft, wenn zugleich λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 paarweise gleich genommen werden; also, indem man zusammenfasst:

A_4. *Die beiden Congruenzen* (15) *bestehen dann und nur dann, wenn die* 6 *Zahlen* λ_0, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 *entweder alle* 6 *verschieden sind* (*wie z. B. in* (12)) *oder aber in* 3 *Paare von je* 2 *gleichen zerfallen.*

Hierin ist der Fall eingeschlossen gedacht, dass unter den 3 Paaren von je 2 gleichen wieder identische Paare sich vorfinden.

Gegenüber den zu den Additionstheoremen (A_1) und (A_2) nur als Hilfsmittel für spätere Betrachtungen gegebenen Zusätzen (A_3) und (A_4)*), *ist als eigentliches Resultat des vorliegenden Paragraphen der Satz I anzusehen.* Derselbe enthält die Beziehung der Nullpunkte der 16 Thetafunctionen zu den Lösungen der 16 Jacobi'schen Additionstheoreme und weist die Uebereinstimmung der Gruppirung der letzteren mit derjenigen der algebraischen Charakteristiken 1. Art der Thetafunctionen nach.

---

*) Dieselben stimmen ihrem Inhalte nach beiläufig mit bekannten Sätzen der Riemann'schen Charakteristikentheorie überein, vgl. Krazer, Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemann'schen Thetaformel (Leipzig, 1882), S. 3—5.

§ 4.

Bestimmung einer Thetafunction mit vorgegebenen Nullpunkten.

Im folgenden soll nach dem Vorgange von Prym*) die abgekürzte Schreibweise $\Theta((u))$ für $\Theta(u_1, u_2)$ eingeführt und sollen entsprechend unter $(u \equiv 0)$ die beiden Congruenzen $u_1 \equiv 0$, $u_2 \equiv 0$ verstanden werden, sei es dass hierbei an Stelle des Symbols u ein einzelner Buchstabe oder ein Integral oder eine Summe von Integralen tritt.

Die in § 3 entwickelte Bestimmung der Nullpunkte der mit einem Parameter z_2, s_2 behafteten Function von z, s:

$$\Theta_{\substack{024\\135}}\left(\left(\int_{z_2,\,-s_2}^{z,\,s} dw\right)\right)$$

oder in äquivalenter Schreibweise mit Einschaltung eines beliebig gewählten Verzweigungspunktes a_4 (vgl. § 1, 2):

$$\Theta_{\substack{024\\135}}\left(\left(\int_{a_4}^{z,\,s} dw + \int_{a_4}^{z_2,\,s_2} dw\right)\right)$$

kann man sich so denken, dass der den Parameter z_2, s_2 enthaltende Theil $\left(\int_{a_4}^{z_2,\,s_2} dw\right)$ des Argumentes durch das Jacobi'sche Additionstheorem in folgender Weise zerlegt wird:

$$(10)\qquad \left(\int_{a_4}^{z_2,\,s_2} dw \equiv -\int_{a_0}^{z_0,\,s_0} dw - \int_{a_2}^{z_1,\,s_1} dw\right);$$

diese Zerlegung, welche bei den angenommenen, übrigens unter sich vertauschbaren unteren Grenzen, nur auf eine Weise möglich ist, bestimmt die Nullpunkte z_0, s_0 und z_1, s_1 der Function. Dieses Resultat lässt sich auch dahin aussprechen, dass die Function:

$$(16)\qquad \Theta_{\substack{024\\135}}\left(\left(\int_{a_4}^{z,\,s} dw - \int_{a_0}^{z_0,\,s_0} dw - \int_{a_2}^{z_1,\,s_1} dw\right)\right)$$

für $z, s = z_0, s_0$ und $z, s = z_1, s_1$ verschwindet. Aus dem so formulirten Resultate des § 3 kann nun die Abhängigkeit der beiden Punkte z_0, s_0 und z_1, s_1 von dem ursprünglichen Parameter z_2, s_2 nachträglich beseitigt werden.

Wenn nämlich die Function (16) für $z, s = z_1, s_1$ verschwindet, so ist:

*) Prym, a. zuletzt a. O. S. 14.

$$(17)\qquad \Theta_{\substack{024\\135}}\left(\left(\int_{a_4}^{z_1,s_1} dw - \int_{a_0}^{z_0,s_0} dw - \int_{a_2}^{z_1,s_1} dw\right)\right) = 0$$

oder was dasselbe bedeutet:

$$(18)\qquad \Theta_{\substack{024\\135}}\left(\left(\int_{a_0}^{z_0,s_0} dw + \int_{a_2}^{a_4} dw\right)\right) = 0.$$

Da aber von den 3 durch die Relationen (10) mit einander verknüpften Stellen z_0, s_0; z_1, s_1; z_2, s_2, den beiden Nullpunkten und dem Parameter der ursprünglich vorgelegten Function immer *eine*, also z. B. auch z_0, s_0, *beliebig* angenommen werden kann, so muss die Gleichung (18) in Bezug auf die Stelle z_0, s_0 *identisch* gelten; die äquivalente Gleichung (17) gilt dann ausserdem noch für die Stelle z_1, s_1 identisch, weil das Argument

$$\left(\int_{a_4}^{z_1,s_1} dw - \int_{a_0}^{z_0,s_0} dw - \int_{a_2}^{z_1,s_1} dw \equiv - \int_{a_0}^{z_0,s_0} dw - \int_{a_2}^{a_4} dw\right)$$

von z_1, s_1 nicht abhängt. Dasselbe Argument bleibt überdies sich selbst congruent, wenn a_0, a_2, a_4 unter sich vertauscht oder mit Rücksicht auf (12) durch a_1, a_3, a_5 ersetzt werden. Man erkennt so, indem man zusammenfasst, dass für jedes z_0, s_0 bei beliebiger Vertauschbarkeit der 3 unteren Grenzen a_0, a_2, a_4 oder a_1, a_3, a_5:

$$\Theta_{\substack{024\\135}}\left(\left(\int_{a_0}^{z_0,s_0} dw + \int_{a_2}^{z_1,s_1} dw + \int_{a_4}^{z_1,-s_1} dw\right)\right) = 0$$

und

$$\Theta_{\substack{024\\135}}\left(\left(\int_{a_1}^{z_0,s_0} dw + \int_{a_3}^{z_1,s_1} dw + \int_{a_5}^{z_1,-s_1} dw\right)\right) = 0.$$

Dieses Resultat mag, unter gleichzeitiger Ausdehnung auf die 9 übrigen geraden Thetafunctionen, also formulirt werden:

I. *Die gerade Thetafunction:*

$$\Theta_{\substack{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\\\lambda_3\lambda_4\lambda_5}}\left(\left(\int_{a_{\lambda_0}}^{z_0,s_0} dw + \int_{a_{\lambda_1}}^{z_1,s_1} dw + \int_{a_{\lambda_2}}^{z_2,s_2} dw\right)\right)$$

oder

$$\Theta_{\substack{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\\\lambda_3\lambda_4\lambda_5}}\left(\left(\int_{a_{\lambda_3}}^{z_0,s_0} dw + \int_{a_{\lambda_4}}^{z_1,s_1} dw + \int_{a_{\lambda_5}}^{z_2,s_2} dw\right)\right)$$

verschwindet, so oft zwei von den 3 Stellen z_0, s_0; z_1, s_1; z_2, s_2 einander entgegengesetzt sind, in Bezug auf die dritte identisch.

Dieser Satz giebt eine Ergänzung zu dem auf die ungeraden Thetafunctionen bezüglichen Theile des Satzes § 2, II, den man nach Analogie des vorstehenden so aussprechen wird:

I. *Die ungerade Thetafunction:*

$$\Theta_\lambda\left(\left(\int_{a_\lambda}^{z_0, s_0} dw + \int_{a_\lambda}^{z_1, s_1} dw + \int_{a_\lambda}^{z_2, s_2} dw\right)\right)$$

verschwindet, so oft zwei von den 3 Stellen z_0, s_0; z_1, s_1; z_2, s_2 *einander entgegengesetzt sind, in Bezug auf die dritte identisch.*

In einer etwas veränderten Auffassung lauten dieselben Sätze:

II. *Betrachtet man in der ungeraden Thetafunction:*

$$\Theta_\lambda\left(\left(\int_{a_\lambda}^{z_0, s_0} dw + \int_{a_\lambda}^{z_1, s_1} dw + \int_{a_\lambda}^{z_2, s_2} dw\right)\right)$$

und in der geraden Thetafunction:

$$\Theta_{\substack{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \\ \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}}\left(\left(\int_{a_{\lambda_0}}^{z_0, s_0} dw + \int_{a_{\lambda_1}}^{z_1, s_1} dw + \int_{a_{\lambda_2}}^{z_2, s_2} dw\right)\right)$$

oder

$$\Theta_{\substack{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \\ \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}}\left(\left(\int_{a_{\lambda_3}}^{z_0, s_0} dw + \int_{a_{\lambda_4}}^{z_1, s_1} dw + \int_{a_{\lambda_5}}^{z_2, s_2} dw\right)\right)$$

von den 3 Stellen z_0, s_0; z_1, s_1; z_2, s_2 *die eine als Argument, die beiden anderen als willkürlich gegebene Parameter, so sind die den letzteren entgegengesetzten Stellen die beiden Nullpunkte der Function.*

In diesem Satze ist der Fall des *identischen Verschwindens* wiederum eingeschlossen: so oft nämlich die beiden Parameter, also etwa z_1, s_1 und z_2, s_2, selbst einander entgegengesetzte Stellen sind ($z_2, s_2 = z_1, -s_1$), so werden die Argumente der Thetafunction von diesen Parametern (z_1, s_1 und $z_1, -s_1$) unabhängig; wenn also die den Parametern entgegengesetzten Stellen die Nullpunkte sein sollen, so bedeutet dies, dass jede Stelle des hyperelliptischen Gebildes Nullpunkt ist.

Dass ein identisches Verschwinden in Bezug auf z_0, s_0 *nur* eintritt, wenn $z_2, s_2 = z_1, -s_1$ und dass, so oft $z_2, s_2 \neq z_1, -s_1$ ist, *nur* die *zwei* Nullpunkte $z_0, s_0 = z_1, -s_1$ und $z_0, s_0 = z_2, -s_2$ vorhanden sind, ist von Prym*) ausführlich dargelegt worden. Die vorstehende Entwicklung will nur die charakteristische Gruppirung der betreffenden

*) Prym, a. zuletzt a. O., Art. 7 und 8. Vgl. auch C. Neumann, Ueber das Verschwinden der Thetafunctionen, Berichte der k. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, 1883, S. 99; sowie Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Functionen, 2. Aufl., Leipzig 1884, Kap. 13.

Resultate mit Bezug auf die 16 Thetafunctionen und die 6 Verzweigungspunkte des hyperelliptischen Gebildes zur Geltung bringen.

Der Satz II enthält eine Erweiterung und einen Abschluss der Resultate der §§ 2 und 3. Dort handelte es sich um die Nullpunkte der mit *einem* willkürlichen Parameter behafteten Thetafunction; die beiden Nullstellen der letzteren waren durch den Parameter mitbestimmt und somit *nicht unabhängig von einander:* hier weisen die Argumente der Thetafunctionen *zwei* willkürliche Parameter auf; die beiden Nullstellen sind die diesen beiden Parametern entgegengesetzten Stellen und somit ebenso willkürlich und *unabhängig von einander*, wie diese. Hier wie dort ist die Beziehung des gefundenen Resultates zu den algebraischen Charakteristiken 1. Art unmittelbar ersichtlich.

Kapitel II.

Die algebraischen Charakteristiken zweiter Art.

§ 5.

Die Nullpunkte der Thetafunctionen in ihrer Beziehung zu den algebraischen Charakteristiken 2. Art.

In § 3 wurde jeder der 16 Thetafunctionen mit den Argumenten

$$\left(u \equiv \int_{s_2,\,-s_2}^{z,\,s} dw\right)$$

ein Additionstheorem zugeordnet, welches ihre Nullpunkte bestimmte. Führt man mit Rücksicht auf die Tabelle § 1, 3 die Charakteristikenbezeichnung 2. Art ein, so drückt sich jene nämliche Zuordnung in folgender Form aus:

Der Function $\Theta((u))$ gehört das Additionstheorem:

$$\left(\int_{a_0}^{z_0,\,s_0} dw + \int_{a_2}^{z_1,\,s_1} dw + \int_{a_4}^{z_2,\,s_2} dw \equiv 0\right)$$

oder

$$\left(\int_{a_1}^{z_0,\,s_0} dw + \int_{a_3}^{z_1,\,s_1} dw + \int_{a_5}^{z_2,\,s_2} dw \equiv 0\right),$$

der Function $\Theta_{i\varkappa}((u))$ das Additionstheorem:

$$\left(\int_{a_0}^{z_0,\,s_0} dw + \int_{a_2}^{z_1,\,s_1} dw + \int_{a_4}^{z_2,\,s_2} dw + \int_{a_i}^{a_\varkappa} dw \equiv 0\right)$$

oder

$$\left(\int_{a_1}^{z_0, s_0} dw + \int_{a_3}^{z_1, s_1} dw + \int_{a_5}^{z_2, s_2} dw + \int_{a_i}^{a_\varkappa} dw \equiv 0\right)$$

zu. Sind nämlich die Indices i und $\varkappa$ beide gerade oder beide ungerade Zahlen, so hat dieses Additionstheorem die Form (13), sind die Indices i und $\varkappa$ von verschiedener Art, der eine gerade, der andere ungerade, so hat es die Form (14).

Die Beziehung der Nullpunkte der Thetafunctionen zu den Charakteristiken 2. Art entspricht daher dem Satze (vgl. § 3, I):

Sind 3 Stellen z_0, s_0; z_1, s_1; z_2, s_2 des hyperelliptischen Gebildes z, s durch die Relationen:

$$(19)\quad \begin{cases} \left(\int_{a_0}^{z_0, s_0} dw + \int_{a_2}^{z_1, s_1} dw + \int_{a_4}^{z_2, s_2} dw + \int_{a_i}^{a_\varkappa} dw \equiv 0\right) \\ \text{oder} \\ \left(\int_{a_1}^{z_0, s_0} dw + \int_{a_3}^{z_1, s_1} dw + \int_{a_5}^{z_2, s_2} dw + \int_{a_i}^{a_\varkappa} dw \equiv 0\right) \end{cases}$$

mit einander verknüpft, und nimmt man die eine dieser Stellen als Parameter z', s' der Thetafunction

$$(20)\qquad \Theta_{i\varkappa}\left(\left(\int_{z', -s'}^{z, s} dw\right)\right),$$

so sind die beiden anderen die Nullpunkte der Function.

Hier ist der Fall $i = \varkappa$ eingeschlossen, in welchem

$$\left(\int_{a_i}^{a_\varkappa} dw \equiv 0\right)$$

wird; man muss nur unter $\Theta_{ii}((u))$ die Function $\Theta((u))$ (ohne Index) verstehen.

Die Congruenzen (19) haben aber noch eine andere Bedeutung; sie bestimmen auch die Nullpunkte der Function:

$$(21)\qquad \Theta\left(\left(\int_{z_2, -s_2}^{z, s} dw + \int_{a_i}^{a_\varkappa} dw\right)\right).$$

Denn stehen die 3 Stellen z_0, s_0; z_1, s_1; z_2, s_2 in der Beziehung (19) zu einander, so ist:

$$\left(\int_{z_2,-s_2}^{z,s} dw + \int_{a_i}^{a_\varkappa} dw \equiv \int_{a_4}^{z,s} dw + \int_{a_4}^{z_2,s_2} dw + \int_{a_i}^{a_\varkappa} dw \equiv \int_{a_4}^{z,s} dw - \int_{a_0}^{z_0,s_0} dw - \int_{a_2}^{z_1,s_1} dw\right.$$

$$\left.\equiv \int_{a_0}^{z,s} dw - \int_{a_2}^{z_0,s_0} dw - \int_{a_4}^{z_1,s_1} dw\right);$$

es hat aber:

$$\Theta\left(\left(\int_{a_0}^{z,s} dw - \int_{a_2}^{z_0,s_0} dw - \int_{a_4}^{z_1,s_1} dw\right)\right)$$

nach § 4, II die Nullpunkte $z, s = z_0, s_0$ und $z, s = z_1, s_1$. Die Functionen (20) und (21), in ersterer $z', s' = z_2, s_2$ gesetzt, haben somit dieselben Nullpunkte:

I. *Die beiden Nullpunkte der Thetafunction:*

$$\Theta_{i\varkappa}\left(\left(\int_{z_2,-s_2}^{z,s} dw\right)\right)$$

sind identisch mit den beiden Nullpunkten der Function:

$$\Theta\left(\left(\int_{z_2,-s_2}^{z,s} dw + \int_{a_i}^{a_\varkappa} dw\right)\right)^{*)}.$$

Hiernach ist in der Bezeichnung der Thetafunctionen durch die Charakteristiken 2. Art *die Abhängigkeit der Nullpunkte der* 15 *Thetafunctionen* $\Theta_{i\varkappa}((u))$ *von den Nullpunkten der einen ausgezeichneten Thetafunction* $\Theta((u))$ zum Ausdrucke gebracht. Zu derselben Einsicht gelangt man, indem man in die Resultate des § 4 mit Benutzung der Tabelle § 1, 3 statt der Charakteristiken 1. Art die der 2. Art einführt. Nach § 4 verschwinden die Thetafunctionen:

$$\Theta\left(\left(\int_{a_0}^{z_0,s_0} dw + \int_{a_2}^{z_1,s_1} dw + \int_{a_4}^{z_2,s_2} dw\right)\right),$$

$$\Theta_{01}\left(\left(\int_{a_1}^{z_0,s_0} dw + \int_{a_2}^{z_1,s_1} dw + \int_{a_4}^{z_2,s_2} dw\right)\right) \text{ oder } \Theta_{01}\left(\left(\int_{a_0}^{z_0,s_0} dw + \int_{a_2}^{z_1,s_1} dw + \int_{a_4}^{z_2,s_2} dw + \int_{a_0}^{a_1} dw\right)\right),$$

$$\Theta_{24}\left(\left(\int_{a_0}^{z_0,s_0} dw + \int_{a_0}^{z_1,s_1} dw + \int_{a_0}^{z_2,s_2} dw\right)\right) \text{ oder } \Theta_{24}\left(\left(\int_{a_0}^{z_0,s_0} dw + \int_{a_2}^{z_1,s_1} dw + \int_{a_4}^{z_2,s_2} dw + \int_{a_2}^{a_4} dw\right)\right),$$

u. s. w.,

*) Dieser Satz zeigt, dass die algebraischen Charakteristiken 2. Art (wie sie P. D. § 1, 2 eingeführt sind) ihrem Wesen nach zusammenfallen mit den Weierstrass'schen Charakteristiken der Thetafunctionen, deren Grundlagen Königsberger angiebt, Ueber die Transformation der Abel'schen Functionen 1. Ordnung, Crelle's Journal, Bd. 64, SS. 20. 21.

so oft man z_0, s_0 als Argument ansieht, für $z_0, s_0 = z_1, -s_1$ und $z_0, s_0 = z_2, -s_2$, und allgemein:

II. *Betrachtet man in der Thetafunction:*

$$\Theta_{i\varkappa}\left(\left(\int_{a_0}^{z_0,s_0} dw + \int_{a_2}^{z_1,s_1} dw + \int_{a_4}^{z_2,s_2} dw + \int_{a_i}^{a_\varkappa} dw\right)\right)$$

oder

$$\Theta_{i\varkappa}\left(\left(\int_{a_1}^{z_0,s_0} dw + \int_{a_3}^{z_1,s_1} dw + \int_{a_5}^{z_2,s_2} dw + \int_{a_i}^{a_\varkappa} dw\right)\right)$$

von den 3 *Stellen* z_0, s_0; z_1, s_1; z_2, s_2 *die eine als Argument, die beiden anderen als willkürlich gegebene Parameter, so sind die den letzteren entgegengesetzten Stellen die Nullpunkte der Function.*

Hier ist wiederum für $i = \varkappa$ unter Θ_{ii} die Function Θ (ohne Index) zu verstehen. Es ist also der Gruppirung $(a_0\, a_2\, a_4)\, (a_1\, a_3\, a_5)$ und damit der geraden Thetafunction $\Theta((u)) = \Theta_{\substack{024\\135}}((u))$, auch in diesem Satze II eine ausgezeichnete Rolle zugewiesen.

Bis hierher enthält der vorliegende § 5 *nur eine formelle Umgestaltung der Resultate der* §§ 3 *und* 4, welche die Nullpunkte der Thetafunctionen mit einem oder zwei willkürlichen Parametern bestimmten. Auch ist, was zuerst die in Satz I ausgesprochene Beziehung der Nullpunkte der Thetafunction *mit den Argumenten* $\left(u \equiv \int_{z_2,-s_2}^{z,s} dw\right)$ zu den Charakteristiken 2. Art angeht, diese Beziehung keine selbständige. Denn durch die Zusammenfassung der die Nullpunkte bestimmenden Additionstheoreme (13) und (14) in die Form (19) ist die wahre Gruppirung jener 16 Additionstheoreme, die Gruppirung zu 6 und 10, nur verdeckt, aber nicht geändert worden. Man kann aber durch *eine Aenderung in der Form der Argumente* der 16 Thetafunctionen den Nullpunktpaaren der letzteren wirklich die Gruppirung zu 1 und 15 aufprägen; man erreicht dies am einfachsten, indem man die Argumente (u) der Function $\Theta_{i\varkappa}((u))$ von einer variablen Stelle z, s in der Weise abhängig zu machen sucht, dass $\Theta_{i\varkappa}((u))$ für $z = a_i$ und $z = a_\varkappa$ verschwindet. Das Mittel hierzu bietet der Satz II.

Setzt man dort $z_1 = a_i$ und $z_2 = a_\varkappa$, ferner $z_0, s_0 = z, s$, und beachtet, dass:

$$\left(\int_{a_0}^{z,s} dw + \int_{a_2}^{a_i} dw + \int_{a_4}^{a_\varkappa} dw + \int_{a_i}^{a_\varkappa} dw \equiv \int_{a_0}^{z,s} dw + \int_{a_2}^{a_4} dw \equiv \int_{a_1}^{z,s} dw + \int_{a_3}^{a_5} dw\right),$$

so folgt mit gleichzeitiger Bezugnahme auf § 4, 18:

III. *Sind die Argumente* (u) *von der Form:*

$$\left(u \equiv \int_{a_0}^{z,s} dw + \int_{a_2}^{a_4} dw \equiv \int_{a_1}^{z,s} dw + \int_{a_3}^{a_5} dw\right) \tag{22}$$

mit beliebiger Vertauschbarkeit der a_0, a_2, a_4 *untereinander und der* a_1, a_3, a_5 *untereinander, so verschwindet die Function:*

$$\Theta((u))$$

identisch in Bezug auf z, s, *die* 15 *Functionen:*

$$\Theta_{i\varkappa}((u))$$

aber bezüglich für die beiden Punkte $z = a_i$ *und* $z = a_\varkappa$.

Hierin ist in der That eine selbständige Beziehung *der Charakteristiken* 2. *Art* zu den Nullpunkten der Thetafunctionen ausgesprochen. Die Gleichberechtigung dieser Beziehung mit der in Kapitel I entwickelten Beziehung *der Charakteristiken* 1. *Art* zu den Nullpunkten der Thetafunctionen tritt noch deutlicher hervor, wenn man die Parameterdarstellung der Thetafunctionen mit den Argumenten (22) aufsucht; bei dieser weisen nämlich (vgl. den folgenden Paragraphen) die 16 Thetafunctionen *die Gruppirung zu* 1 *und* 15 in derselben unmittelbar anschaulichen Weise auf, wie sie bei der Parameterdarstellung § 1, 1 *die Gruppirung zu* 6 *und* 10 darboten.

§ 6.

Die Prym'sche Parameterdarstellung der Thetafunctionen.

Auf Grund der in § 5 gewonnenen Bestimmung der Nullpunkte der Thetafunctionen mit den Argumenten (22) kann man unter Benutzung bekannter Methoden*) die Quadrate der Thetafunctionen dieser Argumente proportional setzen rationalen Functionen der Stelle z, s des hyperelliptischen Gebildes, welche dieselben Nullpunkte haben. Indem man dabei, wie bei der Parameterdarstellung des § 1 statt der Thetafunctionen die nur um constante Factoren verschiedenen Sigmafunctionen einführt, erhält man:

$$\sigma_{i\varkappa}^2((u)) = \varphi^2 . \, c_{i\varkappa}^2 (a_i - z)(a_\varkappa - z), \tag{23}$$

wobei φ^2 einen Proportionalitätsfactor und die $c_{i\varkappa}^2$ Constanten bedeuten. Die letzteren bestimmen sich durch Annahme specieller Werthe für z, s. Nimmt man z. B. $z = a_1$, sodass $\left(u \equiv \int_{a_3}^{a_5} dw \equiv u_{35}\right)$ wird, so erhält man:

*) Vgl. C. Neumann, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale, 2. Aufl. (Leipzig, 1884), S. 369.

$$\sigma_{24}^2((u_{35})):\sigma_{40}^2((u_{35})):\sigma_{02}^2((u_{35}))$$
$$= c_{24}^2(a_2-a_1)(a_4-a_1):c_{40}^2(a_4-a_1)(a_0-a_1):c_{02}^2(a_0-a_1)(a_2-a_1);$$

da aber in diesem Falle nach § 1, I andererseits:

$$\sigma_{24}^2((u_{35})):\sigma_{40}^2((u_{35})):\sigma_{02}^2((u_{35}))$$
$$= (a_0-a_3)(a_0-a_5):(a_2-a_3)(a_2-a_5):(a_4-a_3)(a_4-a_5),$$

so folgt:

$$c_{24}^2:c_{40}^2:c_{02}^2 = (a_0-a_1)(a_0-a_3)(a_0-a_5):(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_5)$$
$$:(a_4-a_1)(a_4-a_3)(a_4-a_5);$$

Die Verhältnisse der übrigen Constanten erhält man auf analogem Wege, oder auch, indem man auf Grund der σ-Relationen aus den gefundenen Verhältnissen der 3 Functionen $\sigma_{24}^2((u))$, $\sigma_{40}^2((u))$, $\sigma_{01}^2((u))$ die Verhältnisse der übrigen berechnet.

Anstatt aber die Constanten $c_{i\varkappa}^2$ in Formel (23) explicite einzusetzen, kann man dieselben in die Sigmafunctionen, die alsdann mit $\tau_{i\varkappa}((u))$ benannt werden sollen, aufnehmen, um so statt (23) direct:

$$\tau_{i\varkappa}^2((u)) = \varphi^2(a_i-z)\,(a_\varkappa-z)$$

zu erhalten.

Man gelangt auf diese Weise zur Einführung gewisser, von den gleichnamigen Theta- und Sigmafunctionen um constante Factoren verschiedener Functionen, die sich auch für spätere Zwecke (§ 12) brauchbar erweisen. Diese Functionen sollen folgendermaassen definirt werden.

Es sei mit der Abkürzung $(a_\mu-a_\nu) = \mu\nu$:

$$\varepsilon_{24} = \sqrt[4]{24.01.03.05.35.51.13}, \quad \varepsilon_{35} = \sqrt[4]{35.01.02.04.24.41.12},$$
$$\varepsilon_{40} = i\sqrt[4]{04.12.13.15.35.52.23}, \quad \varepsilon_{51} = i\sqrt[4]{15.02.03.04.34.42.23},$$
$$\varepsilon_{02} = \sqrt[4]{02.13.14.15.45.53.34}, \quad \varepsilon_{13} = \sqrt[4]{13.02.04.05.45.52.24},$$
$$\varepsilon_{01} = i\sqrt[4]{01.23.24.25.45.53.34}, \quad \varepsilon_{21} = -\sqrt[4]{12.03.04.05.45.53.34},$$
$$\varepsilon_{03} = \sqrt[4]{03.12.14.15.45.52.24}, \quad \varepsilon_{23} = -i\sqrt[4]{23.01.04.05.45.51.14},$$
$$\varepsilon_{05} = i\sqrt[4]{05.12.13.14.34.42.23}, \quad \varepsilon_{25} = \sqrt[4]{25.01.03.04.34.41.13},$$
$$\varepsilon_{41} = -i\sqrt[4]{14.02.03.05.35.52.23},$$
$$\varepsilon_{43} = -\sqrt[4]{34.01.02.05.25.51.12},$$
$$\varepsilon_{45} = i\sqrt[4]{45.01.02.03.23.31.12},$$
$$\varepsilon = -i\sqrt[4]{01.03.05.21.23.25.41.43.45.24.40.02.35.51.13}$$

und alsdann:

$$(24)\qquad \tau(u_1, u_2) = \frac{\Theta(u_1, u_2)}{\varepsilon}, \quad \tau_{i\varkappa}(u_1, u_2) = \frac{\Theta_{i\varkappa}(u_1, u_2)}{\varepsilon_{i\varkappa}}.\text{*)}$$

Das Gesetz der Ausdrücke $\varepsilon_{i\varkappa}$, ε ist dies, dass in ε alle 15 Differenzen $a_\mu - a_\nu$ vorkommen, in $\varepsilon_{i\varkappa}$ aber die 8 Differenzen $a_\mu - a_\nu$ fehlen, welche von den Indices i und $\varkappa$ nur einen enthalten. Zur Bestimmung der Bedeutung der 4. Wurzeln schreibe man in den Definitionsgleichungen der $\varepsilon_{i\varkappa}$, ε unter dem Wurzelzeichen alle Differenzen $a_\mu - a_\nu$ so, dass $\mu > \nu$ wird, und verstehe dann allgemein unter: $\sqrt[4]{(a_\mu - a_\nu)(a_{\mu'} - a_{\nu'})\ldots}$ das Product: $\sqrt[4]{a_\mu - a_\nu}\,\sqrt[4]{a_{\mu'} - a_{\nu'}}\ldots$. Die Bedeutung der einzelnen Factoren dieses Productes aber soll dieselbe sein, wie bei der Zusammensetzung der Werthe der geraden Thetafunctionen für verschwindende Argumente aus jenen Factoren.**)

Von denjenigen Relationen, welche aus den Thetarelationen mit Einführung der τ-Functionen hervorgehen, seien hier nur 13 angeführt, welche ein System von einander unabhängiger Relationen dieser Art ausmachen. Dieselben lauten:***)

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}
-(a_2-a_4)(a_4-a_0)(a_0-a_2)\tau_{35}^2(u_1,u_2) &= (a_2-a_4)(a_0-a_3)(a_0-a_5)\tau_{24}^2(u_1,u_2)\\
&\quad+(a_4-a_0)(a_2-a_3)(a_2-a_5)\tau_{40}^2(u_1,u_2)\\
&\quad+(a_0-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)\tau_{02}^2(u_1,u_2),\\
-(a_2-a_4)(a_4-a_0)(a_0-a_2)\tau_{51}^2(u_1,u_2) &= (a_2-a_4)(a_0-a_5)(a_0-a_1)\tau_{24}^2(u_1,u_2)\\
&\quad+(a_4-a_0)(a_2-a_5)(a_2-a_1)\tau_{40}^2(u_1,u_2)\\
&\quad+(a_0-a_2)(a_4-a_5)(a_4-a_1)\tau_{02}^2(u_1,u_2),\\
-(a_2-a_4)(a_4-a_0)(a_0-a_2)\tau_{13}^2(u_1,u_2) &= (a_2-a_4)(a_0-a_1)(a_0-a_3)\tau_{24}^2(u_1,u_2)\\
&\quad+(a_4-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)\tau_{40}^2(u_1,u_2)\\
&\quad+(a_0-a_2)(a_4-a_1)(a_4-a_3)\tau_{02}^2(u_1,u_2),\\
&-(a_2-a_4)(a_4-a_1)(a_1-a_2)\cdot(a_0-a_3)(a_0-a_5)\tau^2(u_1,u_2)\\
&= (a_2-a_4)\tau_{01}^2(u_1,u_2)+(a_4-a_1)\tau_{02}^2(u_1,u_2)+(a_1-a_2)\tau_{40}^2(u_1,u_2),\\
&-(a_2-a_4)(a_4-a_3)(a_3-a_2)\cdot(a_0-a_5)(a_0-a_1)\tau^2(u_1,u_2)\\
&= (a_2-a_4)\tau_{03}^2(u_1,u_2)+(a_4-a_3)\tau_{02}^2(u_1,u_2)+(a_3-a_2)\tau_{40}^2(u_1,u_2),\\
&-(a_2-a_4)(a_4-a_5)(a_5-a_2)\cdot(a_0-a_1)(a_0-a_3)\tau^2(u_1,u_2)\\
&= (a_2-a_4)\tau_{05}^2(u_1,u_2)+(a_4-a_5)\tau_{02}^2(u_1,u_2)+(a_5-a_2)\tau_{40}^2(u_1,u_2),
\end{aligned}\right.$$

*) Die 16 Constanten, welche die σ-Functionen von den Θ-Functionen unterscheiden (vgl. P. D. §8), gruppiren sich zu 6 und 10; die hier angeführten Constanten, welche die τ Functionen von den Θ-Functionen unterscheiden, zu 1 und 15.

**) Vgl. P. D. § 2.

***) Ueber die entsprechenden Thetarelationen vgl. P. D. § 7.

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}
&-(a_4-a_0)(a_0-a_1)(a_1-a_4)\cdot(a_2-a_3)(a_2-a_5)\tau^2(u_1,u_2)\\
&\quad=(a_4-a_0)\tau_{21}^2(u_1,u_2)+(a_0-a_1)\tau_{24}^2(u_1,u_2)+(a_1-a_4)\tau_{02}^2(u_1,u_2),\\
&-(a_4-a_0)(a_0-a_3)(a_3-a_4)\cdot(a_2-a_5)(a_2-a_1)\tau^2(u_1,u_2)\\
&\quad=(a_4-a_0)\tau_{23}^2(u_1,u_2)+(a_0-a_3)\tau_{24}^2(u_1,u_2)+(a_3-a_4)\tau_{02}^2(u_1,u_2),\\
&-(a_4-a_0)(a_0-a_5)(a_5-a_4)\cdot(a_2-a_1)(a_2-a_3)\tau^2(u_1,u_2)\\
&\quad=(a_4-a_0)\tau_{25}^2(u_1,u_2)+(a_0-a_5)\tau_{24}^2(u_1,u_2)+(a_5-a_4)\tau_{02}^2(u_1,u_2),\\
&-(a_0-a_2)(a_2-a_1)(a_1-a_0)\cdot(a_4-a_3)(a_4-a_5)\tau^2(u_1,u_2)\\
&\quad=(a_0-a_2)\tau_{41}^2(u_1,u_2)+(a_2-a_1)\tau_{40}^2(u_1,u_2)+(a_1-a_0)\tau_{24}^2(u_1,u_2),\\
&-(a_0-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_0)\cdot(a_4-a_5)(a_4-a_1)\tau^2(u_1,u_2)\\
&\quad=(a_0-a_2)\tau_{43}^2(u_1,u_2)+(a_2-a_3)\tau_{40}^2(u_1,u_2)+(a_3-a_0)\tau_{24}^2(u_1,u_2),\\
&-(a_0-a_2)(a_2-a_5)(a_5-a_0)\cdot(a_4-a_1)(a_4-a_3)\tau^2(u_1,u_2)\\
&\quad=(a_0-a_2)\tau_{45}^2(u_1,u_2)+(a_2-a_5)\tau_{40}^2(u_1,u_2)+(a_5-a_0)\tau_{24}^2(u_1,u_2),\\
&(a_0-a_1)(a_2-a_4)\tau_{01}(u_1,u_2)\tau_{24}(u_1,u_2)+(a_2-a_1)(a_4-a_0)\tau_{21}(u_1,u_2)\tau_{40}(u_1,u_2)\\
&\quad+(a_4-a_1)(a_0-a_2)\tau_{41}(u_1,u_2)\,\tau_{02}(u_1,u_2)=0.
\end{aligned}\right.$$

Die Einführung der τ-Functionen hat nun den Erfolg, dass die Relationen (23) in ihrer einfachsten Form geschrieben werden können. Die Vergleichung der oben bestimmten Constanten $c_{i\varkappa}^2$ mit den constanten Factoren, welche die Thetafunctionen in die σ- und τ-Functionen überführen, giebt das Resultat:

Haben die Argumente u_1, u_2 die Form:

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}
u_1 &\equiv \int_{a_0}^{z,s} dw_1 + \int_{a_2}^{a_4} dw_1 \equiv \int_{a_1}^{z,s} dw_1 + \int_{a_3}^{a_5} dw_1,\\
u_2 &\equiv \int_{a_0}^{z,s} dw_2 + \int_{a_2}^{a_4} dw_2 \equiv \int_{a_1}^{z,s} dw_2 + \int_{a_3}^{a_5} dw_2,
\end{aligned}\right.$$

so drücken sich die Quadrate der 16 τ-Functionen in ihrer Abhängigkeit von z, s also aus:

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned}
\tau^2(u_1,u_2) &= 0,\\
\tau_{i\varkappa}^2(u_1,u_2) &= \varphi^2(a_i-z)(a_\varkappa-z),
\end{aligned}\right.$$

*wo φ^2 einen Proportionalitätsfactor bedeutet.**)

*) Diese Parameterdarstellung stimmt ihrem Wesen nach mit einem von Prym, Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen, a. a. O., S. 57, F gegebenen Formelsystem überein. Ein Blick auf die Formeln (I) des Textes giebt auch die Erklärung dafür, dass jede der 5 von Prym a. a. O. betrachteten alge-

§ 7.

Wechselbeziehung zwischen den beiden Gruppirungen der 16 Thetafunctionen.

Die Parameterdarstellungen § 1, (I) und § 6, (I) bringen, wie bereits hervorgehoben, am unmittelbarsten die doppelte Gruppirung der 16 Thetafunctionen (σ- oder τ-Functionen) zur Anschauung.

Die vorkommenden algebraischen Ausdrücke entsprechen in der Abhängigkeit von ihren *variablen Argumenten* genau dem Gegensatz der algebraischen Charakteristiken 1. und 2. Art der Thetafunctionen. Dass aber auch auf die *constanten Factoren* der den Thetafunctionen proportional zu setzenden algebraischen Functionen dieser Gegensatz seinen Einfluss ausübt, zeigt sich in der Beziehung der σ-Functionen einerseits und der τ-Functionen andererseits zu den Thetafunctionen.

Die Gruppirung der 16 Thetafunctionen zu 6 und 10 tritt aber nicht *nur* in der Parameterdarstellung § 1, (I) und die Gruppirung zu 1 und 15 nicht *nur* in der Parameterdarstellung § 6, (I) hervor; man kann sofort neben jede dieser beiden Parameterdarstellungen je 15 weitere mit gleicher Gruppirung der 16 Thetafunctionen hinstellen.

In § 5 zeigte sich, dass unter Annahme der Argumente

$$\left(u \equiv \int_{a_0}^{z,s} dw + \int_{a_2}^{a_4} dw \equiv \int_{a_1}^{z,s} dw + \int_{a_3}^{a_5} dw\right)$$

die Function $\Theta((u))$ identisch, die 15 Functionen $\Theta_{i\varkappa}((u))$ je für ein Paar verschiedener Verzweigungspunkte $z = a_i$ und $z = a_\varkappa$ verschwindet. Auf demselben Wege ergiebt sich allgemein:

Nimmt man als Argumente der 16 Thetafunctionen eine der 16 Formen:

$$\left(u \equiv \int_{a_\lambda}^{z,s} dw\right) \quad \text{und} \quad \left(u \equiv \int_{a_{\lambda_0}}^{z,s} dw + \int_{a_{\lambda_1}}^{a_{\lambda_2}} dw \equiv \int_{a_{\lambda_3}}^{z,s} dw + \int_{a_{\lambda_4}}^{a_{\lambda_5}} dw\right),$$

---

braischen Functionen auf 4 Weisen durch Thetaquotienten dargestellt werden kann. In der That kann auf 4 Weisen durch Division zweier Formeln I des Textes der Quotient $\frac{a_i - z}{a_\varkappa - z}$ erhalten werden, welcher den Prym'schen Functionen x, $1 - x$, $1 - \varkappa^2 x$, $1 - \lambda^2 x$, $1 - \mu^2 x$ entspricht; so ist z. B.

$$\frac{a_0 - z}{a_1 - z} = \frac{\tau_{02}^2((u))}{\tau_{12}^2((u))} = \frac{\tau_{03}^2((u))}{\tau_{13}^2((u))} = \frac{\tau_{04}^2((u))}{\tau_{14}^2((u))} = \frac{\tau_{05}^2((u))}{\tau_{15}^2((u))}.$$

Die hiernach zwischen 4 τ-Functionen bestehenden Relationen von der Form $\tau_{02}((u)).\tau_{13}((u)) \pm \tau_{12}((u)).\tau_{03}((u)) = 0$ sind Productrelationen vom Typus der letzten Formel (25) des Textes, aus denen aber wegen der Voraussetzung $\tau((u)) = 0$ ein Glied weggefallen ist.

so verschwindet jedesmal *eine* Thetafunction, und zwar bezüglich:

$$\Theta_\lambda((u)) \quad \text{und} \quad \Theta_{\substack{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\\ \lambda_3\lambda_4\lambda_5}}((u)),$$

identisch, die 15 übrigen aber für die 15 Paare zweier verschiedener Verzweigungspunkte (vgl. auch § 2, (II)); oder:

I. *Die* 16 *Thetafunctionen mit den Argumenten:*

$$(26) \quad \left(u \equiv \int_{a_\lambda}^{z,s} dw\right) \quad \textit{und} \quad \left(u \equiv \int_{a_{\lambda_0}}^{z,s} dw + \int_{a_{\lambda_1}}^{a_{\lambda_2}} dw \equiv \int_{a_{\lambda_3}}^{z,s} dw + \int_{a_{\lambda_4}}^{a_{\lambda_5}} dw\right)$$

$((\lambda_0\lambda_1\lambda_2)(\lambda_3\lambda_4\lambda_5) \neq (024)(135))$ *haben, nur in veränderter Reihenfolge, dieselben Nullpunktpaare, wie die* 16 *Thetafunctionen mit den Argumenten:*

$$\left(u \equiv \int_{a_0}^{z,s} dw + \int_{a_2}^{a_4} dw \equiv \int_{a_1}^{z,s} dw + \int_{a_3}^{a_5} dw\right).$$

Diesem Satze entsprechend erhält man 16 Parameterdarstellungen, von denen die Parameterdarstellung § 6, (I) ein Repräsentant ist, und bei denen allen die 16 Thetafunctionen zu 1 und 15 gruppirt sind.

Dass ebenso die Parameterdarstellung § 1, (I) Repräsentant ist von 16 Parameterdarstellungen mit der Gruppirung der 16 Thetafunctionen zu 6 und 10, ergiebt sich auf folgende Weise. Um die Nullpunkte der 16 Thetafunctionen:

$$\Theta_\lambda\left(\left(\int_{z_2,-s_2}^{z,s} dw + \int_{a_i}^{a_\varkappa} dw\right)\right)$$

und

$$\Theta_{\substack{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\\ \lambda_3\lambda_4\lambda_5}}\left(\left(\int_{z_2,-s_2}^{z,s} dw + \int_{a_i}^{a_\varkappa} dw\right)\right)$$

zu bestimmen, können resp. die 16 Additionstheoreme dienen:

$$\left(\int_{a_\lambda}^{z_0,s_0} dw + \int_{a_\lambda}^{z_1,s_1} dw + \int_{a_\lambda}^{z_2,s_2} dw + \int_{a_i}^{a_\varkappa} dw \equiv 0\right)$$

und

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\int_{a_{\lambda_0}}^{z_0,s_0} dw + \int_{a_{\lambda_1}}^{z_1,s_1} dw + \int_{a_{\lambda_2}}^{z_2,s_2} dw + \int_{a_i}^{a_\varkappa} dw \equiv 0\right), \\ &\left(\int_{a_{\lambda_3}}^{z_0,s_0} dw + \int_{a_{\lambda_4}}^{z_1,s_1} dw + \int_{a_{\lambda_5}}^{z_2,s_2} dw + \int_{a_i}^{a_\varkappa} dw \equiv 0\right); \end{aligned}\right.$$

denn nimmt man die 3 Stellen z_0, s_0; z_1, s_1; z_2, s_2 der Reihe nach diesen 16 Additionstheoremen entsprechend an, so können die obigen Thetafunctionen bezüglich in der Form geschrieben werden:

$$\Theta_\lambda\left(\left(\int_{a_\lambda}^{z,s} dw - \int_{a_\lambda}^{z_0, s_0} dw - \int_{a_\lambda}^{z_1, s_1} dw\right)\right)$$

und

$$\Theta_{\substack{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\\ \lambda_3\lambda_4\lambda_5}}\left(\left(\int_{a_{\lambda_2}}^{z,s} dw - \int_{a_{\lambda_0}}^{z_0, s_0} dw - \int_{a_{\lambda_1}}^{z_1, s_1} dw\right)\right),$$

und haben somit nach § 4, (II) die Nullpunkte $z, s = z_0, s_0$ und $z, s = z_1, s_1$, welche aus den angeführten Additionstheoremen bei gegebenem z_2, s_2 sich bestimmen. Diese 16 Additionstheoreme aber sind, wie man leicht übersieht, mit den 16 Additionstheoremen (13) und (14), wie auch a_i und $a_\varkappa$ aus den 6 Verzweigungspunkten gewählt sein mögen, in irgend einer Reihenfolge identisch. Daraus folgt aber:

II. *Die* 16 *Thetafunctionen mit den Argumenten:*

$$\left(u \equiv \int_{z_2, -s_2}^{z,s} dw + \int_{a_i}^{a_\varkappa} dw\right) \tag{27}$$

($i \neq \varkappa$) *haben, nur in veränderter Reihenfolge, dieselben Nullpunktpaare, wie die* 16 *Thetafunctionen mit den Argumenten:*

$$\left(u \equiv \int_{z_2, -s_2}^{z,s} dw\right).$$

Im Einzelnen zeigt die nähere Vergleichung der eben angeführten Additionstheoreme mit den Additionstheoremen (13) und (14), dass, wenn $\left(u \equiv \int_{z_2, -s_2}^{z,s} dw\right)$ ist, die Nullpunkte von:

$$\Theta_{\lambda_0}\left(\left(u + \int_{a_{\lambda_0}}^{a_{\lambda_1}} dw\right)\right),\quad \Theta_{\lambda_1}\left(\left(u + \int_{a_{\lambda_0}}^{a_{\lambda_1}} dw\right)\right),\quad \Theta_{\lambda_2}\left(\left(u + \int_{a_{\lambda_0}}^{a_{\lambda_1}} dw\right)\right),$$

$$\Theta_{\substack{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\\ \lambda_3\lambda_4\lambda_5}}\left(\left(u + \int_{a_{\lambda_0}}^{a_{\lambda_1}} dw\right)\right),\qquad \Theta_{\substack{\lambda_0\lambda_2\lambda_3\\ \lambda_1\lambda_4\lambda_5}}\left(\left(u + \int_{a_{\lambda_0}}^{a_{\lambda_1}} dw\right)\right),$$

beziehungsweise übereinstimmen mit den Nullpunkten von:

$$\Theta_{\lambda_1}((u)),\quad \Theta_{\lambda_0}((u)),\quad \Theta_{\substack{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\\ \lambda_3\lambda_4\lambda_5}}((u)),\quad \Theta_{\lambda_2}((u)),\quad \Theta_{\substack{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\\ \lambda_0\lambda_4\lambda_5}}((u)),$$

wobei λ_0, λ_1 zwei gegebene der 6 Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 und $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ die 4 übrigen in irgend welcher Reihenfolge bedeuten.

II'. *Die 6 Functionen:*

$$\Theta_{\lambda_1}((u)),\quad \Theta_{\lambda_0}((u)),\quad \Theta_{\substack{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\\ \lambda_3\lambda_4\lambda_5}}((u)),$$

(*wo* λ_2 *die* 4 *von* λ_1 *und* λ_0 *verschiedenen der* 6 *Zahlen* 0, 1, 2, 3, 4, 5 *durchläuft*), *welche sich hierbei neben die* 6 *ungeraden Thetafunctionen:*

$$\Theta_{\lambda_0}\left(\left(u+\int_{a_{\lambda_0}}^{a_{\lambda_1}} dw\right)\right),\quad \Theta_{\lambda_1}\left(\left(u+\int_{a_{\lambda_0}}^{a_{\lambda_1}} dw\right)\right),\quad \Theta_{\lambda_2}\left(\left(u+\int_{a_{\lambda_0}}^{a_{\lambda_1}} dw\right)\right)$$

*stellen, bilden stets ein Rosenhain'sches System**) *von* 6 *Thetafunctionen.*

Wie hiernach die Gruppirung der 16 Thetafunctionen zu 6 und 10 die Bestimmung der Nullpunkte der Thetafunctionen mit den 16 Argumentenformen:

$$\left(u \equiv \int_{z_0,-s_0}^{z,s} dw\right) \quad\text{und}\quad \left(u \equiv \int_{z_0,-s_0}^{z,s} dw + \int_{a_i}^{a_\varkappa} dw\right)$$

beherrscht, so muss sie auch in den 16 Parameterdarstellungen der Thetafunctionen dieser Argumente hervortreten, von denen die Parameterdarstellung § 1, (I) ein Repräsentant ist.

Von der Aufstellung der 32 im Vorstehenden charakterisirten Parameterdarstellungen darf an dieser Stelle um so eher abgesehen werden, als in § 12 allgemeinere Parameterdarstellungen gegeben werden sollen, welche jene 32 in sich schliessen. Dagegen sei über die Anwendung der 32 Parameterdarstellungen auf die Lösung des Umkehrproblems noch eine Bemerkung eingeschaltet.

Die 16 Parameterdarstellungen vom Typus § 1, (I) vermitteln die Lösung *der* 16 *Jacobi'schen Umkehrprobleme***) der hyperelliptischen Integrale 1. Ordnung, welche bezüglich aus den 16 Ansätzen:

---

*) Ueber diesen Begriff vgl. Borchardt, Ueber die Darstellung der Kummer'schen Fläche 4. Ordnung mit 16 Knotenpunkten durch die Göpel'sche biquadratische Relation zwischen 4 Thetafunctionen mit 2 Veränderlichen, Crelle's Journal, Bd. 83, SS. 5. 6 (1877).

**) Vgl. über diese Benennung C. Neumann, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale, 1. Aufl. (Leipzig, 1865), S. 514.

$$(28)\qquad \left.\begin{aligned} \int_{a_\mu}^{z_1,s_1} dw_1 + \int_{a_\mu}^{z_2,s_2} dw_1 \equiv u_1 \\ \int_{a_\mu}^{z_1,s_1} dw_2 + \int_{a_\mu}^{z_2,s_2} dw_2 \equiv u_2 \end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned} \int_{a_i}^{z_1,s_1} dw_1 + \int_{a_\varkappa}^{z_2,s_2} dw_1 \equiv u_1 \\ \int_{a_i}^{z_1,s_1} dw_2 + \int_{a_\varkappa}^{z_2,s_2} dw_2 \equiv u_2 \end{aligned}\right\},$$

bei beliebig gegebenen Werthen u_1, u_2 die beiden Stellen z_1, s_1 und z_2, s_2 zu bestimmen verlangen. Hierbei sind die unteren Grenzen der Integralsummen entweder demselben Verzweigungspunkte a_μ gleich oder den 15 Paaren a_i, $a_\varkappa$ zweier verschiedener Verzweigungspunkte; die erstere Annahme ist nur für *einen* Fall zu zählen, weil die Summen u_1, u_2 von a_μ unabhängig sind (vgl. § 1, 2).

Die 16 Parameterdarstellungen vom Typus § 6, I vermitteln die Lösung *der* 16 *Riemann'schen Umkehrprobleme* der hyperelliptischen Integrale 1. Ordnung, welche bezüglich aus den 16 Ansätzen:

$$\left.\begin{aligned} \int_{a_\lambda}^{z,s} dw_1 \equiv u_1 \\ \int_{a_\lambda}^{z,s} dw_2 \equiv u_2 \end{aligned}\right\},\quad \Theta_\lambda(u_1,u_2)=0,$$

$$(29)\qquad \left.\begin{aligned} \int_{a_{\lambda_0}}^{z,s} dw_1 + \int_{a_{\lambda_1}}^{a_{\lambda_2}} dw_1 \equiv \int_{a_{\lambda_3}}^{z,s} dw_1 + \int_{a_{\lambda_4}}^{a_{\lambda_5}} dw_1 \equiv u_1 \\ \int_{a_{\lambda_0}}^{z,s} dw_2 + \int_{a_{\lambda_1}}^{a_{\lambda_2}} dw_2 \equiv \int_{a_{\lambda_3}}^{z,s} dw_2 + \int_{a_{\lambda_4}}^{a_{\lambda_5}} dw_2 \equiv u_2 \end{aligned}\right\},\quad \Theta_{\substack{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\\ \lambda_3\lambda_4\lambda_5}}(u_1,u_2)=0$$

bei gegebenen, aber bezüglich der beigeschriebenen Relation genügenden Werthen u_1, u_2 die Stelle s, z zu bestimmen verlangen.

Während also die 16 *Jacobi'schen und die* 16 *Riemann'schen Umkehrprobleme sich zu* 1 *und* 15 *und bezüglich zu* 6 *und* 10 *gruppiren, zeigen die beiderseits zugehörigen Parameterdarstellungen, jede in sich, die Gruppirung der* 16 *Thetafunctionen zu* 6 *und* 10 *und bezüglich zu* 1 *und* 15 (vgl. die allgemeineren Sätze § 9, I. II).

Da nun die algebraischen Charakteristiken 1. und 2. Art der 16 Thetafunctionen sich an die Parameterdarstellungen § 1, I und § 6, I anschliessen, so hat man deren Stellung zu den Umkehrproblemen so zu bezeichnen:

Die Charakteristiken 1. *Art zeichnen von den* 16 *Jacobi'schen Umkehrproblemen das eine aus:*

$$(30)\qquad \int_{z_2,\,-s_2}^{z_1,\,s_1} dw_1 \equiv u_1,\qquad \int_{z_2,\,-s_2}^{z_1,\,s_1} dw_2 \equiv u_2;\text{*)}$$

die der 2. *Art von den* 16 *Riemann'schen Umkehrproblemen das eine:*

$$(31)\qquad \left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{a_0}^{z,s} dw_1 + \int_{a_2}^{a_4} dw_1 \equiv u_1, \\ \displaystyle\int_{a_0}^{z,s} dw_2 + \int_{a_2}^{a_4} dw_2 \equiv u_2, \end{array}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{a_1}^{z,s} dw_1 + \int_{a_3}^{a_5} dw_1 \equiv u_1, \\ \displaystyle\int_{a_1}^{z,s} dw_2 + \int_{a_3}^{a_5} dw_2 \equiv u_2, \end{array}\right.$$

$$\Theta(u_1, u_2) = 0.$$

Kapitel III.

Die algebraischen Charakteristiken 1. und 2. Art in ihrer Beziehung zu dem Abel'schen Theorem.

§ 8.

Die 16 Additionstheoreme der hyperelliptischen Integrale.

Mit Rücksicht auf § 1, 2 kann jede Summe von Integralen der Form $\left(\int_{z_2,s_2}^{z_1,s_1} dw\right)$ mit *beliebigen* unteren und oberen Grenzen in eine Summe solcher Integrale verwandelt werden, deren untere Grenzen *Verzweigungspunkte* der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche z, s sind. Man wird daher als allgemeine Form solcher Summen die Form:

$$\left(S^{(q+1)} \equiv \sum_0^q{}^i \int_{a_i}^{z_i,\,s_i} dw\right)$$

zu Grunde legen dürfen, wo z_i, s_i $q+1$ beliebige Stellen des hyperelliptischen Gebildes sind, jeder der $q+1$ Punkte a_i aber einer der 6 Verzweigungspunkte $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ desselben ist. Die der Congruenz beigegebenen Klammern sollen wieder andeuten, dass dieselbe die *zwei* Congruenzen vertritt:

$$S_1^{(q+1)} \equiv \sum_0^q{}^i \int_{a_i}^{z_i,\,s_i} dw_1,\qquad S_2^{(q+1)} \equiv \sum_0^q{}^i \int_{a_i}^{z_i,\,s_i} dw_2.$$

---

*) Dieses eine habe ich in der unter P. D. bezeichneten Abhandlung ausführlich behandelt.

Wie nun auch die α_i aus den 6 Verzweigungspunkten ausgewählt sein mögen, so lässt sich die Summe $(S^{(q+1)})$ immer auf eine von 16 Normalformen reduciren; das System der 16 Normalformen ist der Anzahl $q+1$ der Summenelemente charakteristisch und von verschiedener Art, jenachdem $q+1$ gerade oder ungerade ist.

Ist zuerst $q = 2\omega$, also $q+1$ *ungerade*, so gilt der Satz:

I. *Jede Summe* $(S^{2\omega+1})$ *von* $2\omega+1$ *Integralen kann auf eine der 16 Normalformen gebracht werden:*

$$(32) \qquad \left(S_\lambda^{(2\omega+1)} \equiv \int_{a_\lambda}^{s_0, s_0} dw + \sum_1^{2\omega} {}^i \int_{a_\mu}^{s_i, s_i} dw\right),$$

$$(33) \quad \left(S^{(2\omega+1)}_{\substack{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\\ \lambda_3\lambda_4\lambda_5}} \equiv \int_{a_{\lambda_0}}^{s_0, s_0} dw + \int_{a_{\lambda_1}}^{a_{\lambda_2}} dw + \sum_1^{2\omega} \int_{a_\mu}^{s_i, s_i} dw \equiv \int_{a_{\lambda_4}}^{s_0, s_0} dw + \int_{a_{\lambda_3}}^{a_{\lambda_5}} dw + \sum_1^{2\omega} {}^i \int_{a_\mu}^{s_i, s_i} dw\right),$$

wo λ *und* μ *je eine der* 6 *Zahlen* 0, 1, 2, 3, 4, 5 *und* $(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)$ *eine der* 10 *Gruppirungen dieser* 6 *Zahlen in* 2 *Tripel bedeutet.*

Auf die Zahl μ kommt nichts an, da die Summe

$$\left(\sum_1^{2\omega} {}^i \int_{a_\mu}^{s_i, s_i} dw \equiv \sum_1^{\omega} {}^i \int_{s_{\omega+i},\, -s_{\omega+i}}^{s_i, s_i} dw\right)$$

von der Wahl des Verzweigungspunktes a_μ unabhängig ist (vgl. § 1, 2). Auch können die 3 Verzweigungspunkte a_{λ_0}, a_{λ_1}, a_{λ_2} und ebenso a_{λ_3}, a_{λ_4}, a_{λ_5} unter sich beliebig vertauscht werden; die rechten Seiten der Congruenzen (33) bleiben dabei sich selbst congruent. *Demnach umfasst der Typus* $(S_\lambda^{(2\omega+1)})$ 6 *verschiedene Formen, der Typus* $(S^{(2\omega+1)}_{\substack{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\\ \lambda_3\lambda_4\lambda_5}})$ 10 *verschiedene Formen.*

Um den Satz zu beweisen, wähle man einen beliebigen Verzweigungspunkt a_{λ_0} und setze unter Benutzung der Congruenzen:

$$\left(\int_{a_i}^{s_i, s_i} dw \equiv \int_{a_{\lambda_0}}^{s_i, s_i} dw + \int_{a_i}^{a_{\lambda_0}} dw\right)$$

die gegebene Summe $(S^{(2\omega+1)})$ in die Form:

$$\left(S^{(2\omega+1)} \equiv \int_{a_{\lambda_0}}^{s_0, s_0} dw + P + \sum_1^{2\omega} {}^i \int_{a_{\lambda_0}}^{s_i, s_i} dw\right),$$

wo P eine Summe von $2\omega+1$ Integralen, je zwischen 2 Verzweigungspunkten genommen, bedeutet. Aus dieser Summe fallen zuerst alle *einzelnen* Integrale mit 2 *gleichen* Grenzen heraus, weil sie $\equiv 0$ sind.

Irgend *zwei* Integrale aber mit je 2 *verschiedenen* Grenzen können immer auf *eines* reducirt werden; und zwar unter Anwendung der Formel (vgl. § 3, 15):

$$\left(\int_{a_{\lambda_0}}^{a_{\lambda_1}} dw + \int_{a_{\lambda_2}}^{a_{\lambda_3}} dw \equiv \int_{a_{\lambda_4}}^{a_{\lambda_5}} dw\right),$$

wenn sie zusammen 4 verschiedene Verzweigungspunkte $(a_{\lambda_0}, a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, a_{\lambda_3})$ als Grenzen haben, wobei dann $a_{\lambda_4}, a_{\lambda_5}$ die 2 noch übrigen der 6 Verzweigungspunkte bedeuten; und der Formel:

$$\left(\int_{a_{\lambda_0}}^{a_{\lambda_1}} dw + \int_{a_{\lambda_1}}^{a_{\lambda_2}} dw \equiv \int_{a_{\lambda_0}}^{a_{\lambda_2}} dw\right),$$

(in der λ_0 und λ_2 verschieden oder gleich sind) wenn sie zusammen nur 3 oder 2 verschiedene Verzweigungspunkte $(a_{\lambda_0}, a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2})$ als Grenzen haben. Durch fortgesetzte Anwendung dieser Regeln kann P auf die Form:

$$\left(P \equiv \int_{a_{\lambda_1}}^{a_{\lambda_2}} dw\right)$$

gebracht werden, sodass, da überdies

$$\left(\sum_1^{2\omega}{}_i \int_{a_{\lambda_0}}^{s_i, s_i} dw\right)$$

von λ_0 unabhängig ist,

$$\text{(34)} \qquad \left(S^{(2\omega+1)} \equiv \int_{a_{\lambda_0}}^{s_\omega, s_0} dw + \int_{a_{\lambda_1}}^{a_{\lambda_2}} dw + \sum_1^{2\omega}{}_i \int_{a_\mu}^{s_i, s_i} dw\right)$$

wird. Hiermit ist die geforderte Reduction ausgeführt; sind die 3 Zahlen λ_0, λ_1, λ_2 alle 3 verschieden, so hat man den Typus (33), sind aber 2 oder alle 3 einander gleich, den Typus (32).

Eine solche Reduction der gegebenen Summe $(S^{(2\omega+1)})$ führt aber auch stets zu demselben Resultat; denn findet man bei einer Abänderung der einzelnen Schritte des Reductionsverfahrens für dieselbe Summe:

$$\text{(34')} \qquad \left(S^{(2\omega+1)} \equiv \int_{a_{\lambda_0'}}^{s_\omega, s_0} dw + \int_{a_{\lambda_1'}}^{a_{\lambda_2'}} dw + \sum_1^{2\omega}{}_i \int_{a_{\mu'}}^{s_i, s_i} dw\right),$$

so müssen, da auf μ und μ' nichts ankommt, die Congruenzen:

$$\left(\int_{a_{\lambda_0}}^{s_0, s_0} dw + \int_{a_{\lambda_1}}^{a_{\lambda_2}} dw \equiv \int_{a_{\lambda_0'}}^{s_0, s_0} dw + \int_{a_{\lambda_1'}}^{a_{\lambda_2'}} dw\right),$$

oder die hiermit äquivalenten:

$$\left(\int_{a_{\lambda_0}}^{a_{\lambda_0'}} dw + \int_{a_{\lambda_1}}^{a_{\lambda_1'}} dw + \int_{a_{\lambda_2}}^{a_{\lambda_2'}} dw \equiv 0\right)$$

bestehen. Dies ist aber nach § 3, A_4 nur möglich, wenn entweder die 6 Zahlen $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_0', \lambda_1', \lambda_2'$ alle 6 verschieden oder aber paarweise einander gleich sind. Im ersteren Falle sind die Formen (34) und (34') äquivalent und der doppelten Form des Typus (33) entsprechend; im letzteren Falle sind 2 verschiedene Fälle möglich: entweder die beiden Tripel $(\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2)$ und $(\lambda_0' \lambda_1' \lambda_2')$ sind, abgesehen von der Reihenfolge ihrer beiderseitigen Elemente identisch — dann repräsentiren die Formen (34) und (34') beide dieselbe Form des Typus (33) oder (32) — oder die beiden Tripel sind nicht identisch, aber es sind in jedem Tripel 2 Elemente gleich, etwa $\lambda_1 = \lambda_2$ und $\lambda_1' = \lambda_2'$, und alsdann ist das restirende Element des einen gleich dem des anderen, $\lambda_0 = \lambda_0'$ — dann sind die Formen (34) und (34') von $\lambda_1 = \lambda_2$ und $\lambda_1' = \lambda_2'$ bezüglich unabhängig und repräsentiren, weil $\lambda_0 = \lambda_0'$, beide dieselbe Form des Typus (32). Hiermit ist die eindeutige Bestimmtheit der Reduction bewiesen.

Ist nunmehr $q = 2\omega - 1$, also $q + 1$ *gerade*, so gilt der Satz:

II. *Jede Summe* $(S^{2\omega})$ *von* 2ω *Integralen kann auf eine der* 16 *Normalformen gebracht werden:*

$$(35) \qquad \left(S^{(2\omega)} \equiv \sum_0^{2\omega-1} {}^i \int_{a_\mu}^{z_i, s_i} dw\right),$$

$$(36) \qquad \left(S^{(2\omega)}_{\lambda_0\lambda_1} \equiv \int_{a_{\lambda_0}}^{a_{\lambda_1}} dw + \sum_0^{2\omega-1} {}^i \int_{a_\mu}^{z_i, s_i} dw\right),$$

wo μ *eine beliebige der* 6 *Zahlen* 0, 1, 2, 3, 4, 5 *und* $(\lambda_0 \lambda_1)$ *eines der* 15 *Paare zweier verschiedener dieser Zahlen ist.*

Auf die Zahl μ kommt nichts an, weil die Summe

$$\left(\sum_0^{2\omega-1} {}^i \int_{a_\mu}^{z_i, s_i} dw \equiv \sum_0^{\omega-1} {}^i \int_{z_{i+\omega},\, -s_{i+\omega}}^{z_i, s_i} dw\right)$$

von a_μ unabhängig ist. *Demnach umfasst der Typus* $(S^{(2\omega)})$ *nur eine, der Typus* $(S^{(2\omega)}_{\lambda_0\lambda_1})$ *aber* 15 *verschiedene Formen.*

Um den Satz zu beweisen, bringt man unter Annahme eines beliebigen Verzweigungspunktes a_μ die gegebene Summe $(S^{(2\omega)})$, wie oben, auf die Form:

$$\left(S^{(2\omega)} \equiv P + \sum_0^{2\omega-1}{}_i \int_{a_\mu}^{\varepsilon_i, \varepsilon_i} dw\right)$$

und hierauf (P) auf die Form:

$$\left(P \equiv \int_{a_{\lambda_0}}^{a_{\lambda_1}} dw\right).$$

Damit wird:

$$\left(S^{(2\omega)} \equiv \int_{a_{\lambda_0}}^{a_{\lambda_1}} dw + \sum_0^{2\omega-1}{}_i \int_{a_\mu}^{\varepsilon_i, \varepsilon_i} dw\right),$$

womit der Typus (35) oder (36) gewonnen ist, jenachdem λ_0 und λ_1 gleich oder verschieden ausfallen. Dass die Reduction trotz der Willkür ihrer einzelnen Schritte auf ein bestimmtes Resultat führt, folgt ähnlich, wie oben, aus der Bemerkung, dass die Congruenzen:

$$\left(\int_{a_{\lambda_0}}^{a_{\lambda_1}} dw \equiv \int_{a_{\lambda_0'}}^{a_{\lambda_1'}} dw\right)$$

nur bestehen können, wenn die 4 Zahlen λ_0, λ_1, λ_0', λ_1' paarweise gleich sind (vgl. § 3, A_4).

An die beiden Sätze I und II schliessen sich noch 2 Zusätze an, die sich aus dem Anblick der Normalformen (32), (33) und (35), (36) unter eventueller Benutzung der Formeln § 3, 15 ohne Weiteres ergeben:

III. *Vermehrt man in dem System der* 16 *Summen* (32), (33) *jede Summe um das halbe Periodenintegral* $\left(\int_{a_{\lambda_0}}^{a_{\lambda_1}} dw\right)$, *so geht das System in der Weise in sich selbst über, dass im Einzelnen übergehen* S_{λ_0} *in* S_{λ_1}, S_{λ_1} *in* S_{λ_0}, S_{λ_2} *in* $S_{\substack{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\\ \lambda_3\lambda_4\lambda_5}}$, $S_{\substack{\lambda_0\lambda_1\lambda_3\\ \lambda_2\lambda_4\lambda_5}}$ *in* S_{λ_3}, $S_{\substack{\lambda_0\lambda_2\lambda_3\\ \lambda_1\lambda_4\lambda_5}}$ *in* $S_{\substack{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\\ \lambda_0\lambda_4\lambda_5}}$.

IV. *Vermehrt man in dem System der* 16 *Summen* (35), (36) *jede Summe um das halbe Periodenintegral* $\left(\int_{a_{\lambda_0}}^{a_{\lambda_1}} dw\right)$, *so geht das System*

in der Weise in sich selbst über, dass im Einzelnen übergehen S in $S_{\lambda_0\lambda_1}$, $S_{\lambda_0\lambda_1}$ in S, $S_{\lambda_0\lambda_2}$ in $S_{\lambda_1\lambda_2}$, $S_{\lambda_1\lambda_2}$ in $S_{\lambda_0\lambda_2}$, $S_{\lambda_2\lambda_3}$ in $S_{\lambda_4\lambda_5}$ *).

In beiden Sätzen sind unter λ_0, λ_1 zwei gegebene der 6 Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, *unter λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 die 4 übrigen in irgend welcher Reihenfolge zu verstehen.*

Die Sätze I und II können zur Gruppirung der Additionstheoreme der hyperelliptischen Integrale verwerthet werden. *Ein Additionstheorem*, welches eine Beziehung zwischen $q'+1$ Stellen, z_i, s_i des hyperelliptischen Gebildes in der Form:

$$\left(\sum_0^{q'}{}_i \int_{\alpha_i}^{z_i, s_i} dw \equiv 0\right)$$

ausdrückt, soll *von der* $(q+1)$*ten Ordnung* heissen, wenn die $q'+1$ unteren Grenzen α_i seiner Integrale sämmtlich Verzweigungspunkte sind, unter den $q'+1$ oberen Grenzen z_i, s_i aber $q+1$ $(q \leq q')$ Stellen sich vorfinden, die nicht Verzweigungspunkte sind und von denen auch keine 2 einander entgegengesetzt sind. Die letztere Bedingung ist deshalb hinzugefügt, weil 2 entgegengesetzte Stellen z, s und z', $s' = z$, $-s$ der Bedingung:

$$\left(\int_{\alpha}^{z, s} dw + \int_{\alpha'}^{z', s'} dw \equiv \int_{\alpha}^{\alpha'} dw\right)$$

entsprechen und aus der vorgelegten Congruenz herausfallen würden.

Man kann alsdann mit Bezugnahme auf die Sätze I und II das Resultat aussprechen:

V. *Von gegebener Ordnung giebt es* 16 *verschiedene Additionstheoreme, welche sich zu* 6 *und* 10 *oder zu* 1 *und* 15 *gruppiren, jenachdem die gegebene Ordnung ungerade oder gerade ist.*

Als Beispiel vergleiche man die 16 Additionstheoreme 3. Ordnung in § 3, 13. 14.

Es bedarf kaum des Hinweises darauf, *dass die Vertheilung der* 16 *Additionstheoreme gerader und ungerader Ordnung auf die* 6 *Verzweigungspunkte des hyperelliptischen Gebildes bezüglich durch die algebraischen Charakteristiken* 1. *und* 2. *Art zum Ausdrucke gebracht wird.* Es ist dies bereits durch die Bezeichnung der Summen S in (32), (33) und (35), (36) mit den algebraischen Charakteristiken angedeutet.

---

*) Dieser Satz enthält als speciellen Fall $(q+1=0)$ den bekannten Satz über die Addition *einer* Riemann'schen Charakteristik zu den 16 übrigen, vgl. Krazer, a. a. O. S. 5.

§ 9.

Bestimmung der Nullpunkte der Thetafunctionen mit beliebig vielen Parametern durch die Additionstheoreme der hyperelliptischen Integrale.

Durch die 16 Additionstheoreme $(q+1)$ter Ordnung werden die Nullpunkte der 16 Thetafunctionen mit $q-1$ Parametern bestimmt. Diese Parameter sollen in die Thetafunctionen in der Weise eingehen, dass die Argumente (u) der letzteren als Summen von q-Integralen in der Form:

$$(37) \qquad \left(u = \int_{a}^{z,s} dw + \sum_{0}^{q-2} {}^{i} \int_{a_i}^{z_i,s_i} dw\right),$$

genommen und hierin z, s als eine veränderliche, z_i, s_i aber als $q-1$ gegebene Stellen des hyperelliptischen Gebildes gedacht werden, unter denen sich keine 2 entgegengesetzten befinden.

Die unteren Grenzen a und a_i sind Verzweigungspunkte.

Es ergiebt sich nun zuerst aus den beiden Sätzen I und II des § 8, dass das Argument (u), als Summe von q Integralen, bei allen möglichen Auswahlen der unteren Grenzen a, a_i 16 verschiedene Formen haben kann, die sich zu 6 und 10 oder zu 1 und 15 gruppiren, jenachdem q ungerade oder gerade ist. Um diese beiden Fälle getrennt zu behandeln, sei zuerst:

$$q = 2\omega.$$

Die 16 Formen der Argumente (u) sind alsdann nach § 8, II:

$$(38) \qquad \left(u = \int_{a_\mu}^{z,s} dw + \sum_{0}^{2\omega-2} {}^{i} \int_{a_\mu}^{z_i,s_i} dw\right),$$

$$(39) \qquad \left(u_{\nu\varrho} = \int_{a_\mu}^{z,s} dw + \int_{a_\nu}^{a_\varrho} dw + \sum_{0}^{2\omega-2} {}^{i} \int_{a_\mu}^{z_i,s_i} dw\right),$$

wo die Wahl des Verzweigungspunktes a_μ ohne Belang ist, die beiden Verzweigungspunkte a_ν, a_ϱ aber von einander verschieden sind. Es soll jetzt die ausgezeichnete Form (38) der Argumente gewählt und unter dieser Voraussetzung sollen die Nullpunkte der 16 Thetafunctionen bestimmt werden.

Was zuerst die 6 ungeraden Functionen:

$$\Theta_\lambda\left(\left(\int_{a_\mu}^{z,s} dw + \sum_{0}^{2\omega-2} {}^{i} \int_{a_\mu}^{z_i,s_i} dw\right)\right) \quad \text{oder} \quad \Theta_\lambda\left(\left(\int_{a_\lambda}^{z,s} dw + \sum_{0}^{2\omega-2} {}^{i} \int_{a_\lambda}^{z_i,s_i} dw\right)\right)$$

angeht, so ordne man diesen bezüglich die 6 Additionstheoreme $(2\omega + 1)$ter Ordnung zu:

$$(40) \qquad \Big(\int_{a_\lambda}^{z_0, s_0} dw + \sum_{1}^{2\omega}{}^{i} \int_{a_\lambda}^{z_i, s_i} dw \equiv 0\Big),$$

durch welche je bei gegebenen $2\omega - 1$ Stellen z_i, s_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, 2\omega - 2)$ im Allgemeinen die beiden Stellen z_i, s_i $(i = 2\omega - 1, 2\omega)$ definirt sind. Führt man die letzteren in die vorliegenden Thetafunctionen ein, so nehmen diese die Form an:

$$\Theta_\lambda\Big(\Big(\int_{a_\lambda}^{z,s} dw - \int_{a_\lambda}^{z_{2\omega-1}, s_{2\omega-1}} dw - \int_{a_\lambda}^{z_{2\omega}, s_{2\omega}} dw\Big)\Big)$$

und haben nach § 4, II die Nullpunkte $z, s = z_{2\omega-1}, s_{2\omega-1}$ und $z, s = z_{2\omega}, s_{2\omega}$.

Was ferner die 10 geraden Functionen

$$\Theta_{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \atop \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}\Big(\Big(\int_{a_\mu}^{z,s} dw + \sum_{0}^{2\omega-2}{}^{i} \int_{a_\mu}^{z_i, s_i} dw\Big)\Big) \quad \text{oder} \quad \Theta_{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \atop \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}\Big(\Big(\int_{a_{\lambda_0}}^{z,s} dw + \sum_{0}^{2\omega-2}{}^{i} \int_{a_{\lambda_0}}^{z_i, s_i} dw\Big)\Big)$$

angeht, so ordne man diesen bezüglich die 10 Additionstheoreme $(2\omega + 1)$ter Ordnung zu:

$$(41) \qquad \Big(\int_{a_{\lambda_0}}^{z_0, s_0} dw + \int_{a_{\lambda_1}}^{a_{\lambda_2}} dw + \sum_{1}^{2\omega}{}^{i} \int_{a_{\lambda_0}}^{z_i, s_i} dw \equiv 0\Big),$$

durch welche bei gegebenen $2\omega - 1$ Stellen z_i, s_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, 2\omega - 2)$ im Allgemeinen die beiden Stellen z_i, s_i $(i = 2\omega - 1, 2\omega)$ definirt sind. Führt man die letzteren in die vorliegenden Thetafunctionen ein, so nehmen diese die Form an:

$$\Theta_{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \atop \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}\Big(\Big(\int_{a_{\lambda_0}}^{z,s} dw - \int_{a_{\lambda_1}}^{a_{\lambda_2}} dw - \int_{a_{\lambda_0}}^{z_{2\omega-1}, s_{2\omega-1}} dw - \int_{a_{\lambda_0}}^{z_{2\omega}, s_{2\omega}} dw\Big)\Big)$$

oder

$$\Theta_{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \atop \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}\Big(\Big(\int_{a_{\lambda_0}}^{z,s} dw - \int_{a_{\lambda_1}}^{z_{2\omega-1}, s_{2\omega-1}} dw - \int_{a_{\lambda_2}}^{z_{2\omega}, s_{2\omega}} dw\Big)\Big)$$

und haben nach § 4, II die Nullpunkte $z, s = z_{2\omega-1}, s_{2\omega-1}$ und $z, s = z_{2\omega}, s_{2\omega}$.

Die Nullpunkte der 16 Thetafunctionen mit den Argumenten (38) werden also definirt durch die 16 Additionstheoreme (40) und (41); es sind dies gerade die 16 Additionstheoreme, welche der ungeraden

Ordnung $(2\omega + 1)$ entsprechen. Mit $\omega = 1$ geht aus diesem Resultate die bereits in § 3 entwickelte Beziehung hervor.

Was nun ferner die Thetafunctionen mit den Argumenten (39) angeht, so ordne man der Thetafunction:

$$\Theta_\lambda\left(\left(\int_{a_\mu}^{z,s} dw + \int_{a_\nu}^{a_\varrho} dw + \sum_0^{2\omega-2}{}^{i} \int_{a_\mu}^{z_i, s_i} dw\right)\right),$$

wo a_μ auch durch a_λ ersetzt werden kann, das Additionstheorem zu:

$$\left(\int_{a_\lambda}^{z_0, s_0} dw + \int_{a_\nu}^{a_\varrho} dw + \sum_1^{2\omega}{}^{i} \int_{a_\lambda}^{z_i, s_i} dw \equiv 0\right) \tag{42}$$

und der Thetafunction:

$$\Theta_{\substack{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \\ \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}}\left(\left(\int_{a_\mu}^{z,s} dw + \int_{a_\nu}^{a_\varrho} dw + \sum_0^{2\omega-2}{}^{i} \int_{a_\mu}^{z_i, s_i} dw\right)\right),$$

wo a_μ auch durch a_{λ_0} ersetzt werden kann, das Additionstheorem:

$$\left(\int_{a_{\lambda_0}}^{z_0, s_0} dw + \int_{a_\nu}^{a_\varrho} dw + \int_{a_{\lambda_1}}^{a_{\lambda_2}} dw + \sum_1^{2\omega}{}^{i} \int_{a_{\lambda_0}}^{z_i, s_i} dw \equiv 0\right). \tag{43}$$

Die vorgelegten Thetafunctionen nehmen unter Einführung der durch diese Additionstheoreme bestimmten Stellen $z_{2\omega-1}, s_{2\omega-1}$ und $z_{2\omega}, s_{2\omega}$ die Form an:

$$\Theta_\lambda\left(\left(\int_{a_\lambda}^{z,s} dw - \int_{a_\lambda}^{z_{2\omega-1}, s_{2\omega-1}} dw - \int_{a_\lambda}^{z_{2\omega}, s_{2\omega}} dw\right)\right)$$

und

$$\Theta_{\substack{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \\ \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}}\left(\left(\int_{a_{\lambda_0}}^{z,s} dw - \int_{a_{\lambda_1}}^{z_{2\omega-1}, s_{2\omega-1}} dw - \int_{a_{\lambda_2}}^{z_{2\omega}, s_{2\omega}} dw\right)\right)$$

und haben nach § 4, II die Nullpunkte $z, s = z_{2\omega-1}, s_{2\omega-1}$ und $z, s = z_{2\omega}, s_{2\omega}$.

Die 16 Additionstheoreme (42) und (43) stimmen aber nach § 8, III, von der Reihenfolge abgesehen, mit den 16 Additionstheoremen (40) und (41) überein; es sind wieder alle diejenigen, welche der ungeraden Ordnung $2\omega + 1$ entsprechen.

Es werden also beim Uebergang von einem der 16 *Argumente* $u, u_{\nu\varrho}$ *zum anderen, immer dieselben, zu* 6 *und* 10 *gruppirten* 16 *Additions-*

theoreme $(2\omega+1)$*ter Ordnung den* 16 *Thetafunctionen zur Bestimmung ihrer Nullpunkte zugeordnet, nur immer in anderer Reihenfolge.*

Hierüber folgt aus der Vergleichung von § 8, III und § 7, II' noch der Zusatz:

Bei diesen verschiedenen Zuordnungen fallen die 6 *Additions-theoreme* (40) *oder* $\left(\int\limits_{a_\lambda}^{z_0, s_0} dw + \sum\limits_1^{2\omega}{}^i \int\limits_{a_\mu}^{z_i, s_i} dw \equiv 0\right)$, $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, *der Reihe nach auf die* 16 *Rosenhain'schen Systeme von je* 6 *Thetafunctionen.*

Es sei ferner:

$$q = 2\omega - 1.$$

Die 16 Formen der Argumente (u) sind alsdann nach § 8, I:

$$(44) \qquad \left(u_\lambda \equiv \int\limits_{a_\lambda}^{z, s} dw + \sum_0^{2\omega-3}{}^i \int\limits_{a_\mu}^{z_i, s_i} dw\right),$$

$$(45) \quad \left(u_{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \atop \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5} \equiv \int\limits_{a_{\lambda_0}}^{z, s} dw + \int\limits_{a_{\lambda_1}}^{a_{\lambda_2}} dw + \sum_0^{2\omega-3}{}^i \int\limits_{a_\mu}^{z_i, s_i} dw \equiv \int\limits_{a_{\lambda_3}}^{z, s} dw + \int\limits_{a_{\lambda_4}}^{a_{\lambda_5}} dw + \sum_0^{2\omega-3}{}^i \int\limits_{a_\mu}^{z_i, s_i} dw\right),$$

wobei die Wahl des Verzweigungspunktes a_μ ohne Belang ist.

Nimmt man nun zuerst die Argumente (44), so bestimmen sich die Nullpunkte $z, s = z_{2\omega-2}, s_{2\omega-2}$ und $z, s = z_{2\omega-1}, s_{2\omega-1}$ für die Function:

$$\Theta\left(\left(\int\limits_{a_\lambda}^{z, s} dw + \sum_0^{2\omega-3}{}^i \int\limits_{a_\mu}^{z_i, s_i} dw\right)\right)$$

aus dem Additionstheorem:

$$(46) \qquad \left(\int\limits_{a_0}^{a_\lambda} dw + \int\limits_{a_2}^{a_4} dw + \sum_0^{2\omega-1}{}^i \int\limits_{a_\mu}^{z_i, s_i} dw \equiv 0\right),$$

da sie unter Anwendung desselben übergeht in (vgl. § 5, II):

$$\Theta\left(\left(\int\limits_{a_0}^{z, s} dw - \int\limits_{a_2}^{z_{2\omega-2}, s_{2\omega-2}} dw - \int\limits_{a_4}^{z_{2\omega-1}, s_{2\omega-1}} dw\right)\right);$$

für die Function:

$$\Theta_{\nu\varrho}\left(\left(\int\limits_{a_\lambda}^{z, s} dw + \sum_0^{2\omega-3}{}^i \int\limits_{a_\mu}^{z_i, s_i} dw\right)\right)$$

aus dem Additionstheorem:

$$(47)\qquad \Big(\int\limits_{a_0}^{a_\lambda} dw + \int\limits_{a_2}^{a_4} dw + \int\limits_{a_\nu}^{a_\varrho} dw + \sum_0^{2\omega-1}{}_i \int\limits_{a_\mu}^{z_i,\, s_i} dw \equiv 0\Big),$$

da sie unter Anwendung desselben übergeht in (vgl. § 5, II):

$$\Theta_{\nu\varrho}\Big(\Big(\int\limits_{a_0}^{z,\, s} dw - \int\limits_{a_2}^{z_{2\omega-2},\, s_{2\omega-2}} dw - \int\limits_{a_4}^{z_{2\omega-1},\, s_{2\omega-1}} dw + \int\limits_{a_\nu}^{a_\varrho} dw\Big)\Big).$$

Nimmt man ferner die Argumente (45), so stellen sich neben die Functionen:

$$\Theta\ \Big(\Big(\int\limits_{a_{\lambda_0}}^{z,\, s} dw + \int\limits_{a_{\lambda_1}}^{a_{\lambda_2}} dw + \sum_0^{2\omega-3}{}_i \int\limits_{a_\mu}^{z_i,\, s_i} dw\Big)\Big)$$

und

$$\Theta_{\nu\varrho}\Big(\Big(\int\limits_{a_{\lambda_0}}^{z,\, s} dw + \int\limits_{a_{\lambda_1}}^{a_{\lambda_2}} dw + \sum_0^{2\omega-3}{}_i \int\limits_{a_\mu}^{z_i,\, s_i} dw\Big)\Big)$$

bezüglich die Additionstheoreme:

$$(48)\qquad \Big(\int\limits_{a_0}^{a_{\lambda_0}} dw + \int\limits_{a_{\lambda_1}}^{a_{\lambda_2}} dw + \int\limits_{a_2}^{a_4} dw + \sum_0^{2\omega-1}{}_i \int\limits_{a_\mu}^{z_i,\, s_i} dw \equiv 0\Big)$$

und

$$(49)\qquad \Big(\int\limits_{a_0}^{a_{\lambda_0}} dw + \int\limits_{a_{\lambda_1}}^{a_{\lambda_2}} dw + \int\limits_{a_2}^{a_4} dw + \int\limits_{a_\nu}^{a_\varrho} dw + \sum_0^{2\omega-1}{}_i \int\limits_{a_\mu}^{z_i,\, s_i} dw \equiv 0\Big),$$

Die 16 Additionstheoreme (46), (47) und (48), (49) sind aber je die 16 zu 1 und 15 gruppirten Additionstheoreme von der geraden Ordnung 2ω, von deren Normalformen (35), (36) sie sich bezüglich nur um die additiven Constanten:

$$\Big(\int\limits_{a_0}^{a_\lambda} dw + \int\limits_{a_2}^{a_4} dw\Big)$$

und

$$\Big(\int\limits_{a_0}^{a_{\lambda_0}} dw + \int\limits_{a_2}^{a_4} dw + \int\limits_{a_{\lambda_1}}^{a_{\lambda_2}} dw\Big)$$

unterscheiden. Die Zufügung dieser Constanten ändert nach § 8, IV nur die Reihenfolge der Normalformen (35), (36) ab.

Es werden also beim Uebergang von einem der 16 *Argumente* u_λ, $u_{\substack{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\\ \lambda_3\lambda_4\lambda_5}}$ *zum anderen, immer dieselben zu* 1 *und* 15 *gruppirten Additionstheoreme* $(2\omega)^{ter}$ *Ordnung der* 16 *Thetafunctionen zur Bestimmung ihrer Nullpunkte zugeordnet, nur immer in anderer Reihenfolge.*

Ausserdem übersieht man sofort:

Bei diesen verschiedenen Zuordnungen fällt das Additionstheorem

$$\left(\sum_0^{2\omega-1}{}_i \int_{a_\mu}^{z_i, s_i} dw \equiv 0\right)$$

der Reihe nach auf alle 16 *Thetafunctionen.*

Mit $\omega = 1$ und $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 = a_0, a_2, a_4$ erhält man aus (48), (49) die Additionstheoreme:

$$\left(\int_{a_\mu}^{z_0, s_0} dw + \int_{a_\mu}^{z_1, s_1} dw \equiv 0\right)$$

und

$$\left(\int_{a_\nu}^{z_0, s_0} dw + \int_{a_\varrho}^{z_1, s_1} dw \equiv 0\right),$$

welche für die Thetafunctionen

$$\Theta\left(\left(\int_{a_0}^{z, s} dw + \int_{a_2}^{a_4} dw\right)\right)$$

und

$$\Theta_{\nu\varrho}\left(\left(\int_{a_0}^{z, s} dw + \int_{a_2}^{a_4} dw\right)\right)$$

bezüglich die Nullpunkte $z, s = z_0, s_0$ und $z, s = z_0, -s_0$ mit beliebigem z_0, s_0 und $z = a_\nu$ und $z = a_\varrho$ ergeben; es ist dies der in § 5, III behandelte Specialfall.

Durch die vorstehenden Betrachtungen ist die Bestimmung der Nullpunkte der 16 Thetafunctionen für den Fall, dass ihre Argumente (u) Summen von q Integralen:

$$\left(u \equiv \int_{\alpha}^{z, s} dw + \sum_0^{q-2}{}_i \int_{\alpha_i}^{z_i, s_i} dw\right)$$

sind, für jede Anzahl q und für jede Auswahl der q unteren Grenzen α, α_i aus den 6 Verzweigungspunkten mit Hülfe des Additionstheorems der hyperelliptischen Integrale ausgeführt, zugleich aber das Gesetz gefunden, welches die Gruppirung der Nullpunkte der 16 Thetafunctionen in jedem Falle befolgt. Indem man Argumente von der eben

bezeichneten Form, weil sie Summen von q Integralen sind, *Argumente q^{ter} Ordnung* nennt, kann man dieses Gesetz so aussprechen (vgl. § 7, am Ende):

I. *Sind die Argumente der Thetafunctionen von gerader Ordnung, so gruppiren sich die* 16 *Formen dieser Argumente zu* 1 *und* 15, *die* 16 *Additionstheoreme aber, welche die Nullpunkte der Thetafunctionen bestimmen, zu* 6 *und* 10.

II. *Sind die Argumente von ungerader Ordnung, so gruppiren sich die* 16 *Formen dieser Argumente zu* 6 *und* 10, *die* 16 *Additionstheoreme aber, welche die Nullpunkte der Thetafunctionen bestimmen, zu* 1 *und* 15.

Will man also durch die algebraischen Charakteristiken der Thetafunctionen auf die *Gruppirung der Nullpunkte* hinweisen, so hat man die Charakteristiken 1. oder 2. Art anzuwenden, jenachdem die Argumente von gerader oder ungerader Ordnung sind. Den 16 *Formen der Argumente* entsprechen dann 16 Vertheilungsweisen der jedesmaligen Charakteristiken auf die 16 Thetafunctionen. Die in § 1 eingeführten Vertheilungsweisen entsprechen bezüglich den Argumenten:

$$\left(u \equiv \int_{a_\mu}^{z,s} dw + \sum_{2}^{2w-2}{}_i \int_{a_\mu}^{z_i,\, s_i} dw\right) \tag{50}$$

und

$$\left(u \equiv \int_{a_0}^{z,s} dw + \int_{a_2}^{z_0,\, s_0} dw + \int_{a_4}^{z_1,\, s_1} dw + \sum_{2}^{2w-3}{}_i \int_{a_\mu}^{z_i,\, s_i} dw \right. \tag{50}$$

$$\left. \equiv \int_{a_1}^{z,s} dw + \int_{a_3}^{z_0,\, s_0} dw + \int_{a_5}^{z_1,\, s_1} dw + \sum_{2}^{2w-3}{}_i \int_{a_\mu}^{z_i,\, s_i} dw \right),$$

die sich bezüglich unter den Typen (38) und (45) vorfinden.

§ 10.

Algebraische Bestimmung der Nullpunkte der Thetafunctionen mit 2 Parametern.

Wenn die Bestimmung der Nullpunkte der Thetafunctionen mit Argumenten q^{ter} Ordnung in § 9 auf die Additionsprobleme der hyperelliptischen Integrale zurückgeführt worden ist, so erfordert die *algebraische* Bestimmung derselben lediglich eine Anwendung des Abel'schen Theorems. Die Aufstellung der betreffenden algebraischen Gleichungen würde daher für die Aufklärung der bereits in der transcendenten Form der Additionstheoreme deutlich hervortretenden Gruppirungsverhältnisse nicht mehr erforderlich sein. Trotzdem scheint es zweckmässig, im

Anschluss an die in § 2 und § 5 erledigten Fälle $q = 2$ und $q = 1$, wenigstens die beiden Fälle $q = 3$ und $q = 4$ auch noch nach der algebraischen Seite hin zu verfolgen aus einem doppelten Grunde. Es soll damit erstens gezeigt werden, *in welchem Sinne* in den *algebraischen* Gleichungen des Abel'schen Theorems der Gegensatz der beiden Spaltungen der Zahl 16 zum Ausdrucke gelangt*), und soll zweitens die Aufstellung einer Parameterdarstellung eingeleitet werden, welche zur Lösung der 32 in § 7 erwähnten Umkehrprobleme ausreichend ist.

Es handelt sich zuerst um den Fall $q = 3$. Hier soll von den 16 gleichberechtigten Formen (44), (45) der Argumente der Thetafunctionen diejenige ausgewählt werden, welcher die in § 1 eingeführten Charakteristiken 2. Art im Sinne der Schlussbemerkung des § 9 entsprechen. Es ist die aus (50) mit $\omega = 2$ und aus (45) mit $\omega = 2$, $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 = 0, 2, 4$ hervorgehende Form:

$$\left(u \equiv \int_{a_0}^{z,\,s} dw + \int_{a_2}^{z_0,\,s_0} dw + \int_{a_4}^{z_1,\,s_1} dw\right),$$

die im Folgenden mit veränderter Bezeichnung der oberen Grenzen so geschrieben wird:

$$\left(u \equiv \int_{a_0}^{z,\,s} dw + \int_{a_2}^{z_2,\,s_2} dw + \int_{a_4}^{z_3,\,s_3} dw\right). \tag{51}$$

Die alsdann bei gegebenem z_2, s_2 und z_3, s_3 zur Bestimmung der Nullpunkte $z, s = z_0, s_0$ und $z, s = z_1, s_1$ der 16 Functionen:

$$\Theta((u)) \quad \text{und} \quad \Theta_{\lambda_0 \lambda_1}((u))$$

dienenden 16 Additionstheoreme lauten (§ 9, 48. 49) beziehungsweise:

$$\left(\int_{a_\mu}^{z_0,\,s_0} dw + \int_{a_\mu}^{z_1,\,s_1} dw + \int_{a_\mu}^{z_2,\,s_2} dw + \int_{a_\mu}^{z_3,\,s_3} dw \equiv 0\right) \tag{52}$$

und

$$\left(\int_{a_{\lambda_0}}^{z_0,\,s_0} dw + \int_{a_{\lambda_1}}^{z_1,\,s_1} dw + \int_{a_\mu}^{z_2,\,s_2} dw + \int_{a_\mu}^{z_3,\,s_3} dw \equiv 0\right), \tag{53}$$

in denen die Wahl des Verzweigungspunktes a_μ ohne Belang ist. Das Additionstheorem (52) entspricht dem Falle der Identität; die gesuchten Stellen z_0, s_0 und z_1, s_1 sind die den gegebenen Stellen z_2, s_2 und z_3, s_3 entgegengesetzten. Die Function $\Theta((u))$ verschwindet eben nach § 4, II

*) Die allgemeine Discussion der Gruppirungsverhältnisse der algebraischen Gleichungen des Abel'schen Theorems kann sich direct an die von Abel in der oben zu § 3 citirten Abhandlung unter (6) aufgestellte Function $F(x)$ anknüpfen.

für $z, s = z_2, -s_2$ und $z, s = z_3, -s_3$. Die Additionsprobleme (53) aber haben die Aufgabe, ein Integralpaar mit 2 gleichen unteren Grenzen, $\left(\int\limits_{a_\mu}^{z_2, s_2} dw + \int\limits_{a_\mu}^{z_3, s_3} dw\right)$, darzustellen als ein Integralpaar mit 2 gegebenen verschiedenen unteren Grenzen, $\left(\int\limits_{a_{\lambda_0}}^{z_0, s_0} dw + \int\limits_{a_{\lambda_1}}^{z_1, s_1} dw\right)$. Um diese Aufgabe zu lösen leitet man aus den allgemeinen Entwicklungen Abel's folgenden speciellen Satz ab:

Es sei zur Abkürzung gesetzt:

$$\varphi_i^{(\lambda_0\lambda_1)} = (a_{\lambda_0} - z_i)(a_{\lambda_1} - z_i),$$
$$\varphi_i^{(\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)} = (a_{\lambda_2} - z_i)(a_{\lambda_3} - z_i)(a_{\lambda_4} - z_i)(a_{\lambda_5} - z_i),$$

wo $i = 0, 1, 2, 3$ *ist oder beiderseits wegfällt, und sei zwischen den Quadratwurzeln aus diesen ganzen Functionen und der Quadratwurzel:*

$$s_i = \sqrt{(a_0 - z_i)(a_1 - z_i)(a_2 - z_i)(a_3 - z_i)(a_4 - z_i)(a_5 - z_i)}$$

die Beziehung:

$$\sqrt{\varphi_i^{(\lambda_0\lambda_1)}}\,\sqrt{\varphi_i^{(\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} = s_i \tag{54}$$

festgelegt; $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ *sind die Zahlen* 0, 1, 2, 3, 4, 5 *in irgend welcher Reihenfolge. Ferner bezeichne* Δ *die Determinante:*

$$\Delta\left(\sqrt{\varphi^{(\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}}, \sqrt{\varphi^{(\lambda_0\lambda_1)}}\right) = \begin{vmatrix} \sqrt{\varphi^{(\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} & \sqrt{\varphi_2^{(\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} & \sqrt{\varphi_3^{(\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} \\ \sqrt{\varphi^{(\lambda_0\lambda_1)}} & \sqrt{\varphi_2^{(\lambda_0\lambda_1)}} & \sqrt{\varphi_3^{(\lambda_0\lambda_1)}} \\ z\sqrt{\varphi^{(\lambda_0\lambda_1)}} & z_2\sqrt{\varphi_2^{(\lambda_0\lambda_1)}} & z_3\sqrt{\varphi_3^{(\lambda_0\lambda_1)}} \end{vmatrix}.$$

Alsdann dient zur Bestimmung derjenigen Stellen z_0, s_0 *und* z_1, s_1, *welche bei gegebenen Stellen* z_2, s_2 *und* z_3, s_3 $(z_2 \neq z_3)$ *den Relationen genügen:*

$$\left(\int\limits_{a_{\lambda_0}}^{z_0, s_0} dw + \int\limits_{a_{\lambda_1}}^{z_1, s_1} dw + \int\limits_{a_\lambda}^{z_2, s_2} dw + \int\limits_{a_\lambda}^{z_3, s_3} dw \equiv 0\right),$$

die in z *quadratische Gleichung:*

$$\frac{\Delta\left(\sqrt{\varphi^{(\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}}, \sqrt{\varphi^{(\lambda_0\lambda_1)}}\right) \cdot \Delta\left(\sqrt{\varphi^{(\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}}, -\sqrt{\varphi^{(\lambda_0\lambda_1)}}\right)}{(z - z_2)(z - z_3)} = 0$$

und die in den Factoren $\sqrt{\varphi^{(\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}}$ *und* $\sqrt{\varphi^{(\lambda_0\lambda_1)}}$ *von* s *homogene lineare Gleichung*

$$\Delta\left(\sqrt{\varphi^{(\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}}, \sqrt{\varphi^{(\lambda_0\lambda_1)}}\right) = 0;$$

jene giebt z_0 und z_1 als Wurzeln, diese bestimmt mit $z = z_0$ und $z = z_1$ eindeutig die Quadratwurzeln s_0 und s_1.

Der Satz enthält 15 specielle Sätze, indem λ_0, λ_1 auf 15 Weisen aus den 6 Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 ausgewählt werden können; er bestimmt in seinen 15 Formen die Nullpunkte z_0, s_0 und z_1, s_1 der 15 Thetafunctionen:

$$\Theta_{\lambda_0 \lambda_1}\left(\left(\int_{a_0}^{z,\, s} dw + \int_{a_2}^{z_2,\, s_2} dw + \int_{a_4}^{z_3,\, s_3} dw\right)\right)$$

auf algebraischem Wege, womit die Aufgabe des vorliegenden § 10 erledigt ist.

§ 11.

Algebraische Bestimmung der Nullpunkte der Thetafunctionen mit 3 Parametern.

Im Fall $q = 4$ soll unter den 16 möglichen Formen (38), (39) der Argumente (u) die unter (50) angegebene Form:

$$\left(u \equiv \int_{a_\mu}^{z,\, s} dw + \int_{a_\mu}^{z_0,\, s_0} dw + \int_{a_\mu}^{z_1,\, s_1} dw + \int_{a_\mu}^{z_2,\, s_2} dw\right)$$

oder mit veränderter Bezeichnung der Parameter:

$$\left(u \equiv \int_{a_\mu}^{z,\, s} dw + \int_{a_\mu}^{z_2,\, s_2} dw + \int_{a_\mu}^{z_3,\, s_3} dw + \int_{a_\mu}^{z_4,\, s_4} dw \equiv \int_{z_2,\, -s_2}^{z,\, s} dw + \int_{z_4,\, -s_4}^{z_3,\, s_3} dw\right)$$

ausgewählt werden. Aus § 9 (40), (41) ergiebt sich dann:

Die Nullpunkte z, $s = z_0$, s_0 und z, $s = z_1$, s_1 der 6 ungeraden Thetafunctionen:

$$\Theta_\lambda\left(\left(\int_{z_2,\, -s_2}^{z,\, s} dw + \int_{z_4,\, -s_4}^{z_3,\, s_3} dw\right)\right)$$

sind bezüglich die Lösungen der 6 Additionsprobleme:

$$\left(\int_{a_\lambda}^{z_0,\, s_0} dw + \int_{a_\lambda}^{z_1,\, s_1} dw + \int_{a_\lambda}^{z_2,\, s_2} dw + \int_{a_\lambda}^{z_3,\, s_3} dw + \int_{a_\lambda}^{z_4,\, s_4} dw \equiv 0\right);$$

die Nullpunkte z, $s = z_0$, s_0 und z, $s = z_1$, s_1 der 10 geraden Thetafunctionen:

$$\Theta_{\substack{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \\ \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}}\left(\left(\int_{z_2,\, -s_2}^{z,\, s} dw + \int_{z_4,\, -s_4}^{z_3,\, s_3} dw\right)\right)$$

sind bezüglich die Lösungen der 10 Additionsprobleme:

$$\left(\int_{a_\lambda}^{z_0,\,s_0} dw + \int_{a_\lambda}^{z_1,\,s_1} dw + \int_{a_{\lambda_0}}^{z_2,\,s_2} dw + \int_{a_{\lambda_1}}^{z_3,\,s_3} dw + \int_{a_{\lambda_2}}^{z_4,\,s_4} d\,w \equiv 0\right)$$

oder

$$\left(\int_{a_\lambda}^{z_0,\,s_0} dw + \int_{a_\lambda}^{z_1,\,s_1} dw + \int_{a_{\lambda_3}}^{z_2,\,s_2} dw + \int_{a_{\lambda_4}}^{z_3,\,s_3} dw + \int_{a_{\lambda_5}}^{z_4,\,s_4} d\,w \equiv 0\right).$$

Für die algebraische Lösung dieser 16 Additionsprobleme ergiebt sich aus dem Abel'schen Theorem das in folgendem Satze ausgesprochene Verfahren:

Es sei zur Abkürzung gesetzt:

$$\begin{aligned}
\varphi_i^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)} &= (a_{\lambda_0} - z_i)\,(a_{\lambda_1} - z_i)\,(a_{\lambda_2} - z_i),\\
\varphi_i^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)} &= (a_{\lambda_3} - z_i)\,(a_{\lambda_4} - z_i)\,(a_{\lambda_5} - z_i),\\
\varphi_i^{(\lambda_0)} &= (a_{\lambda_0} - z_i),\\
\varphi_i^{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)} &= (a_{\lambda_1} - z_i)\,(a_{\lambda_2} - z_i)\,(a_{\lambda_3} - z_i)\,(a_{\lambda_4} - z_i)\,(a_{\lambda_5} - z_i),
\end{aligned}$$

wo $i = 0, 1, 2, 3, 4$ *ist oder beiderseits wegfällt, und seien zwischen den Quadratwurzeln aus diesen ganzen Functionen und den Quadratwurzeln* s_i *die Beziehungen:*

$$\sqrt{\varphi_i^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}}\sqrt{\varphi_i^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} = \sqrt{\varphi_i^{(\lambda_0)}}\sqrt{\varphi_i^{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} = s_i \tag{55}$$

festgelegt; $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ *bedeuten die* 6 *Zahlen* 0, 1, 2, 3, 4, 5 *in irgend einer Reihenfolge. Ferner bezeichne* Δ *die Determinanten:*

$$\Delta\left(\sqrt{\varphi^{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}},\ \sqrt{\varphi^{(\lambda_0)}}\right)$$

$$= \begin{vmatrix}
\sqrt{\varphi^{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} & \sqrt{\varphi_2^{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} & \sqrt{\varphi_3^{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} & \sqrt{\varphi_4^{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}}\\
\sqrt{\varphi^{(\lambda_0)}} & \sqrt{\varphi_2^{(\lambda_0)}} & \sqrt{\varphi_3^{(\lambda_0)}} & \sqrt{\varphi_4^{(\lambda_0)}}\\
z\sqrt{\varphi^{(\lambda_0)}} & z_2\sqrt{\varphi_2^{(\lambda_0)}} & z_3\sqrt{\varphi_3^{(\lambda_0)}} & z_4\sqrt{\varphi_4^{(\lambda_0)}}\\
z^2\sqrt{\varphi^{(\lambda_0)}} & z_2^2\sqrt{\varphi_2^{(\lambda_0)}} & z_3^2\sqrt{\varphi_3^{(\lambda_0)}} & z_4^2\sqrt{\varphi_4^{(\lambda_0)}}
\end{vmatrix},$$

und

$$\Delta\left(\sqrt{\varphi^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}},\ \sqrt{\varphi^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}}\right)$$

$$= \begin{vmatrix}
\sqrt{\varphi^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} & \sqrt{\varphi_2^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} & \sqrt{\varphi_3^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} & \sqrt{\varphi_4^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}}\\
z\sqrt{\varphi^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} & z_2\sqrt{\varphi_2^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} & z_3\sqrt{\varphi_3^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} & z_4\sqrt{\varphi_4^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}}\\
\sqrt{\varphi^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}} & \sqrt{\varphi_2^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}} & \sqrt{\varphi_3^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}} & \sqrt{\varphi_4^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}}\\
z\sqrt{\varphi^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}} & z_2\sqrt{\varphi_2^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}} & z_3\sqrt{\varphi_3^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}} & z_4\sqrt{\varphi_4^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}}
\end{vmatrix}.$$

Alsdann dient zur Bestimmung derjenigen Stellen z_0, s_0 *und* z_1, s_1, *welche bei gegebenen Stellen* z_2, s_2; z_3, s_3; z_4, s_4 $(z_2 \neq z_3 \neq z_4)$ *den Relationen*

$$\left(\int\limits_{a_{\lambda_0}}^{z_0,\, s_0} dw + \int\limits_{a_{\lambda_0}}^{z_1,\, s_1} dw + \int\limits_{a_{\lambda_0}}^{z_2,\, s_2} dw + \int\limits_{a_{\lambda_0}}^{z_3,\, s_3} dw + \int\limits_{a_{\lambda_0}}^{z_4,\, s_4} d\,w \equiv 0\right),$$

und bezüglich den Relationen

$$\left(\int\limits_{a_{\lambda}}^{z_0,\, s_0} dw + \int\limits_{a_{\lambda}}^{z_1,\, s_1} dw + \int\limits_{a_{\lambda_0}}^{z_2,\, s_2} dw + \int\limits_{a_{\lambda_1}}^{z_3,\, s_3} dw + \int\limits_{a_{\lambda_2}}^{z_4,\, s_4} d\,w \equiv 0\right)$$

oder

$$\left(\int\limits_{a_{\lambda}}^{z_0,\, s_0} dw + \int\limits_{a_{\lambda}}^{z_1,\, s_1} dw + \int\limits_{a_{\lambda_3}}^{z_2,\, s_2} dw + \int\limits_{a_{\lambda_4}}^{z_3,\, s_3} dw + \int\limits_{a_{\lambda_5}}^{z_4,\, s_4} d\,w \equiv 0\right),$$

entsprechen, die in z quadratische Gleichung:

$$\frac{\Delta\left(\sqrt{\varphi^{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}},\ \sqrt{\varphi^{(\lambda_0)}}\right).\Delta\left(\sqrt{\varphi^{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}},\ -\sqrt{\varphi^{(\lambda_0)}}\right)}{(z-z_2)\,(z-z_3)\,(z-z_4)} = 0,$$

und bezüglich

$$\frac{\Delta\left(\sqrt{\varphi^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}},\ \sqrt{\varphi^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}}\right).\Delta\left(\sqrt{\varphi^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}},\ -\sqrt{\varphi^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}}\right)}{(z-z_2)\,(z-z_3)\,(z-z_4)} = 0,$$

und die in den Factoren $\sqrt{\varphi^{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}}$ und $\sqrt{\varphi^{(\lambda_0)}}$ von s homogene lineare Gleichung:

$$\Delta\left(\sqrt{\varphi^{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}},\ \sqrt{\varphi^{(\lambda_0)}}\right) = 0,$$

und bezüglich die in den Factoren $\sqrt{\varphi^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}}$ und $\sqrt{\varphi^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}}$ von s homogene lineare Gleichung:

$$\Delta\left(\sqrt{\varphi^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}},\ \sqrt{\varphi^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}}\right) = 0;$$

jene giebt z_0 und z_1 als ***Wurzeln****, diese bestimmt mit $z=z_0$ und $z=z_1$ die Quadratwurzeln s_0 und s_1.*

Der Satz enthält 16 specielle Sätze, da λ_0 auf 6 Weisen und die Gruppirung $(\lambda_0\ \lambda_1\ \lambda_2)\ (\lambda_3\ \lambda_4\ \lambda_5)$ auf 10 Weisen aus den Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 entnommen werden kann.

Derselbe Satz bestimmt in seinen 16 Formen die Nullpunkte $z, s = z_0, s_0$ und $z, s = z_1, s_1$ der 16 Thetafunctionen

$$\Theta_{\lambda_0}\left(\left(\int\limits_{z_2,\,-s_2}^{z,\; s} dw + \int\limits_{z_4,\,-s_4}^{z_3,\; s_3} d\,w\right)\right),$$

$$\Theta_{\substack{\lambda_0\,\lambda_1\,\lambda_2\\ \lambda_3\,\lambda_4\,\lambda_5}}\left(\left(\int\limits_{z_2,\,-s_2}^{z,\; s} dw + \int\limits_{z_4,\,-s_4}^{z_3,\; s_3} d\,w\right)\right)$$

auf algebraischem Wege, womit die Aufgabe des vorliegenden § 11 gelöst ist.

§ 12.

Ueber ein System von Parameterdarstellungen der Thetafunctionen.

Nachdem die Nullpunkte der 16 Thetafunctionen mit den Argumenten

$$\left(u \equiv \int_{a_0}^{z,\,s} dw + \int_{a_2}^{z_2,\,s_2} dw + \int_{a_4}^{z_3,\,s_3} dw\right)$$

und

$$\left(u \equiv \int_{z_3,\,-s_3}^{z,\,s} dw + \int_{z_4,\,-s_4}^{z_2,\,s_2} dw\right)$$

algebraisch bestimmt sind, hat es keine Schwierigkeit mehr die algebraische Parameterdarstellung der Thetafunctionen für diese Argumente abzuleiten. Diese Ableitung geschieht in 3 Schritten, die sich z. B. für die 2. Form der Argumente folgendermassen gestalten:

Der 1. Schritt besteht in der Aufstellung der Proportion:

$$\Theta_0^2((u)) : \Theta_2^2((u)) : \Theta_4^2((u))$$

$$= c_0^2 \Delta^2 \left(\sqrt{\varphi^{(24135)}}, \sqrt{\varphi^{(0)}}\right) : c_2^2 \Delta^2 \left(\sqrt{\varphi^{(40135)}}, \sqrt{\varphi^{(2)}}\right) : c_4^2 \Delta^2 \left(\sqrt{\varphi^{(02135)}}, \sqrt{\varphi^{(4)}}\right),$$

deren Begründung aus § 11 entnommen wird. Es ist nämlich beispielsweise das Verhältniss $\frac{\Theta_0^2((u))}{\Theta_4^2((u))}$ eine eindeutige und im Allgemeinen stetige Function der Stelle z, s des hyperelliptischen Gebildes, welche nur für die 2 Nullpunkte von $\Theta_0((u))$ je von der 2. Ordnung 0 und nur für die 2 Nullpunkte von $\Theta_4((u))$ je von der 2. Ordnung ∞ wird. Dasselbe gilt aber von dem Verhältniss $\frac{\Delta^2(\sqrt{\varphi^{(24135)}}, \sqrt{\varphi^{(0)}})}{\Delta^2(\sqrt{\varphi^{(02135)}}, \sqrt{\varphi^{(4)}})}$; dasselbe ist eindeutig von der Stelle z, s abhängig, weil das Quadrat der ersten der in § 11 eingeführten Determinante, die ihrer Definition nach in der Form geschrieben werden kann:

$$\text{(56)} \qquad \Delta\left(\sqrt{\varphi^{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}}, \sqrt{\varphi^{(\lambda_0)}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\varphi^{(\lambda_0)}}\sqrt{\varphi_2^{(\lambda_0)}}\sqrt{\varphi_3^{(\lambda_0)}}\sqrt{\varphi_4^{(\lambda_0)}}} \begin{vmatrix} s & s_2 & s_3 & s_4 \\ \varphi^{(\lambda_0)} & \varphi_2^{(\lambda_0)} & \varphi_3^{(\lambda_0)} & \varphi_4^{(\lambda_0)} \\ z\varphi^{(\lambda_0)} & z_2\varphi_2^{(\lambda_0)} & z_3\varphi_3^{(\lambda_0)} & z_4\varphi_4^{(\lambda_0)} \\ z^2\varphi^{(\lambda_0)} & z_2^2\varphi_2^{(\lambda_0)} & z_3^2\varphi_3^{(\lambda_0)} & z_4^2\varphi_4^{(\lambda_0)} \end{vmatrix},$$

rational von den 4 Stellen z, s; z_2, s_2; z_3, s_3; z_4, s_4 abhängt. Es verschwindet ferner $\Delta(\sqrt{\varphi^{(24135)}}, \sqrt{\varphi^{(0)}})$ von der 1. Ordnung für die beiden Nullpunkte von $\Theta_0((u))$ und die 3 Punkte z_2, s_2; z_3, s_3; z_4, s_4, dagegen $\Delta(\sqrt{\varphi^{(02135)}}, \sqrt{\varphi^{(4)}})$ für die beiden Nullpunkte von $\Theta_4((u))$ und die

3 Punkte z_2, s_2; z_3, s_3; z_4, s_4. Diese Bemerkungen reichen nach bekannten Sätzen*) aus, um die obige Proportion zu beweisen.

Der 2. Schritt besteht in der Bestimmung der Constanten c_0^2, c_2^2, c_4^2. Man schliesst**) zuerst aus der vollkommenen Symmetrie der Argumente der Thetafunctionen einerseits und der Determinanten Δ andererseits in Bezug auf die 4 Punkte z, s; z_2, s_2; z_3, s_3; z_4, s_4, dass die Constanten nicht bloss von z, s, sondern auch von den 3 anderen Punkten z_2, s_2; z_3, s_3; z_4, s_4 unabhängig sein müssen. Alsdann aber gewinnt man ihre Werthe, indem man in der obigen Proportion für z_2, z_3, z_4 die 3 Verzweigungspunkte a_0, a_2, a_4 einsetzt und das Resultat mit den Formeln § 6, I vergleicht.

Der 3. Schritt besteht darin, dass man mit Ausziehung der Quadratwurzeln und Anwendung eines Proportionalitätsfactors φ setzt:

$$\Theta_0((u)) = \varphi c_0 \Delta\left(\sqrt{\varphi^{(24135)}},\ \sqrt{\varphi^{(0)}}\right),$$
$$\Theta_2((u)) = \varphi c_2 \Delta\left(\sqrt{\varphi^{(40135)}},\ \sqrt{\varphi^{(2)}}\right),$$
$$\Theta_4((u)) = \varphi c_4 \Delta\left(\sqrt{\varphi^{(02135)}},\ \sqrt{\varphi^{(4)}}\right),$$

und hiernach die übrigen 13 Thetafunctionen aus den Thetarelationen bestimmt.

Bei der Durchführung dieses Verfahrens, die hier unterlassen werden mag, erweist es sich als zweckmässig die Thetafunctionen zu ersetzen durch die τ- und σ-Functionen, jenachdem die 1. oder 2. Form der oben bezeichneten Argumente (u) vorliegt. Es mag genügen hier die schliesslichen Resultate anzugeben. Dabei soll der Deutlichkeit wegen die in § 10 und § 11 durch die Formeln (54) und (55) ausgedrückte Abhängigkeit, welche zwischen den Vorzeichen der Quadratwurzeln in den algebraischen Ausdrücken Δ einerseits und den Vorzeichen der Quadratwurzeln s_i in den Argumenten der Thetafunctionen andererseits besteht, durch explicite beigesetzte Factoren ε von der Bedeutung ± 1 bezeichnet werden. Zugleich sollen die in § 1 und § 6 angegebenen Parameterdarstellungen recapitulirt werden.

Man hat, unter φ einen (für die 4 Formelsysteme verschiedenen) Proportionalitätsfactor und unter $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 *in irgend welcher Reihenfolge verstanden, die folgenden* 4 *Systeme von Parameterdarstellungen:****)

---

*) Vgl. C. Neumann, Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abel'schen Integrale, 2. Aufl., S. 369.

**) Vgl. Prym, Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche (a. a. O.), S. 45.

***) Die hierbei auftretenden *Determinantenausdrücke* haben ihren Ursprung in dem Abel'schen Additionstheorem. Sie finden sich in Form von *ausgerechneten*

I. *Mit:*

$$(1)\qquad \left.\begin{aligned} u_1 &= \int_{a_0}^{z_1,\,\varepsilon_1 s_1} dw_1 + \varepsilon_1 \int_{a_2}^{a_4} dw_1 \\ u_2 &= \int_{a_0}^{z_1,\,\varepsilon_1 s_1} dw_2 + \varepsilon_1 \int_{a_2}^{a_4} dw_2 \end{aligned}\right\} \quad \textit{oder} \quad \left\{\begin{aligned} u_1 &= \int_{a_1}^{z_1,\,\varepsilon_1 s_1} dw_1 + \varepsilon_1 \int_{a_3}^{a_5} dw_1 \\ u_1 &= \int_{a_1}^{z_1,\,\varepsilon_1 s_1} dw_2 + \varepsilon_1 \int_{a_3}^{a_5} dw_2 \end{aligned}\right.$$

ist:

$$(2)\qquad \tau(u_1, u_2) = 0,$$

$$(3)\qquad \tau_{\lambda_0 \lambda_1}(u_1, u_2) = \varphi\, \varepsilon \sqrt{a_{\lambda_0} - z_1}\, \sqrt{a_{\lambda_1} - z_1},$$

Determinanten schon bei Abel in dem Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendantes (1826), Oeuvres compl. publ. par Sylow et Lie, I, p. 208—210, wo das Additionstheorem der hyperelliptischen Integrale 1. Ordnung als Beispiel behandelt ist. Das System linearer Gleichungen ferner, durch dessen Auflösung jene Determinantenausdrücke im Falle der hyperelliptischen Integrale beliebiger Ordnung entstehen, sind von Abel in den Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes (1828), Oeuvres compl. I, p. 455 aufgestellt worden. In *unausgerechneter* Form giebt Cayley, On the Addition of the double Thetafunctions (1879), Crelle's Journal Bd. 88, S. 74, solche Determinanten zur algebraischen Lösung des Additionstheorems der hyperelliptischen Integrale 1. Ordnung.

Für die Parameterdarstellung der Thetafunctionen hat in umfassender Weise zuerst Prym jene Determinantenausdrücke verwerthet in den beiden Abhandlungen: Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen (1864) und: Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche (1866) a. den oben in der Einleitung a. O. O. Auch bei Thomae finden sich ähnliche Verwendungen, zuerst in der kleinen Schrift: Theorie der ultraelliptischen Functionen und Integrale 1. und 2. Gattung, Halle 1865.

Die hier gegebenen Parameterdarstellungen stimmen im Wesentlichen mit den von Prym a. d. a. O. O. auf anderem Wege abgeleiteten überein, unterscheiden sich jedoch, abgesehen von der Einführung der σ- und τ-Functionen, in ihren Gruppirungsverhältnissen von den Prym'schen Parameterdarstellungen, weil für die letzteren der eine der 6 Verzweigungspunkte a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 durch die Benennung ∞ ausgezeichnet ist. Die 15 „charakteristischen Functionen $f(z)$" (in d. a. Abh. von 1864, S. 100; in d. a. Abh. von 1866, S. 36. 37. 43) enthalten im Falle $p = 2$ stets einen oder zwei von den Factoren des Productes $s = \sqrt{a_1 - z}\sqrt{a_2 - z}\sqrt{a_3 - z}\sqrt{a_4 - z}\sqrt{a_5 - z}$, sodass die Spaltung von s in $\sqrt{f(z)}$ und $\dfrac{s}{\sqrt{f(z)}}$ stets eine Spaltung zu 1 und 4 oder 2 und 3 Factoren ist. Diese beiden Spaltungen können nun bei Hinzufügung des 6. Factors $\sqrt{a_0 - z}$ zu s ihren Gegensatz verlieren, indem sie beide in die Spaltung zu 2 und 4 Factoren übergehen, oder auch behalten, indem sie etwa in die Spaltungen zu 1 und 5 und bezüglich zu 3 und 3 übergehen. Auf diese Weise erklärt sich die Verschiedenheit der Gruppirungsverhältnisse in den beiden in Rede stehenden Parameterdarstellungen.

wo $\varepsilon = \varepsilon_1$ *ist für die* 6 *ungeraden Functionen* $\tau_{\lambda_0\lambda_1}(u_1, u_2)$ *und* $\varepsilon = 1$ *für die* 9 *übrigen.*

II. *Mit:*

$$(1)\qquad \begin{cases} u_1 = \displaystyle\int_{z_2,\, -\varepsilon_2 s_2}^{z_1,\, \varepsilon_1 s_1} dw_1, \\ u_2 = \displaystyle\int_{z_2,\, -\varepsilon_2 s_2}^{z_1,\, \varepsilon_1 s_1} dw_2 \end{cases}$$

ist:

$$(2)\qquad \sigma_{\lambda_0}(u_1, u_2) = \varphi(z_1 - z_2)\sqrt{a_{\lambda_0} - z_1}\sqrt{a_{\lambda_0} - z_2},$$

$$(3)\qquad \sigma_{\substack{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\\ \lambda_3\lambda_4\lambda_5}}(u_1, u_2) = \varphi \begin{vmatrix} \varepsilon_1\sqrt{\varphi_1^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} & \varepsilon_2\sqrt{\varphi_2^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} \\ \sqrt{\varphi_1^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}} & \sqrt{\varphi_2^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}} \end{vmatrix}.$$

III. *Mit:*

$$\begin{cases} u_1 = \displaystyle\int_{a_0}^{z_1,\, \varepsilon_1 s_1} dw_1 + \int_{a_2}^{z_2,\, \varepsilon_2 s_2} dw_1 + \int_{a_4}^{z_3,\, \varepsilon_3 s_3} dw_1 \\ u_2 = \displaystyle\int_{a_0}^{z_1,\, \varepsilon_1 s_1} dw_2 + \int_{a_2}^{z_2,\, \varepsilon_2 s_2} dw_2 + \int_{a_4}^{z_3,\, \varepsilon_3 s_3} dw_2 \end{cases}$$

(1) *oder*

$$\begin{cases} u_1 = \displaystyle\int_{a_1}^{z_1,\, \varepsilon_1 s_1} dw_1 + \int_{a_3}^{z_2,\, \varepsilon_2 s_2} dw_1 + \int_{a_5}^{z_3,\, \varepsilon_3 s_3} dw_1 \\ u_2 = \displaystyle\int_{a_1}^{z_1,\, \varepsilon_1 s_1} dw_2 + \int_{a_3}^{z_2,\, \varepsilon_2 s_2} dw_2 + \int_{a_5}^{z_3,\, \varepsilon_3 s_3} dw_2 \end{cases}$$

ist:

$$(2)\qquad \tau(u_1, u_2) = \varphi \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 \end{vmatrix},$$

$$(3)\qquad \tau_{\lambda_0\lambda_1}(u_1, u_2) = \varphi\,\varepsilon \begin{vmatrix} \varepsilon_1\sqrt{\varphi_1^{(\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} & \varepsilon_2\sqrt{\varphi_2^{(\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} & \varepsilon_3\sqrt{\varphi_3^{(\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} \\ \sqrt{\varphi_1^{(\lambda_0\lambda_1)}} & \sqrt{\varphi_2^{(\lambda_0\lambda_1)}} & \sqrt{\varphi_3^{(\lambda_0\lambda_1)}} \\ z_1\sqrt{\varphi_1^{(\lambda_0\lambda_1)}} & z_2\sqrt{\varphi_2^{(\lambda_0\lambda_1)}} & z_3\sqrt{\varphi_3^{(\lambda_0\lambda_1)}} \end{vmatrix},$$

wo $\varepsilon = 1$ *für die* 6 *ungeraden Functionen* $\tau_{\lambda_0 \lambda_1}(u_1, u_2)$ *und* $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$ *für die* 9 *übrigen.*

IV. *Mit:*

$$(1) \qquad \begin{cases} u_1 = \displaystyle\int_{z_2, -\varepsilon_2 s_2}^{z_1, \varepsilon_1 s_1} dw_1 + \int_{z_4, -\varepsilon_4 s_4}^{z_3, \varepsilon_3 s_3} dw_1 \\ u_2 = \displaystyle\int_{z_2, -\varepsilon_2 s_2}^{z_1, \varepsilon_1 s_1} dw_2 + \int_{z_4, -\varepsilon_4 s_4}^{z_3, \varepsilon_3 s_3} dw_2 \end{cases}$$

ist:

$$(2) \qquad \sigma_{\lambda_0}(u_1, u_2) = \varphi \begin{vmatrix} \varepsilon_1 \sqrt{\varphi_1^{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} & \varepsilon_2 \sqrt{\varphi_2^{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} & \varepsilon_3 \sqrt{\varphi_3^{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} & \varepsilon_4 \sqrt{\varphi_4^{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} \\ \sqrt{\varphi_1^{(\lambda_0)}} & \sqrt{\varphi_2^{(\lambda_0)}} & \sqrt{\varphi_3^{(\lambda_0)}} & \sqrt{\varphi_4^{(\lambda_0)}} \\ z_1 \sqrt{\varphi_1^{(\lambda_0)}} & z_2 \sqrt{\varphi_2^{(\lambda_0)}} & z_3 \sqrt{\varphi_3^{(\lambda_0)}} & z_4 \sqrt{\varphi_4^{(\lambda_0)}} \\ z_1^2 \sqrt{\varphi_1^{(\lambda_0)}} & z_2^2 \sqrt{\varphi_2^{(\lambda_0)}} & z_3 \sqrt{\varphi_3^{(\lambda_0)}} & z_4 \sqrt{\varphi_4^{(\lambda_0)}} \end{vmatrix},$$

$$(3) \qquad \sigma_{\substack{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \\ \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}}(u_1, u_2) = \varphi \begin{vmatrix} \varepsilon_1 \sqrt{\varphi_1^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} & \varepsilon_2 \sqrt{\varphi_2^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} & \varepsilon_3 \sqrt{\varphi_3^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} & \varepsilon_4 \sqrt{\varphi_4^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} \\ z_1 \varepsilon_1 \sqrt{\varphi_1^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} & z_2 \varepsilon_2 \sqrt{\varphi_2^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} & z_3 \varepsilon_3 \sqrt{\varphi_3^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} & z_4 \varepsilon_4 \sqrt{\varphi_4^{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5)}} \\ \sqrt{\varphi_1^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}} & \sqrt{\varphi_2^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}} & \sqrt{\varphi_3^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}} & \sqrt{\varphi_4^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}} \\ z_1 \sqrt{\varphi_1^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}} & z_2 \sqrt{\varphi_2^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}} & z_3 \sqrt{\varphi_3^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}} & z_4 \sqrt{\varphi_4^{(\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}} \end{vmatrix}.$$

In allen diesen 4 *Formelsystemen denke man sich die vorkommenden Irrationalitäten als Producte aus den* 24 *einfachen Irrationalitäten*

$$(4) \qquad \sqrt{\varphi_i^{(\lambda_0)}} = \sqrt{a_{\lambda_0} - z_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

sodass

$$(5) \qquad s_i = \sqrt{\varphi_i^{(0)}} \sqrt{\varphi_i^{(1)}} \sqrt{\varphi_i^{(2)}} \sqrt{\varphi_i^{(3)}} \sqrt{\varphi_i^{(4)}} \sqrt{\varphi_i^{(5)}},$$

$$(6) \qquad \sqrt{\varphi_i^{(\lambda_0 \lambda_1 \ldots)}} = \sqrt{\varphi_i^{(\lambda_0)}} \sqrt{\varphi_i^{(\lambda_1)}} \ldots$$

Dies festgesetzt, kann man bezüglich der Vorzeichenbestimmung in den aufgestellten Formeln einen doppelten Standpunkt einnehmen.

Wenn man erstens von dem Functionsverhältniss zwischen u_1, u_2 und den z_i, $\varepsilon_i s_i$ abstrahirt und nur fragt, wie die Vorzeichen in den algebraischen Ausdrücken (2) und (3) bestimmt werden müssen, damit alle σ- und τ-Relationen nach Substitution dieser Ausdrücke für die $\sigma(u_1, u_2)$ und $\tau(u_1, u_2)$ als algebraische Identitäten bestehen, so lautet die Antwort: Man darf die 24 einfachen Irrationalitäten $\sqrt{\varphi_i^{(\lambda_0)}}$, jede unabhängig von der anderen in ihrem Vorzeichen beliebig annehmen

und ausserdem unabhängig hiervon jede der 4 Zahlen ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 beliebig gleich $+1$ oder gleich -1 setzen.

Wenn man zweitens die Verhältnisse der rechten Seiten der Formeln (2) und (3) und die Verhältnisse der linken in ihrer gemeinsamen functionalen Abhängigkeit von den Stellen z_i, $\varepsilon_i s_i$ des hyperelliptischen Gebildes auffasst, so muss man beachten, dass *im Einzelnen* die Verhältnisse der rechten Seiten *ihrer algebraischen Form nach* zweideutige Functionen dieser Stellen sind (vgl. § 12, 56), die der linken Seiten aber *wegen der Willkür der Integrationswege*, auf denen die Argumente u_1, u_2 berechnet werden, zweideutig von den Stellen z_i, $\varepsilon_i s_i$ abhängen. Und zwar ist *im Ganzen* betrachtet das System der Verhältnisse der 16 Thetafunctionen (σ- oder τ-Functionen) bei gegebenen Stellen z_i, $\varepsilon_i s_i$ bekanntlich 16-deutig. Seine 16 Werthsysteme gehen hervor, wenn die Integralsummen u_1, u_2 einmal auf bestimmt gewählten Integrationswegen berechnet und dann der Reihe nach um je eines der 15 Integralpaare

$$2\int_{a_i}^{a_\varkappa} dw_1,\ 2\int_{a_i}^{a_\varkappa} dw_2$$

geändert werden. Die entsprechende Vieldeutigkeit besitzt das System der Verhältnisse der 16 algebraischen Ausdrücke bei gegebenen z_i, s_i und gegebenen ε_i vermöge der alsdann durch die Bedingung (5) noch offen gelassenen Willkür in den Werthen der 24 einfachen Quadratwurzeln (4).

Eine Vertauschung zweier Stellen z_i, $\varepsilon_i s_i$ in den Formelsystemen II—IV ändert an den Argumenten u_1, u_2 nichts, weil sie symmetrische Functionen jener Stellen sind (vgl. § 1, 2), und lässt die Verhältnisse der bezüglichen 16 Determinanten unberührt, weil diese letzteren gleichzeitig das Vorzeichen wechseln.

Aendert man gleichzeitig die 4 Vorzeichen ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 oder, was dasselbe bedeuten soll, verlegt man die Integrationswege sämmtlicher die Argumente u_1, u_2 constituirender Integrale ihrer Gestalt nach unverändert aus dem einen Blatte der Riemann'schen Fläche z, s in das andere, so gehen die Argumente u_1, u_2 in $-u_1$, $-u_2$ über, und wechseln die 6 ungeraden Thetafunctionen ihr Vorzeichen. Zugleich gehen die 6 den ungeraden Thetafunctionen proportionalen algebraischen Ausdrücke oder die 10 übrigen in ihren entgegengesetzten Werth über, was beides gleichbedeutend ist, da es nur auf die Verhältnisse dieser Ausdrücke ankommt.

Die Formelsysteme I—IV *umfassen als specielle Fälle die* 32 *Parameterdarstellungen, welche zur Lösung der* 16 *Jacobi'schen und der* 16 *Riemann'schen Umkehrprobleme des* § 7 *erforderlich sind;* man hat, um sie zu gewinnen, I und II unverändert beizubehalten und in

III für z_2, z_3, in IV für z_3, z_4 der Reihe nach die 15 Paare zweier verschiedener Verzweigungspunkte zu substituiren.

In ihrer allgemeinen Form bringen die 4 Parameterdarstellungen I—IV durch den Aufbau ihrer *algebraischen* Elemente den Gegensatz der doppelten Gruppirung der 16 Thetafunctionen zur Anschauung, welcher bereits durch die Untersuchungen des § 8 und § 9 an der *transcendenten* Form des Abel'schen Additionstheorems begründet war und in den *algebraischen Charakteristiken* der Thetafunctionen seinen Ausdruck findet.

Breslau, im October 1884.

Ueber das Verhalten gewisser Potenzreihen auf dem Convergenzkreise.

Von

Alfred Pringsheim in München.

Während eine Potenzreihe im Innern ihres Convergenzkreises stets unbedingt convergirt, so kann bekanntlich für die Punkte der Peripherie selbst sowohl bedingte als unbedingte Convergenz, wie auch Divergenz eintreten. Sieht man nun von dem Falle durchgängiger Divergenz ab, so scheinen mir *alle* bisher ausdrücklich untersuchten Potenzreihen, insbesondere auch die Entwicklungen aller bekannteren Functionen, nur die folgenden *zwei* Varietäten des Verhaltens darzubieten: entweder die Reihe convergirt für *alle* Punkte der Peripherie, und alsdann auch *unbedingt* (z. B. $(1+z)^m$ für $m>0$, die hypergeometrische Reihe $F(a, b, c, z)$ für $c>a+b$ etc.), oder sie convergirt dort im allgemeinen *bedingt*, dann aber stets *mit Ausschluss mindestens einer Stelle*, für welche sie *divergirt* (z. B. $(1+z)^m$ für $-1<m<0$, $\lg(1+z)$ etc.). Diese Beobachtung legte mir die Vermuthung nahe, dass eine Potenzreihe, welche für *alle* Punkte auf ihrem Convergenzkreise ausnahmslos convergirt, dort auch *unbedingt* convergiren müsste. Nachdem ich mich indessen lange vergeblich bemüht, einen Beweis für diese Annahme aufzufinden, ist es mir schliesslich wenigstens gelungen, mich von deren Unzulässigkeit endgültig zu überzeugen: ich habe nämlich solche Potenzreihen construirt, von denen sich mit aller Strenge nachweisen lässt, dass sie für die *gesammte* Peripherie ihres Convergenzkreises und dennoch nur *bedingt* convergiren. Da meines Wissens solche Reihen bisher noch nicht bekannt waren, so sei es mir gestattet, einen allgemeineren Typus dieser Gattung im folgenden zu entwickeln.

Es sei $\varphi(n)$ eine positive Function der positiven ganzen Zahl n von folgender Beschaffenheit: sie soll von einer bestimmten Stelle $n=a$ ab mit wachsendem n beständig abnehmen und zwar einerseits stärker als $\frac{1}{n}$, andererseits höchstens so stark wie ein Ausdruck der

Form $(n \lg_1 n . \lg_2 n \ldots \lg_r n)^{-1}$ — wo r eine beliebig gross zu denkende, aber endliche positive ganze Zahl, $\lg_\varkappa n$ den $\varkappa$-fach iterirten Logarithmus von n bezeichnet.

Man hat also für $n \geqq a$

$$(1) \qquad \frac{\varphi(pn)}{\varphi(n)} < \frac{1}{pn} : \frac{1}{n} \quad \text{d. h.} \quad p\,\varphi(pn) < \varphi(n)$$

und für $n = \infty$

$$(2) \qquad \varphi(n) \prec \frac{1}{n} \qquad \text{d. h.} \quad \lim n\varphi(n) = 0,$$

während auf der anderen Seite — wiederum für $n \geqq a$ —

$$(3) \qquad \varphi(n) \geqq \frac{c}{n\, lg_1 n\, lg_2 n \ldots lg_r n}$$

sein soll, eine Bedingung, welche offenbar die Divergenz der Reihe $\sum_a^\infty (\varphi(\nu)$ nach sich zieht.

(NB. Man genügt offenbar den sämmtlichen hier statuirten Bedingungen in sehr allgemeiner Weise, wenn man setzt

$$\frac{1}{\varphi(n)} = n \,.\, (lg_1 n)^{\alpha_1} (lg_2 n)^{\alpha_2} \ldots (lg_r n)^{\alpha_r}\, \vartheta(n),$$

wo die α beliebige positive oder negative Zahlen einschliesslich der Null bedeuten, welche nur folgenden Beschränkungen unterworfen sind: 1) der erste nicht verschwindende Exponent α muss positiv sein; 2) ist bis zu einer gewissen Stelle $\varkappa$ hin $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_\varkappa = 1$, so muss $\alpha_{\varkappa+1} < 1$ sein; — während $\vartheta(n)$ eine mit wachsendem n zunehmende Function bedeutet, die für $n = \infty$ schwächer unendlich wird, als jede noch so niedrige, angebbare Potenz eines beliebig oft iterirten Logarithmus*). —

Sei dann ferner b eine positive ganze Zahl > 1, so soll gesetzt werden:

$$u_\nu = (-1)^{\lambda_\nu} \varphi(\nu) \quad \text{wo} \quad \begin{cases} \lambda_\nu = 0 \text{ wenn } ab^{2\varkappa} \leqq \nu < ab^{2\varkappa+1}, \\ \lambda_\nu = 1 \quad ,, \quad ab^{2\varkappa+1} \leqq \nu < ab^{2\varkappa+2}, \end{cases}$$

sodass also

$$\begin{aligned} \sum_a^\infty u_\nu = \sum_a^\infty (-1)^{\lambda_\nu} \varphi(\nu) \\ = \quad & \varphi(a) \quad + \varphi(a+1) \quad + \cdots + \varphi(ab-1) \\ & - \{\varphi(ab) \quad + \varphi(ab+1) + \cdots + \varphi(ab^2-1)\} \\ & + \{\varphi(ab^2) + \varphi(ab^2+1) + \cdots + \varphi(ab^3-1)\} \\ & - \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{aligned}$$

*) Cf. Crelle, Bd. 76, S. 88. Math. Annalen, Bd. XXII, S. 496.

$$=\sum_0^\infty(-1)^\nu\sum_0^{p_\nu}{}_\mu\,\varphi(ab^\nu+\mu)\quad\text{wo}\quad p_\nu=a(b-1)\,b^\nu-1$$

$$=\sum_0^\infty(-1)^\nu\,\psi(p_\nu)\qquad\text{wo}\quad \psi(p_\nu)=\sum_0^{p_\nu}{}_\mu\,\varphi(ab^\nu+\mu).$$

Es soll nun gezeigt werden, dass:

1. diese Reihe $\sum u_\nu$ convergirt — und zwar offenbar nur *bedingt*, da die Reihe $\sum|u_\nu|=\sum\varphi(\nu)$ der Voraussetzung gemäss divergent ist;
2. die Reihe $\sum(u_\nu-u_{\nu+1})$ *unbedingt* convergirt.

Die Richtigkeit der ersten Behauptung ergiebt sich daraus, dass die mit alternirenden Zeichen behafteten Gliedergruppen $\psi(p_\nu)$ beständig abnehmen und schliesslich gegen Null convergiren.

Man hat nämlich

$$\psi(p_{\nu+1})=\sum_0^{p_{\nu+1}}{}_\mu\,\varphi(ab^{\nu+1}+\mu)\quad\text{wo}\quad p_{\nu+1}=a(b-1)\,b^{\nu+1}-1$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$ab^\nu=n$$

setzt:

$$\psi(p_{\nu+1})=\sum_0^{(b-1)\,bn-1}{}_\mu\,\varphi\,(bn+\mu),$$

während zugleich

$$\psi(p_\nu)=\sum_0^{(b-1)\,n-1}{}_\mu\,\varphi(n+\mu)$$

wird. Nun ist aber

$$\begin{aligned}\psi(p_{\nu+1})=\varphi(bn)\quad&+\varphi(bn+1)\quad+\cdots+\varphi(b.\overline{n+1}-1)\\ +\,\varphi(b.\overline{n+1})&+\varphi(b.\overline{n+1}+1)+\cdots+\varphi(b.\overline{n+2}-1)\\ +\,\varphi(b.\overline{n+2})&+\varphi(b.\overline{n+2}+1)+\cdots+\varphi(b.\overline{n+3}-1)\\ +\,\cdot\;\cdot\;\cdot&\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ +\,\varphi(b.\overline{bn-1})&+\varphi(b.\overline{bn-1}+1)+\cdots+\varphi(b.bn-1)\\ <b\,\{\varphi(bn)&+\varphi(b\cdot\overline{n+1})+\varphi(b.\overline{n+2})+\cdots+\varphi(b\cdot\overline{bn-1}\}\end{aligned}$$

oder mit Berücksichtigung von (1)

$$\psi(p_{\nu+1})<\varphi(n)+\varphi(n+1)+\cdots+\varphi(bn-1)$$

d. h. schliesslich:

$$\psi(p_{\nu+1})<\psi(p_\nu).$$

Die Grössen $\psi(p_\nu)$ nehmen also mit wachsendem ν beständig ab. Da aber ausserdem

$$\psi(p_\nu) = \varphi(n) + \varphi(n+1) + \cdots + \varphi(bn-1) < bn \,.\, \varphi(n),$$

so folgt mit Berücksichtigung von (2)

$$\lim_{\nu=\infty} \psi(p_\nu) = 0.$$

Hierdurch ist aber in der That die Convergenz der Reihe $\sum u_\nu$ bewiesen.*)

Ferner ergiebt sich:

$$\sum_a^\infty{}^\nu |u_\nu - u_{\nu+1}| = \sum_a^\infty{}^{\nu'} \{\varphi(\nu) - \varphi(\nu+1)\} + \sum_1^\infty{}^\varrho \{\varphi(ab^\varrho - 1) + \varphi(ab^\varrho)\}$$

wobei durch den Index an dem ersten Summenzeichen der rechten Seite ausgedrückt werden soll, dass in der betreffenden Reihe gewisse Glieder fehlen, nämlich die Differenzen derjenigen Glieder, welche in der Reihe $\sum u_\nu = \sum (-1)^{\lambda_\nu} \varphi(\nu)$ einem Zeichenwechsel unmittelbar vorangehen und unmittelbar folgen, d. h. die Glieder von der Form

$$\{\varphi(ab^\varrho - 1) - \varphi(ab^\varrho)\}$$

(an deren Stelle eben solche von der Form

$$\{\varphi(ab^\varrho - 1) + \varphi(ab^\varrho)\}$$

treten.)

Fügt man diese Glieder der ersten Summe noch hinzu, so kann man schreiben

$$\sum_a^\infty{}^\nu |u_\nu - u_{\nu+1}| = \sum_a^\infty{}^\nu \{\varphi(\nu) - \varphi(\nu+1)\} + 2\sum_1^\infty{}^\varrho \varphi(ab^\varrho)$$

$$= \varphi(a) + 2\sum_1^\infty{}^\varrho \varphi(ab^\varrho)$$

und hieraus ergiebt sich, wenn man noch beachtet, dass die Reihe

$$\sum_1^\infty{}^\varrho \varphi(ab^\varrho) < \frac{1}{a}\sum_1^\infty{}^\varrho \left(\frac{1}{b}\right)^\varrho$$

also convergent ist, die Convergenz der Reihe $\sum |u_\nu - u_{\nu+1}|$.

*) Nimmt man an Stelle der mit $\varphi(n)$ bezeichneten Grössen der Glieder der harmonischen Reihe, setzt also $\varphi(n) = \frac{1}{n}$, so nehmen die $\psi(p_\nu)$ zwar auch beständig ab, ihr Grenzwerth ist aber dann nicht $= 0$, sondern $= \lg 2$, sodass die entsprechende Reihe nicht convergirt, sondern oscillirt. Aus diesem Grunde musste eben $\varphi(n) \prec \frac{1}{n}$ gewählt werden. Man vergl. übrigens hierüber: Math. Ann. Bd. XXI, S. 370, 371.

Aus dieser Beschaffenheit der Reihenglieder u_ν folgt aber — mit Benutzung eines bekannten Abel-Dirichlet'schen Convergenzsatzes*) — dass von den beiden Reihen

$$\sum u_\nu \sin \nu\vartheta, \quad \sum u_\nu \cos \nu\vartheta,$$

die erstere für *alle* Werthe von ϑ, die letztere für alle Werthe von ϑ mit eventuellem Ausschluss von $\vartheta = 0$ bezw. $\vartheta = 2\varkappa\pi$ convergent ist. Da aber für diese besonderen Werthe die Cosinusreihe übergeht

---

*) Es ist hiermit der Satz gemeint, dass aus der unbedingten Convergenz der Reihe

$$\sum_0^\infty {}_\nu (u_\nu - u_{\nu+1})$$

die Convergenz der Reihe

$$\sum_0^\infty {}_\nu u_\nu v_\nu$$

folgt, wenn $\lim u_\nu = 0$ und $\sum_0^\infty {}_\nu v_\nu$ *nicht* unendlich (gleichgültig ob convergent oder unbestimmt) ist.

Ich will bei dieser Gelegenheit bemerken, dass die an anderer Stelle (Math. Ann. Bd. XXI, S. 333 und 375) für diesen Satz von mir gewählte Bezeichnung eines Dirichlet'schen Convergenz-Criteriums nicht ganz correct ist. In Wahrheit ist nämlich jenes Convergenz-Criterium nichts anderes als *eine* der möglichen Deutungen der von Abel herrührenden, neuerdings gewöhnlich mit dem Namen der partiellen Summation bezeichneten Transformation:

$$\sum_0^n {}_\nu u_\nu v_\nu = \sum_0^{n-1} {}_\nu (u_\nu - u_{\nu+1}) \cdot V_\nu + u_n V_n$$

wo

$$V_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

(Crelle, Bd. 1, S. 314. Lehrs. III). Abel gebraucht indessen diese Relation nur zu *Stetigkeits*-Beweisen (a. a. O. Lehrs. IV und V), während Dirichlet dieselbe — wie ich glaube wohl als der erste — auch zu *Convergenz*-Beweisen benützt hat, (cf. Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von Dedekind, 3. Aufl. S. 255), ohne jedoch den Inhalt jener Gleichung hierbei ausdrücklich als allgemeinen Convergenzsatz zu formuliren. Diese Formulirung, die man im Anhange der erwähnten Dirichlet'schen Vorlesung (S. 376) findet, rührt vielmehr von deren Herausgeber Herrn Dedekind her. Uebrigens steht sie aber mit einer unerheblichen Modification — und zwar gleichfalls als eine unmittelbare Folgerung aus dem angeführten Abel'schen Lemma — auch schon in Catalan's Traité élémentaire des Séries, p. 32, Théorème XVII (dieses Buch erschien 1860, d. h. ein Jahr vor der ersten Auflage der Dirichlet'schen Vorlesungen). — Immerhin wird man nach dem gesagten das obige Convergenz Criterium am passendsten als ein Abel-Dirichlet'sches bezeichnen können. Ich erwähne dies ausdrücklich, weil, wie ich höre, von anderer Seite Prioritätsansprüche bezüglich dieses Satzes erhoben worden sind.

in die Reihe $\sum u_\nu$, deren bedingte Convergenz oben bewiesen wurde, so ist sie also ebenfalls *durchweg* convergent.

Bildet man nun die Potenzreihe

$$f(z) = \sum u_\nu z^\nu = \sum (-1)^{\lambda_\nu} \varphi(\nu) \cdot z^\nu,$$

welche einen Convergenzkreis mit dem Radius 1 besitzt, so geht dieselbe für die Peripherie dieses Kreises über in

$$f(e^{\vartheta i}) = \sum u_\nu (\cos \nu\vartheta + i \sin \nu\vartheta)$$

und diese Reihe convergirt, wie oben bewiesen, ausnahmslos für *alle* Punkte der Kreisperipherie, jedoch nur *bedingt*.

Damit ist also die Existenz von Reihen der bezeichneten Art erwiesen und die Frage, ob eine Potenzreihe, die für alle Punkte auf ihrem Convergenzkreise convergirt, dort auch unbedingt convergiren müsse, im verneinenden Sinne entschieden.

Um ein einfaches Beispiel des oben näher definirten Typus von Potenzreihen hier anzuführen, möge gesetzt werden

$$\varphi(n) = \frac{1}{n\,lg\,n} \quad \text{und etwa speciell} \quad \varphi(1) = 1$$

$$a = 1, \qquad b = 2,$$

sodass also

$$f(z) = \sum_1^\infty (-1)^{\lambda_\nu} \varphi(\nu) \cdot z^\nu \quad \text{wo} \quad \begin{cases} \lambda_\nu = 0 \text{ wenn } 2^{2\varkappa} \leqq \nu < 2^{2\varkappa+1}, \\ \lambda_\nu = 1 \quad - \quad 2^{2\varkappa+1} \leqq \nu < 2^{2\varkappa+2}, \end{cases}$$

d. h.

$$\begin{aligned} f(z) = z & \\ & - \left\{ \frac{z^2}{2\,lg\,2} + \frac{z^3}{3\,lg\,3} \right\} \\ & + \left\{ \frac{z^4}{4\,lg\,4} + \frac{z^5}{5\,lg\,5} + \frac{z^6}{6\,lg\,6} + \frac{z^7}{7\,lg\,7} \right\} \\ & - \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{aligned}$$

eine Reihe, welche für $|z| = 1$ *durchweg bedingt convergirt.* —

An den gelieferten Existenzbeweis von Potenzreihen der in Rede stehenden Kategorie knüpfen sich naturgemäss noch die folgenden Erwägungen.

Die Mac Laurin'sche Reihenentwicklung für eine in der Umgebung des Nullpunktes analytische Function $f(z)$ convergirt noch für *alle* Punkte auf dem Convergenzkreise, wenn $f(z)$ auch dort noch überall endlich und stetig *) ist. Andererseits hängt Anzahl und Charakter

*) Vorausgesetzt, dass an Stellen mit unendlich vielen Maximis und Minimis das Stetigkeitsmass nicht unter dasjenige von $x \lg_1 \frac{1}{x} \lg_2 \frac{1}{x} \cdots \lg_{r-1} \frac{1}{x} \left(\lg_r \frac{1}{x}\right)^{1+\alpha}$ für $x = 0$ herabsinkt.

der Singularitäten, welche $f(z)$ auf dem Convergenzkreise etwa besitzt, mit gewissen Coefficienten-Eigenschaften und dem besonderen, daraus resultirenden Convergenz-Charakter der darstellenden Potenzreihe *wesentlich* zusammen (wie ich in einem demnächst zu veröffentlichenden Aufsatze noch des weiteren auseinanderzusetzen gedenke), und es ergiebt sich in Folge dessen ganz naturgemäss die Frage:

> „Lassen sich durch irgendwelche charakteristische Eigenschaften, insbesondere durch Beschaffenheit und Anzahl der auf einem Kreise um den Nullpunkt gelegenen Singularitäten solche innerhalb dieses Kreises analytische Functionen definiren, deren Entwicklung zwar auf der *gesammten* Peripherie, jedoch dort nur *bedingt* convergirt?"

während hierdurch zugleich die Aufsuchung derjenigen Bedingungen, unter welchen die Potenzentwicklung einer Function auf dem Convergenzkreise noch *unbedingt* convergirt, eine erhöhte Bedeutung gewinnt, um so mehr als ja alle bekannten, auf der Peripherie des Convergenzkreises noch endlichen und stetigen Functionen diese Bedingungen *eo ipso* zu erfüllen scheinen.*) Thatsächlich kennt man nun aber, soviel ich weiss, für diese unbedingte Convergenz nur eine einzige und zwar ausserordentlich enge Form einer *hinreichenden* Bedingung, welche Herr Lipschitz mit Benutzung der bekannten, für die Untersuchung trigonometrischer Reihen von Riemann eingeführten Methode der zweimaligen Integration abgeleitet hat.**) Diese Bedingung, welche a. a. Orte für die Form einer trigonometrischen Reihe angegeben ist, lautet mutatis mutandis für den Convergenzkreis einer Potenzreihe folgendermassen:

> Es muss $f(z)$ und $f'(z)$ für alle Punkte des Convergenzkreises eindeutig bestimmt, endlich und stetig, ebenso $f''(z)$ eindeutig bestimmt und endlich (aber nicht nothwendig stetig) sein.***)

Auf Grund dieser Voraussetzungen lässt sich dann aber zeigen, dass die Reihe für $f(z)$ für die Punkte des Convergenzkreises nicht nur überhaupt *unbedingt* convergirt, sondern dass sie dort *stärker* con-

---

*) Man vergleiche das in der Einleitung hierüber gesagte.

**) Lipschitz, höhere Analysis Bd. II, S. 491 ff.

***) Setzt man für die Punkte des Convergenzkreises $z = \varrho \cdot e^{\vartheta i}$ und

$$f(z) = \varphi(\vartheta)$$

so erfordert die von Herrn Lipschitz angegebene Form jener Bedingung ausser der Endlichkeit und Stetigkeit von $\varphi(\vartheta) = f(z)$ zunächst die Endlichkeit und Stetigkeit von $\varphi'(\vartheta)$ und die Endlichkeit von $\varphi''(\vartheta)$. Da aber

$$\varphi'(\vartheta) = i \cdot z \cdot f'(z),$$

$$\varphi''(\vartheta) = -z^2 \cdot f''(z) - z \cdot f'(z),$$

so darf man hierbei $\varphi'(\vartheta)$, $\varphi''(\vartheta)$ ohne weiteres durch $f'(z)$, $f''(z)$ ersetzen.

vergirt als eine Reihe der Form $\sum \frac{c}{\nu^2}$ (wo c eine endliche Constante bedeutet), und gerade hieraus ist ohne weiteres ersichtlich, dass die obige Bedingung viel enger gefasst sein muss, als im Wesen der Sache begründet ist, sofern ja alle Reihen, die nur so convergiren wie z. B. $\sum \frac{c}{\nu^{1+\varepsilon}}$ $(0 < \varepsilon \leqq 1)$, hierbei ein für allemal ausgeschlossen erscheinen. So findet man denn auch schon unter den einfachsten und bekanntesten Functionen $f(z)$ solche, bei denen nicht einmal die *erste* Ableitung $f'(z)$ auf dem Convergenzkreise durchweg endlich und stetig ist, und deren Entwicklung nichtsdestoweniger auf dem Convergenzkreise noch unbedingt convergirt, z. B. arcsin z, $(1+z)^m$ für $0 < m < 1$. Hieraus lässt sich aber schliessen, dass schon die Endlichkeit der *ersten* Ableitung keine *wesentliche* Bedingung für jene unbedingte Convergenz bilden kann, viel weniger also diejenige der *zweiten*. In der That ist es mir auch gelungen eine erheblich allgemeinere Form solcher Bedingungen aufzufinden, welche ich indessen, da sie mit einer anderweitigen Untersuchung in unmittelbarem Zusammenhange stehen, erst bei späterer Gelegenheit zu veröffentlichen gedenke. —

München, Juli 1884.

Sur la méthode de Gauss pour le calcul approché des intégrales.

Par

A. Markoff à St. Petersbourg.

Question 1.

Trouver un polynôme entier $F(x)$ de degré $2n-1$ satisfaisant aux conditions suivantes

$$F(a_1)=f(a_1),\ F(a_2)=f(a_2),\ldots,\ F(a_n)=f(a_n),$$
$$F'(a_1)=f'(a_1),\ F'(a_2)=f'(a_2),\ldots,\ F'(a_n)=f'(a_n),$$

où $f(x)$ est une fonction donnée et

$$a_1,\ a_2,\ .\ .\ .,\ a_n$$

sont des nombres donnés.

Solution.

Le polynôme cherché $F(x)$ est égal à

$$\sum f(a_i)\left\{\frac{\varphi(x)}{\varphi'(a_i)}\right\}^2\cdot\frac{1}{x-a_i}\cdot\left\{\frac{1}{x-a_i}+\frac{2}{a_1-a_i}+\frac{2}{a_2-a_i}+\cdots+\frac{2}{a_n-a_i}\right\}$$
$$+\sum f'(a_i)\left\{\frac{\varphi(x)}{\varphi'(a_i)}\right\}^2\frac{1}{x-a_i},$$

où

$$\varphi(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n).$$

Outre cela la différence

$$f(x)-F(x)$$

est égale à

$$[\varphi(x)]^2\cdot\int_0^1 dt_n\int_0^{t_n}dt_{n-1}\cdots\int_0^{t_2}f^{2n}(u)\cdot\Theta\,dt_1\,{}^{*)},$$

où

$$u=xt_1+a_1(t_2-t_1)+a_2(t_3-t_2)+\cdots+a_{n-1}(t_n-t_{n-1})+a_n(1-t_n)$$

et

$$\Theta=(t_2-t_1)(t_3-t_2)\ldots(t_n-t_{n-1})(1-t_n).$$

---

*) M. Ch. Hermite. Sur la formule d'interpolation de Lagrange. Crelle's Journal Band 84.

Question 2.

Présenter l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\omega(x)\,dx$$

sous la forme

$$\begin{gathered}A_1 f(a_1) + A_2 f(a_2) + \cdots + A_n f(a_n)\\ + B_1 f'(a_1) + B_2 f'(a_2) + \cdots + B_n f'(a_n)\end{gathered}$$

pour toutes les fonctions entières $f(x)$ de degré $2n - 1$.

Solution.

Il suit de la solution de la question précédente que

$$A_i = \int_\alpha^\beta \omega(x) \left\{ \frac{\varphi(x)}{(x - a_i)\,\varphi'(a_i)} \right\}^2 \left\{ 1 + 2\,\frac{x - a_i}{a_1 - a_i} + 2\,\frac{x - a_i}{a_2 - a_i} + \cdots \right\} dx$$

et

$$B_i = \int_\alpha^\beta \omega(x)\,\frac{[\varphi(x)]^2}{(x - a_i)\,[\varphi'(a_i)]^2}\,dx.$$

D'ailleurs, si $f(x)$ est une fonction quelconque, la différence

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\omega(x)\,dx - \sum A_i f(a_i) - \sum B_i f'(a_i)$$

est égale à l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta [\varphi(x)]^2\,\omega(x)\,dx \int_0^1 dt_n \cdot \int_0^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_0^{t_2} f^{2n}(u)\,\Theta\,dt_1.$$

Question 3.

Déterminer les nombres

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$$

en sorte que

$$B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n$$

soient égaux à zéro.

Solution.

Nos conditions se réduisent à l'égalité suivante

$$\int_\alpha^\beta \omega(x) \cdot \varphi(x)\,\lambda(x)\,dx = 0,$$

où $\lambda(x)$ est une fonction entière arbitraire de degré $n - 1$.

Cette égalité montre que notre fonction $\varphi(x)$ doit être le dénominateur d'une des fractions

$$\frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)}, \quad \frac{\psi_2(x)}{\varphi_2(x)}, \ldots$$

convergentes de l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta \frac{\omega(z)\,dz}{x-z}.$$

Nous arrivons de cette manière à la méthode de Gauss pour les quadratures.

Remarque.

Dans le cas ordinaire tous les nombres de nos calculs sont réels et $\omega(z) > 0$.

Alors l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta [\varphi(x)]^2\,\omega(x)\,dx \int_0^1 dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_0^{t_2} f^{2n}(u)\,\Theta\,dt,$$

est égale à

$$\frac{f^{2n}(\xi)}{1.2.3\ldots 2n} \cdot \int_\alpha^\beta [\varphi(x)]^2\,\omega(x)\,dx \qquad \alpha < \xi < \beta.$$

Conclusion.

Soit $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ une des fractions convergentes de l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta \frac{\omega(z)\,dz}{x-z}$$

la fonction $\omega(z)$ conservant le signe $+$ entre les limites de l'intégrale, c'est à dire de $z=\alpha$ jusqu'à $z=\beta$.

Soit encore

$$\varphi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n).$$

Cela posé la différence

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\omega(x)\,dx - \sum \frac{\psi(a_i)}{\varphi'(a_i)} f(a_i)$$

est égale à

$$\frac{f^{2n}(\xi)}{1.2.3\ldots 2n} \int_\alpha^\beta [\varphi(x)]^2\,\omega(x)\,dx, \qquad \alpha < \xi < \beta.$$

Par conséquent

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\omega(x)\,dx > \sum f(a_i) \frac{\psi(a_i)}{\varphi'(a_i)},$$

si

$$f^{2n}(x) > 0, \qquad \alpha < x < \beta.$$

Cas particulier:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{n}\left[f\left(\cos\frac{\pi}{2n}\right)+f\left(\cos\frac{3\pi}{2n}\right)+\cdots+f\left(\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)\right]$$
$$+\frac{f^{2n}(\xi)}{1.2.3\ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2^{2n-1}},\qquad(-1<\xi<+1).$$

Pareillement (en changeant un peu nos raisonnements) nous déduisons les formules suivantes

$$\int_{-1}^{+1}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2n-1}\left[f(-1)+2f\left(\cos\frac{(2n-3)\pi}{2n-1}\right)+2f\left(\cos\frac{(2n-5)\pi}{2n-1}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+2f\left(\cos\frac{3\pi}{2n-1}\right)+\left(2f\cos\frac{\pi}{2n-1}\right)\right]$$
$$+\frac{f^{2n-1}(\xi)}{1.2.3\ldots(2n-1)}\cdot\frac{\pi}{2^{2n-2}},\qquad(-1<\xi<+1),$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2n-1}\left[f(1)+2f\left(\cos\frac{2\pi}{2n-1}\right)+2f\left(\cos\frac{4\pi}{2n-1}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+2f\left(\cos\frac{(2n-2)\pi}{2n-1}\right)\right]$$
$$-\frac{f^{2n-1}(\xi)}{1.2.3\ldots(2n-1)}\cdot\frac{\pi}{2^{2n-2}},\qquad(-1<\xi<+1),$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2n}\left[f(+1)+2f\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)+2f\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+2f\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right)+f(-1)\right]$$
$$-\frac{f^{2n}(\xi)}{1.2.3\ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2^{2n-1}}.\qquad(-1<\xi<+1).$$

On peut parvenir à ces résultats encore par une autre voie, indépendamment de la formule de M. Hermite, tout de même que nous parvenons aux inégalités de M. Tchébychef.*)

Exemples numériques. Calcul des integrales:

$$\eta=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log(11+y)\,dy}{\sqrt{1-y^2}}\quad\text{et}\quad\xi=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\log(11+y)}.$$

Il n'est pas difficile de voir, que pour

$$-1<z<+1$$

on a

---

*) Mathematische Annalen, Band XXIV, p. 172—180.

$$\frac{1.2.3\ldots(m-1)\log e}{10^m} > \frac{(-1)^{m-1}\,d^m\log(11+z)}{dz^m} > \frac{1.2.3\ldots(m-1)\log e}{12^m}$$

et

$$\frac{(-1)^m d^m \left\{\frac{1}{\log(11+z)}\right\}}{dz^m} > 0.$$

Après cette remarque disposons les résultats de nos calculs dans la table suivante.

I) $\log\left(11+\cos\frac{\pi}{4}\right)=1,06844959$ $\qquad \frac{1}{\log\left(11+\cos\frac{\pi}{4}\right)}=0,93593559$

$\log\left(11+\cos\frac{3\pi}{4}\right)=1,01253746$ $\qquad \frac{1}{\log\left(11+\cos\frac{3\pi}{4}\right)}=0,98761778$

2,08098705 $\qquad$ 1,92355337

$\eta<1,04049353,$ $\qquad \zeta>0,96177668.$

La différence

$$\frac{1}{2}\left[\log\left(11+\cos\frac{\pi}{4}\right)+\log\left(11+\cos\frac{3\pi}{4}\right)\right]-\eta$$

est comprise entre

$$\frac{\log e}{4}\cdot\frac{1}{10^4}\cdot\frac{1}{2^3}<0,00000136 \quad \text{et} \quad \frac{\log e}{4}\cdot\frac{1}{12^4}\cdot\frac{1}{2^3}>0,00000065$$

II) $\frac{1}{2}\log 10=0,5$ $\qquad \frac{1}{2\log 10}=0,5$

$\log 11=1,04139269$ $\qquad \frac{1}{\log 11}=0,96025256$

$\frac{1}{2}\log 12=0,53959062$ $\qquad \frac{1}{2\log 12}=0,46331420$

2,08098331 $\qquad$ 1,92356676

$\eta>1,04049165$ $\qquad \zeta<0,96178338$

III) $2\log\left(11+\cos\frac{\pi}{5}\right)=2,14442750$ $\qquad \frac{2}{\log\left(11+\cos\frac{\pi}{5}\right)}=1,86529972$

$2\log\left(11+\cos\frac{3\pi}{5}\right)=2,05803528$ $\qquad \frac{2}{\log\left(11+\cos\frac{3\pi}{5}\right)}=1,94360128$

$\log 10=1$ $\qquad \frac{1}{\log 10}=1$

5,20246278 $\qquad$ 4,80890100

$\eta>1,04049255,$ $\qquad \zeta<0,96178020.$

IV) $\log 12 = 1{,}07918125$ $\qquad \frac{1}{\log 12} = 0{,}92662841$

$2\log\left(11+\cos\frac{2\pi}{5}\right) = 2{,}10684971$ $\qquad \frac{2}{\log\left(11+\cos\frac{2\pi}{5}\right)} = 1{,}89856921$

$2\log\left(11+\cos\frac{4\pi}{5}\right) = 2{,}01643215$ $\qquad \frac{2}{\log\left(11+\cos\frac{4\pi}{5}\right)} = 1{,}98370175$

$5{,}20246311$ $\qquad 4{,}80889937$

$\eta < 1{,}04049263,$ $\qquad \zeta > 0{,}96177987.$

Par conséquent

$$\eta = 1{,}0404926, \qquad \zeta = 0{,}961780,$$

exact aux dernières décimales.

Remarque. On sait que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\log(a+y)\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = \log\left\{\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}\right\}.$$

St. Petersbourg, 25. octobre 1884.

Ueber die complexe Multiplication der elliptischen Functionen.

Von

G. Pick in Prag.

Das vorwiegende Ziel der folgenden Untersuchung ist, einen einfachen Beweis für jenen Hauptsatz aus der Theorie der complexen Multiplication zu geben, welcher gelegentlich von Abel*), angedeutet, späterhin von Herrn Kronecker**) nebst einer grossen Zahl weiterer Eigenschaften der Gleichungen für die singulären Moduln eingehend erörtert worden ist. Es hat jedoch bis heute an einer zusammenhängenden und systematischen Behandlung des Gegenstandes gefehlt. Nimmt man hinzu, dass die neueren Fortschritte der Theorie der elliptischen Functionen zu einer Umarbeitung jener Resultate in dem Sinne herausfordern, dass vor dem Eingehen auf x^2 und höhere Functionen des Periodenquotienten zunächst die absolute Invariante J***) in Betracht gezogen wird, so dürfte der nachfolgende Versuch gerechtfertigt erscheinen.

Es schien indess nicht blos der Vollständigkeit wegen passend, einige Angaben hinsichtlich der Aufstellung der Gleichungen der complexen Multiplication vorausgehen zu lassen. Denn obzwar, namentlich durch Hrn. Hermite†), in dieser Hinsicht alles Wünschenswerthe schon bekannt geworden ist, so konnte doch hier ein kürzeres Verfahren eingeschlagen werden, weil es heute unbedenklich erscheint, von den Modulargleichungen für J selbst den Ausgang zu nehmen.

Hinsichtlich der Voraussetzungen, welche zum Beweise des Hauptsatzes gemacht wurden, sei folgendes erwähnt. Die Theorie der Composition quadratischer Formen, wie sie in den Vorlesungen über Zahlentheorie von Dirichlet-Dedekind im X. Supplement dargestellt ist,

*) „Solution d'un problème etc.“ Oeuvres compl. I, S. 426.

**) Berliner Monatsberichte, Bdd. 1857, 1862, etc.

***) Nach der Bezeichnung von Hrn. Klein. Vgl. Math. Ann. Bd. XIV: „Ueber die Transformation der elliptischen Functionen etc.“

†) Comptes Rendus, t. 48, 49. (1859.)

wurde im Sinne der Anmerkung auf Seite 388 modificirt gedacht, um überall Formen erster und zweiter Art gemeinsam behandeln zu können.

Es darf ferner hervorgehoben werden, dass von einem Gebrauche des Satzes, dass durch jede Classe primitiver Formen Primzahlen dargestellt werden können, Umgang genommen worden ist.

Hinsichtlich der weiteren Ausführung der Theorie, namentlich in Hinblick auf die Irreducibilität und jene Zerlegung der Gleichungen complexer Multiplication, welche den Geschlechtern der quadratischen Formen entspricht, sei es gestattet, auf die Abhandlungen von Herrn Weber zu verweisen, welche nach der gütigen Mittheilung des Verfassers demnächst in den „Acta mathematica" erscheinen sollen.

1.

Wenn für das Argument ω der elliptischen Modulfunction $J(\omega)$ die mit positivem imaginären Bestandtheil versehene Wurzel einer ganzzahligen quadratischen Gleichung

$$A + B\omega + C\omega^2 = 0 \tag{1}$$

(von negativer Determinante) gesetzt wird, so kann $J(\omega)$ selbst als „singulärer Modul" bezeichnet werden, analog der sonst für die Grösse $\varkappa^2$ üblichen Sprechweise. Es empfiehlt sich indess anstatt $J(\omega)$ die Function

$$j(\omega) = 1728\, J(\omega)$$

einzuführen, weil die singulären $j(\omega)$ *ganze* algebraische Zahlen sind, wie sich in der Folge zeigen wird.

Wir denken uns die Gleichungen von der Form (1) immer so geschrieben, dass A, B, C ohne gemeinsamen Theiler und dass A und C positiv sind. Wir werden uns dann des Ausdrucks bedienen, $j(\omega)$ gehöre zur Determinante

$$-\Delta = B^2 - 4AC,$$

und werden bisweilen zwischen singulären Moduln erster und zweiter Art unterscheiden, je nachdem die Form

$$[A, B, C] = A\omega_1^2 + B\omega_1\omega_2 + C\omega_2^2$$

von der ersten oder zweiten Art ist.

Einige Eigenschaften der Modulargleichungen sind für das folgende von Interesse. Bedeuten a, b, c, d vier ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler von der Determinante

$$ad - bc = n > 0,$$

so besitzt die algebraische Gleichung $\Phi_n(j, j') = 0$ zwischen

$$j = j(\omega)$$

und

$$j' = j\left(\frac{c + d\omega}{a + b\omega}\right)$$

folgende Beschaffenheit: Der Coefficient der höchsten vorkommenden Potenz von j' ist gleich Eins, während die Coefficienten der übrigen Potenzen ganze Functionen von j mit ganzzahligen Coefficienten sind. Ersetzt man ferner in

$$\Phi_n(j, j') = 0$$

j und j' durch denselben Buchstaben x, so erhält man eine ganzzahlige Gleichung für x, deren höchster Coefficient gleich Eins ist; und zwar ohne Weiteres im Allgemeinen, im Falle aber, dass n eine gerade Potenz einer Primzahl p ist, nach Weghebung des allen Gliedern gemeinsamen Factors p. Von der Richtigkeit dieser Behauptungen überzeugt man sich, wenn man die Form der Reihenentwicklung

$$j(\omega) = \frac{1}{q^2}\{1 + \gamma_1 q^2 + \gamma_2 q^4 + \cdots\},$$

in welcher $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ *ganze* Zahlen bedeuten, und die Rolle in Betracht zieht, welche dieselbe bei der wirklichen Aufstellung der Modulargleichungen spielt.

Zu jeder *Classe* primitiver Formen gehört ein bestimmter singulärer Werth von $j(\omega)$, und umgekehrt. Es ist daraus die Berechtigung des Ausdrucks klar, dass $j(\omega)$ mit einer bestimmten Classe componirt wird etc. In der That tritt für singuläre Moduln die Transformation in Beziehung zur Composition, wie genauer durch den folgenden Satz dargethan wird:

Durch Transformation n^{ter} Ordnung entstehen aus dem singulären Modul $j(\omega)$ von der Determinante $-\Delta$ alle und nur diejenigen zu derselben Determinante gehörigen Moduln, welche zahlentheoretisch aus $j(\omega)$ durch Composition mit denjenigen Formen der Determinante $-\Delta$ hervorgehen, durch welche n eigentlich darstellbar ist.

Um diesen für die Folge wichtigen Satz zu beweisen, erinnern wir daran, dass jedenfalls *alle* nicht äquivalenten Werthe des transformirten Periodenquotienten gefunden werden, indem man von den sämmtlichen mit dem ursprünglichen ω äquivalenten Werthen die n^{ten} Theile nimmt. Also sind in unserem Falle alle Formen der zu $j(\omega)$ gehörigen Classe hinsichtlich der Substitution

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \omega_1', \\ \omega_2 &= n \cdot \omega_2'\end{aligned}$$

zu untersuchen. Es sei nun

$$[P, Q, R]$$

eine solche Form, so geht aus ihr die folgende

$$\left[\frac{P}{\tau}, \frac{nQ}{\tau}, \frac{n^2R}{\tau}\right]$$

hervor, unter τ den grössten gemeinsamen Theiler von P, nQ, n^2R verstanden. Soll nun die neue Form zu derselben Determinante $-\Delta$ gehören, so ergiebt sich $\tau = n$, so dass die Form lautet:

$$\left[\frac{P}{n}, Q, nR\right].$$

Es ist aber augenscheinlich das Resultat der Composition von

$$[P, Q, R] \text{ und } \left[\frac{PR}{n}, Q, n\right]$$

ebenfalls

$$\left[\frac{P}{n}, Q, nR\right].$$

Umgekehrt, sei n durch eine Form der Determinante $-\Delta$ eigentlich darstellbar, so existirt eine Form der Gestalt

$$[P, Q, R],$$

worin P durch n theilbar ist und $\frac{P}{n}$, Q, Rn ohne gemeinsamen Divisor sind, in jeder Classe der Determinante $-\Delta$. Denn um $[A, B, C]$ mit $[l, m, n]$ nach Dirichlet'scher Methode zu componiren, kann man zunächst eine zu $[A, B, C]$ äquivalente Form $[P_1, Q_1, R]$ so wählen, dass R gegen n relativ prim ist; dann aber wird nach Lösung der verträglichen Congruenzen

$$Q \equiv Q_1 (\text{mod. } 2R),$$
$$Q \equiv m (\text{mod. } 2n),$$
$$[P_1, Q_1, R] \text{ äquivalent mit } [P, Q, R],$$
$$[l, m, n] \text{ äquivalent mit } \left[\frac{PR}{n}, Q, n\right],$$

und das Resultat der Composition wird die Form

$$\left[\frac{P}{n}, Q, Rn\right],$$

deren Wurzel aus der von $[P, Q, R]$ auch durch Transformation n^{ter} Ordnung hervorgeht.

Zur Vervollständigung des auf solche Weise begründeten Satzes fragen wir noch, in welcher Multiplicität jede der so charakterisirten Wurzeln von

$$\Phi_n(j, j') = 0$$

auftritt. Versteht man unter ω das Argument von j, so stellen bekanntlich

$$\frac{1}{n}\,\omega \quad \text{und} \quad \frac{1}{n}\,\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}$$

dann und nur dann *verschiedene* Repräsentanten dar, wenn

$$\gamma \gtrless 0 \ (\mathrm{mod.}\ n)$$

ist. Sind also $[P, Q, R]$ und $[P', Q', R']$ zwei äquivalente Formen der Determinante $-\Delta$, worin P und P' durch n theilbar,

$$\left[\frac{PR}{n}, Q, n\right], \quad \left[\frac{P'R'}{n}, Q', n\right]$$

die zugehörigen transformirenden Compositionsformen, und endlich

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

die Substitution, welche $[P', Q', R']$ in $[P, Q, R]$ überführt, so hat man nur die Beschaffenheit von γ hinsichtlich des Moduls n zu untersuchen. Es ist aber

$$Q = 2P'\alpha\beta + Q'(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2R'\gamma\delta,$$

oder

$$\begin{aligned} Q - Q' &= 2P'\alpha\beta + 2Q'\beta\gamma + 2R'\gamma\delta \\ &= 2P'\alpha\beta + 2\gamma(Q'\beta + R'\delta) \end{aligned}$$

und

$$P = P'\alpha^2 + \gamma(Q'\alpha + R'\gamma),$$

also

$$\left.\begin{aligned} Q - Q' &\equiv 2\gamma(Q'\beta + R'\delta) \\ 0 &\equiv 2\gamma(Q'\alpha + R'\gamma) \end{aligned}\right\} (\mathrm{mod.}\ 2n).$$

Aus der ersten dieser Congruenzen folgt, dass

$$Q' \equiv Q \ (\mathrm{mod.}\ 2n),$$

falls γ durch n theilbar ist. Umgekehrt, ist $Q' - Q$ ein Multiplum von $2n$, so eliminire man aus den beiden Congruenzen einmal R', das anderemal Q', wodurch man erhält

$$\left.\begin{aligned} \gamma \cdot Q' &\equiv 0 \\ \gamma \cdot R' &\equiv 0 \end{aligned}\right\} (\mathrm{mod.}\ n).$$

Da nun Q' und R' mit n (als Theiler von P') keinen Factor gemein haben können, so folgt nothwendig

$$\gamma \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ n).$$

Also liefert die Composition mit zwei Formen, welche n darstellen, denselben oder verschiedene Repräsentanten, jenachdem sie mit derselben oder mit verschiedenen Wurzeln der Congruenz

$$\xi^2 \equiv -\Delta \ (\mathrm{mod.}\ 2n)$$

gebildet sind.

2.

Sind

$$j_1, j_2, \ldots, j_{h_\Delta}$$

die sämmtlichen h_Δ zur Determinante $-\Delta$ gehörigen singulären Moduln, so wird die Gleichung

$$F_\Delta(x) = (x - j_1)(x - j_2) \cdots (x - j_{h_\Delta}) = 0$$

die zur Determinante $-\Delta$ gehörige „Gleichung" der complexen Multiplication" genannt. Die Mittel zur Aufstellung und einige elementare Eigenschaften dieser Gleichungen sollen zunächst erörtert werden.

Die Wurzeln der schon früher erwähnten Gleichungen

$$\Phi_n(x, x) = 0$$

sind sämmtlich singuläre Moduln*). Denn soll ω mit $\frac{1}{n} \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}$ äquivalent sein, so muss es offenbar einer ganzzahligen quadratischen Gleichung genügen. Um zu entscheiden, durch *welche* singuläre Moduln $\Phi_n(x, x) = 0$ befriedigt wird, hat man nach dem früheren nur zu fragen, welches die Determinanten $-\Delta$ sind, durch deren Hauptclassen n darstellbar ist. Man erhält demnach als nothwendige und hinreichende Bedingung

$$n = \frac{\Delta}{4} t^2 + u^2,$$

bzw.

$$n = \frac{\Delta + 1}{4} t_1^2 + t_1 u_1 + u_1^2,$$

unter t, u, resp. t_1, u_1 ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler verstanden, je nachdem es sich um Moduln erster Art $[\Delta \equiv 0 \pmod{4}]$ oder solche zweiter Art $[\Delta \equiv -1 \pmod{4}]$ handelt. Wir fragen ferner nach der Multiplicität der so bezeichneten Wurzeln von $\Phi(x,x) = 0$. Da nun

$$\frac{d\Phi_n(x, x)}{dx} = \left[\frac{\partial \Phi_n(j, j')}{\partial j} + \frac{\partial \Phi_n(j, j')}{\partial j'}\right]_{j=j'=x}$$
$$= 2\left[\frac{\partial \Phi_n(j, j')}{\partial j'}\right]_{j=j'=x},$$

so sieht man, dass x dann und nur dann eine mehrfache Wurzel von $\Phi_n(x, x) = 0$ ist, wenn $j' = x$ eine mehrfache Wurzel von

$$\Phi_n(x, j') = 0$$

ist. Hier tritt nun das am Schlusse des vorigen Paragraphen angegebene Criterium in Kraft; und zwar ergiebt eine ganz einfache Discussion der Gleichungen

$$\begin{cases} \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \\ Q = 2\frac{\Delta}{4}\alpha\beta + 2\gamma\delta, \\ n = \frac{\Delta}{4}\beta^2 + \delta^2, \end{cases}$$

*) Vgl. hiezu und wegen des folgenden auch Gierster, Math. Ann. XXI. „Ueber Classenzahlrelationen".

resp.

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \\ &Q = 2\,\frac{\Delta+1}{4}\,\alpha\beta + (\alpha\delta + \beta\gamma) + 2\gamma\delta, \\ &n = \frac{\Delta+1}{4}\,\beta^2 + \beta\delta + \delta^2, \end{aligned}\right.$$

welche aussagen, dass $\left[\frac{Q^2+\Delta}{4n}, Q, n\right]$ der bezüglichen Hauptclasse angehört, folgendes: Die *einfachen* Wurzeln von $\Phi_n(x, x) = 0$ sind

1) Die zur Determinante $-4n$ gehörigen singulären Moduln (erster Art),
2) wenn $n \equiv -1 \pmod 4$, die zur Determinante $-n$ gehörigen Moduln (zweiter Art); hievon ist jedoch der Fall auszunehmen, dass n das dreifache eines vollständigen Quadrates ist, in welchem nämlich diese Moduln *dreifache* Wurzeln von $\Phi_n(x, x) = 0$ sind.

Hieraus ergeben sich folgende Regeln zur Gewinnung der Gleichungen der complexen Multiplication:*)

1) Wenn $\Delta \equiv 0, 4, 8 \pmod{16}$, erhält man das Polynom $F_\Delta(x)$, indem man in bekannter Weise aus $\Phi_{\frac{\Delta}{4}}(x, x)$ das Product der *einfachen* Linearfactoren abscheidet.
2) Wenn $\Delta \equiv -4 \pmod{16}$, ergiebt eben dieses Verfahren zunächst $F_\Delta(x) \cdot F_{\frac{\Delta}{4}}(x)$; hier ist dann das Polynom $\Phi_{\frac{\Delta+4}{16}}(x, x)$ zu Hilfe zu nehmen, welches durch $F_{\frac{\Delta}{4}}(x)$ theilbar, gegen $F_\Delta(x)$ jedoch theilerfremd ist. Hierdurch ist auch zugleich
3) Der Fall $\Delta \equiv -1 \pmod 4$ erledigt, wofern nicht
4) $\Delta \equiv -1 \pmod 4$ das dreifache eines vollständigen Quadrats ist. Dann aber erhält man $F_\Delta(x)$ als Product der in $\Phi^\Delta(x, x)$ *dreifach* auftretenden Linearfactoren, wie leicht zu sehen ist.

Aus einer früher angegebenen Eigenschaft der Gleichungen $\Phi_n(x, x) = 0$ folgt, dass *die singulären Moduln ganze algebraische Zahlen sind.*

Die Gleichungen $F_\Delta(x) = 0$ lassen sich demnach so schreiben, dass der Coefficient der höchsten vorkommenden Potenz von x gleich Eins, die übrigen ganze rationale Zahlen sind.

Hinsichtlich der Realität der singulären Moduln lässt sich noch ein sehr einfaches Gesetz angeben. Ist nämlich $j(\omega)$ reell, so liegt einer der zugehörigen Werthe des Arguments ω auf der Axe der imaginären Zahlen oder auf einer zu ihr im Abstande $-\frac{1}{2}$ parallelen Geraden. Die zugehörige Form $[P, Q, R]$ besitzt dann offenbar die Eigenschaft, dass

*) Wobei jedoch von den Werthen $j = 1728$ und 0 abgesehen ist.

$$Q \equiv 0 \pmod{R}$$

ist. Umgekehrt giebt es in jeder ambigen Classe Formen, welche diese Eigenschaft besitzen. Es folgt somit:

Die reellen singulären Moduln gehören zu den ambigen Classen und umgekehrt.

3.

Wir unterwerfen nun irgend eine Wurzel j_0 der Gleichung

$$F_\Delta(x) = 0$$

einer Transformation von dem ungeraden Primzahlgrade p, wobei p nicht in Δ enthalten und $\left(\frac{-\Delta}{p}\right) = +1$ sein soll. Unter den Wurzeln j' der Gleichung

$$\Phi_p(j_0, j') = 0$$

befinden sich nach den Ausführungen des ersten Paragraphen zwei welche zugleich der Gleichung

$$F_\Delta(j') = 0$$

genügen, nämlich diejenigen, welche aus j_0 durch Composition mit den Formen

$$\left[\frac{Q^2 + \Delta}{4p}, \pm Q, p\right]$$

hervorgehen, wo selbstverständlich

$$Q^2 \equiv -\Delta \pmod{2p}.$$

Wenn nun erstens eine dieser Formen (und folglich beide) der *ambigen* Classe P angehört, so sind jene beiden Wurzeln j' einander gleich und die Gleichungen

$$F_\Delta(j') = 0,$$

$$\Phi_p(j_0, j') = 0$$

besitzen nur *eine* gemeinsame Lösung j_1, welche sich folglich als rationale Function von j_0 mit rationalen Zahlencoefficienten darstellen lässt:

$$j_1 = P(j_0).$$

Die Berechtigung diese Relation so zu bezeichnen ist klar; denn die beiden Gleichungen, deren gemeinsamer Linearfactor

$$j' - P(j_0)$$

ist, sind ganz unabhängig von der Wahl des Moduls j_0, und nur bestimmt durch Angabe von p, oder, was hier dasselbe ist, der Form P.

Ist zweitens keine der beiden p darstellenden Formenclassen ambig, so sind dieselben verschieden und können mit den Symbolen

$$P \text{ und } P^{-1}$$

bezeichnet werden. Dann ist der grösste gemeinsame Theiler von $F_\Delta(j')$ und $\Phi_p(j_0, j')$ ein Polynom zweiten Grades in j' mit rationalen ganzzahligen Functionen von j_0 als Coefficienten:

$$j'^2 + A(j_0)\, j' + B(j_0);$$

setzt man dieses Polynom gleich Null, so besitzt die entstandene Gleichung die Wurzeln j_1, j_{-1}, welche symbolisch durch

$$\begin{aligned} j_1 &= P \cdot j_0, \\ j_{-1} &= P^{-1} \cdot j_0 \end{aligned}$$

zu bezeichnen sind.

Es folgt nun unmittelbar, dass die Wurzeln der Gleichung

$$j'^2 + A(j_1)\, j' + B(j_1) = 0$$

folgende Grössen sind:

$$\begin{aligned} P \cdot P \cdot j_0 &= j_2 = P^2 \cdot j_0, \\ P^{-1} \cdot P \cdot j_0 &= j_0, \end{aligned}$$

und so fort. Wir können also sagen, dass aus der Reihe der Grössen

(I) $\quad \ldots j_{-2}, j_{-1}, j_0, j_1, j_2, \ldots,$ *)

welche aus einer von ihnen, etwa j_0, durch wiederholte Composition mit der Form P hervorgehen:

$$j_r = P^r \cdot j_0,$$

je zwei, deren Index um Zwei verschieden ist, Wurzeln einer Gleichung sind, deren Coefficienten rational mittelst rationalen Zahlen in der dazwischenliegenden Grösse darstellbar sind. Offenbar folgt ferner, dass durch zwei aufeinanderfolgende Glieder jener Reihe jedes andere rational (und mit rationalen Zahlencoefficienten) ausgedrückt werden kann:

$$j_{\varkappa+r} = C_r(j_\varkappa, j_{\varkappa+1}),$$

wobei die Form der Function C_r einzig von dem Index r abhängig ist.

Die quadratischen Gleichungen, welche auf solche Weise erhalten sind, lassen sich nun durch ein eigenthümliches Verfahren auflösen. Es sei p^λ die niedrigste Potenz von p, welche durch die Hauptclasse darstellbar ist, so dass also P zum Exponenten λ gehört. Unter dieser Voraussetzung wiederholen sich die Grössen der Reihe (I) immer nach je λ Gliedern. Es ist also

$$j_{\varkappa+\lambda} = j_\varkappa,$$

und nützlich zu bemerken, dass $\lambda > 2$ ist, weil andernfalls die Form P ambig wäre. Zu jeder Transformation p^λten Grades, durch welche aus j_r wieder $j_\varkappa (= j_{\varkappa+\lambda})$ hervorgeht, gehört ein bestimmter Multiplicator, auf dessen Berechnung es für die Erledigung unserer Absicht

*) Wegen dieses Arrangements vgl. Joubert, Comptes Rendus, t. 50 (1860).

ankommt. Bezeichnet man allgemein mit M den Multiplicator einer Transformation $n$ten Grades

$$\omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2,$$
$$\omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2,$$

bei welcher

$$\frac{\omega_2'}{\omega_1'} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \omega$$

ein zulässiges Werthesystem bildet, so ist

$$M\omega_1 = \omega_1',$$
$$M\omega_2 = \omega_2',$$

also zunächst

$$M = a + b\omega.$$

Bildet man nun mit Hülfe der Modulargleichung

$$\Phi_n(j, j') = 0$$

den Differentialquotienten $\frac{dj'}{dj}$ für die betrachteten Specialwerthe

$$j = j' = j(\omega),$$

so ergiebt sich mit Rücksicht auf

$$\omega' = \frac{c + d\omega}{a + b\omega},$$

an welche Relation ja auch die benachbarten Werthe gebunden sind,

$$\left(\frac{dj'}{dj}\right)_{j'=j} = \frac{d\omega'}{d\omega},$$

oder

(M) $$\left(\frac{dj'}{dj}\right)_{j'=j} = \frac{n}{M^2} \text{*)}.$$

In dem speciellen Falle unserer Transformation von der Ordnung p^λ, stellt nun das Werthesystem $j = j_\varkappa$, $j' = j_\varkappa$ einen Doppelpunkt der Curve

$$\Phi_{p^\lambda}(j, j') = 0$$

dar, weil nach den im ersten Paragraphen entwickelten Criterien $x = j_\varkappa$ eine doppelt zählende Wurzel jeder der beiden Gleichungen

$$\Phi_{p^\lambda}(x, j_\varkappa) = 0, \quad \Phi_{p^\lambda}(j_\varkappa, x) = 0$$

bildet. Hier besitzt also die linke Seite der Gleichung (M) zwei Werthe, und entsprechend muss auch M^2 für diesen Fall eine zweideutige Grösse sein. Es kommt nun alles darauf an, jene Gleichung durch genaue

*) Vgl. die allgemeine Formel z. B. bei Hurwitz. Math. Ann. Bd. XVIII, „Independente Theorie der Modulfunctionen etc." Sie ist hier von Anfang hergeleitet worden, weil ohnedies über eine eventuell hinzutretende 6te Wurzel der Einheit Zweifel entstehen könnten.

Bestimmung beider Seiten aus einer scheinbar vierdeutigen Beziehung in zwei eindeutige zu verwandeln. Zu diesem Zwecke zerlegen wir die in Rede stehende Transformation $p^{\lambda\text{ter}}$ Ordnung in jene λ Transformationen p^{ter} Ordnung, welche λ aufeinanderfolgenden Compositionen mit der Form P äquivalent sind. Die Grösse $j_\varkappa$ geht dann durch die Reihe der Zwischengrössen

$$j_{\varkappa+1},\ j_{\varkappa+2},\ \cdots,\ j_{\varkappa+\lambda-1}$$

in $j_{\varkappa+\lambda}=j_\varkappa$ selbst über. Die im Sinne der Gleichung

$$\Phi_p(j,j')=0$$

gebildeten Differentialquotienten

$$\left(\frac{dj'}{dj}\right)_{\substack{j=j_{\varkappa+\varrho}\\ j'=j_{\varkappa+\varrho+1}}}$$

sind *eindeutig* durch die jeweils betheiligten Argumente bestimmt, und das Product

$$\prod_{\varrho=0}^{\lambda-1}\left(\frac{dj'}{dj}\right)_{\substack{j=j_{\varkappa+\varrho}\\ j'=j_{\varkappa+\varrho+1}}}$$

stellt einen der beiden Werthe der linken Seite von (M) dar. Den zugehörigen Werth von M^2 erhält man wohl am kürzesten durch das folgende Verfahren. Es sei

$$[MNp^{\lambda-1},\ Q,\ p]$$

eine Form der Classe P,

$$[Mp^\lambda,\ Q,\ N]$$

eine der zu $j_\varkappa$ gehörigen Formen. In solche Gestalt lassen sich Formen der betreffenden Classen stets bringen, wie eine ganz elementare Ueberlegung zeigt. Es geht $[Mp^\lambda,\ Q,\ N]$ in die äquivalente Form über durch λ-malige Composition mit $[MNp^{\lambda-1},\ Q,\ p]$, oder durch einmalige Composition mit $[M,\ N,\ Q,\ p^\lambda]$. Man erhält durch Zusammenziehung aller bei diesen Compositionen auftretenden Identitäten:

$$\left\{\begin{aligned}
&\left(\omega_1-\frac{\omega_2}{\omega^{(\varkappa)}}\right)\cdot\left[\frac{Q-\sqrt{-\Delta}}{2}\,\Omega_1+p^\lambda\Omega_2\right]\\
&\qquad\qquad=\left(\omega_1'-\frac{\omega_2'}{\omega^{(\varkappa)}}\right)\cdot\left[\frac{Q-\sqrt{-\Delta}}{2}\,\Omega_1'+p\,\Omega_2'\right]^\lambda,\\
&\left(\omega_1-\frac{\omega_2}{\overline{\omega}^{(\varkappa)}}\right)\cdot\left[\frac{Q+\sqrt{-\Delta}}{2}\,\Omega_1+p^\lambda\Omega_2\right]\\
&\qquad\qquad=\left(\omega_1'-\frac{\omega_2'}{\overline{\omega}^{(\varkappa)}}\right)\cdot\left[\frac{Q+\sqrt{-\Delta}}{2}\,\Omega_1'+p\,\Omega_2'\right]^\lambda,
\end{aligned}\right.$$

wo $\omega^{(\varkappa)}$, $\overline{\omega}^{(\varkappa)}$ die beiden Wurzeln der Form

$$[Mp^\lambda,\ Q,\ N]$$

$\omega_1, \omega_2;\ \omega_1', \omega_2';\ \Omega_1, \Omega_2;\ \Omega_1', \Omega_2'$ dagegen Veränderliche bedeuten, welche an die folgenden Relationen gebunden sind. Es ist erstens aus ω_1', ω_2' vermittelst der Grössen Ω_1', Ω_2' ein neues Zahlenpaar

$$\begin{aligned}\omega_1'' &= (Q\Omega_1 + p\Omega_2)\,\omega_1' + N\Omega_1 \cdot \omega_2',\\ \omega_2'' &= -Mp^{\lambda-1}\Omega_1 \cdot \omega_1' + \Omega_2 \cdot \omega_2'\end{aligned}$$

zu bilden, dann aus diesem ein weiteres

$$\begin{aligned}\omega_1''' &= (Q\Omega_1 + p\Omega_2)\,\omega_1'' + Np\Omega_1 \cdot \omega_2'',\\ \omega_2''' &= -Mp^{\lambda-2}\Omega_1 \cdot \omega_1'' + \Omega_2 \cdot \omega_2'',\end{aligned}$$

und ähnlich fortzufahren; das auf solche Weise erhaltene Zahlenpaar $\omega_1^{(\lambda+1)}, \omega_2^{(\lambda+1)}$ ist nun gleich zu setzen den Ausdrücken

$$\begin{aligned}&(Q\Omega_1 + p^\lambda\Omega_2) \cdot \omega_1 + N\Omega_1 \cdot \omega_2,\\ &-M\Omega_1 \cdot \omega_1 + \Omega_2 \cdot \omega_2.\end{aligned}$$

Es sei jetzt

$$\Omega_1' = 0,\quad \Omega_2' = 1,$$

und für Ω_1, Ω_2 ein Zahlenpaar t, u genommen, welches eine Darstellung der Zahl 1 durch die Form $[MN,\ Q,\ p^\lambda]$ vermittelt. Dann gehen die Identitäten über in

$$\left\{\begin{aligned}&\left(\omega_1 - \frac{\omega_2}{\omega^{(\varkappa)}}\right)\cdot\left[\frac{Q-\sqrt{-\Delta}}{2}\,t + p^\lambda u\right] = p^\lambda\left(\omega_1' - \frac{\omega_2'}{\omega^{(\varkappa)}}\right),\\ &\left(\omega_1 - \frac{\omega_2}{\bar\omega^{(\varkappa)}}\right)\cdot\left[\frac{Q+\sqrt{-\Delta}}{2}\,t + p^\lambda u\right] = p^\lambda\left(\omega_1' - \frac{\omega_2'}{\bar\omega^{(\varkappa)}}\right),\end{aligned}\right.$$

während die zugehörigen Relationen jetzt einfach lauten

$$\begin{aligned}p^\lambda \cdot \omega_1' &= (Qt + p^\lambda t)\,\omega_1 + Nt \cdot \omega_2,\\ \omega_2' &= \quad -Mt \cdot \omega_1 + u \cdot \omega_2.\end{aligned}$$

Da nun

$$(Qt + p^\lambda u)\cdot u - Nt\cdot(-Mt) = MNt^2 + Qtu + p^\lambda u^2$$

den Werth Eins besitzt, so stellen diese Relationen nichts anderes als eine Transformation p^{λ}ter Ordnung vor. Es zeigt ferner die erste der Identitäten, dass für

$$\frac{\omega_2'}{\omega_1'} = \omega^{(\varkappa)},$$

auch

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \omega^{(\varkappa)}$$

wird. Setzt man endlich, diese Specialwerthe im Auge behaltend,

$$\begin{aligned}\omega_1 &= M \cdot \omega_1',\\ \omega_2 &= M \cdot \omega_2'\end{aligned}$$

in die zweite Identität ein, so erhält man für den Multiplicator

$$M = \frac{p^\lambda}{\frac{Q+\sqrt{-\Delta}}{2}\,t + p^\lambda u}\,.$$

Dieser Werth ist nun in der That bis auf sein Vorzeichen unveränderlich, wenn auch für Ω_1', Ω_2' ein anderes Zahlenpaar, welches eine Darstellung von p durch die Form $[MNp^{\lambda-1}, Q, p]$ bildet, für t, u ein anderes Zahlenpaar, welches eine Darstellung von 1 durch $[MN, Q, p^\lambda]$ bildet, eingesetzt wird. Und ferner ist unmittelbar ersichtlich, dass der gefundene Multiplicator einzig und allein von den Zahlen p, Q, das heisst von der Form P abhängig ist, und zwar so, dass er, vom Vorzeichen abgesehen, in den conjugirten Werth übergeht, wenn man das Vorzeichen von Q ändert, also P in P^{-1} übergehen lässt.

Man drücke nun in der Gleichung

$$\text{(M')} \qquad \prod_{\varrho=0}^{\lambda-1} \left(\frac{dj'}{dj}\right)_{\substack{j=j_{\varkappa+\varrho} \\ j'=j_{\varkappa+\varrho+1}}} = p^{-\lambda}\left(\frac{Q+\sqrt{-\Delta}}{2}\,t + p^\lambda u\right)^2$$

die Grössen $j_{\varkappa+2}, j_{\varkappa+3}, \ldots, j_{\varkappa+\lambda-1}$ in der früher besprochenen Weise durch $j_\varkappa$ und $j_{\varkappa+1}$ aus. Dann stellt diese Gleichung eine Bestimmungsgleichung für

$$j_{\varkappa+1} = P \cdot j_\varkappa$$

vor, welcher nicht zugleich durch

$$j_{\varkappa-1} = P^{-1} \cdot j_\varkappa$$

genügt wird, weil nach der obigen Auseinandersetzung mit dem Uebergange von P in P^{-1} auch die rechte Seite der Gleichung in den conjugirten Werth sich verwandelt. Daher kann man mit Zuhilfenahme von

$$j_{\varkappa+1}^2 + A(j_\varkappa)\, j_{\varkappa+1} + B(j_\varkappa) = 0$$

$j_{\varkappa+1}$ rational durch $j_\varkappa$ ausdrücken, wobei aber die Coefficienten mit der Irrationalität $\sqrt{-\Delta}$ behaftet erscheinen.

Wir sind nun in der Lage folgendermassen zusammenzufassen:

Jeder symbolischen Relation

$$j' = P \cdot j$$

entspricht eine wirkliche

$$j' = P(j),$$

wobei $P(z)$ eine durch die Formenclasse P vollständig bestimmte) rationale Function bedeutet, deren Coefficienten dem Zahlenkörper angehören, welcher durch $\sqrt{-\Delta}$ bezeichnet ist.*

---

*) Bis auf Veränderungen mittelst der Gleichung $F_\Delta(j) = 0$.

4.

Es seien nun j und j' zwei beliebig ausgewählte Wurzeln von

$$F_\Delta(x) = 0,$$

und es sei A die Formenclasse, mit welcher j zu componiren ist, um in j' überzugehen:

$$j' = A \cdot j$$

in symbolischer Schreibweise. Es sei ferner die der Classe A angehörige Form

$$[M, Q, a]$$

so ausgewählt, dass

$$a = p^\pi \cdot p'^{\pi'} \cdots$$

eine ungerade gegen Δ theilerfremde Zahl ist. Man hat dann

$$\left[\frac{Ma}{p}, Q, p\right]^\pi \cdot \left[\frac{Ma}{p'}, Q, p'\right]^{\pi'} \cdots = [M, Q, a],$$

oder

$$A = P^\pi \cdot P'^{\pi'} \cdots,$$

wo somit P, P', ... Formenclassen bezeichnen, durch welche beziehungsweise die Primzahlen $p, p', \ldots$ darstellbar sind. Durch wiederholte Anwendung des im vorigen Paragraphen bewiesenen Satzes ist es nun offenbar möglich, *die Grösse*

$$j' = P^\pi \cdot P'^{\pi'} \cdots j$$

rational mit in $\sqrt{-\Delta}$ *rationalen Coefficienten durch* j *auszudrücken:*

$$j' = A(j).$$

Zugleich wird ersichtlich, dass die Function $A(z)$ nur von der Formenclasse A und nicht von j abhängig ist, weil auch die Functionen $P(z)$, $P'(z)$, ..., aus welchen sie sich zusammensetzt, den Formenclassen P, P', ... correspondiren, und von den jeweiligen Argumenten unabhängig sind. Die verschiedenen Zerlegungen der Classe A, welche durch verschiedene Auswahl der darstellbaren Zahl a erhalten werden können, führen nothwendig zu identischen Resultaten hinsichtlich der rationalen Function $A(z)$. Denn alle auf solche Weise sich ergebenden Functionen bewirken bei den *sämmtlichen* Wurzeln von

$$F_\Delta(x) = 0$$

immer dieselben Wertänderungen, und sind also mit Rücksicht auf die Gleichung identisch.

Das System der Functionen $A_1(z)$, $A_2(z)$, ..., *welches* durch die vorigen Betrachtungen gefunden ist, *bildet eine Gruppe, welche mit der „Gruppe der Composition" für die Determinante* $-\Delta$ *holoedrisch isomorph ist.* Denn offenbar folgt aus der Relation

$$A_r \cdot A_s = A_t$$

zwischen drei Formenclassen, die gleichbedeutende zwischen den entsprechenden rationalen Functionen.

Es übertragen sich somit alle Eigenschaften der Gruppe der Composition auf die Gruppe jener Functionen. Für die Gleichungen der complexen Multiplication kann man somit etwa folgenden Satz aussprechen:

Die Gleichung

$$F_\Delta(x) = 0$$

wird durch Adjunction der Quadratwurzel aus $-\Delta$ *zu einer Abel'schen Gleichung.*

Das ist gleichbedeutend mit dem Satze, welchen Abel in der Form ausspricht:

„*Toutes ces valeurs sont exprimables par des radicaux**)."

Prag, im November 1884.

---

*) Während des Druckes vorliegender Untersuchung ist eine erste Abhandlung von Hrn. Weber erschienen (Acta math. VI, 4), in welcher die Zerlegung der in Rede stehenden Gleichungen nach den Geschlechtern der Formen gelehrt wird; hingegen sind die Bestimmung der Gruppe jener Gleichungen und fernere algebraisch-zahlentheoretische Sätze für eine zweite Abhandlung in Aussicht gestellt. Durch briefliche Mittheilung von Hrn. Weber war ich in der angenehmen Lage die im Texte verwendeten Bezeichnungen mit den seinigen insofern in Uebereinstimmung zu bringen, als $j(\omega)$ an beiden Orten dieselbe Bedeutung besitzt.

Es sei noch erlaubt, auf eine inzwischen erschienene Note in den Berichten der sächsischen Gesellschaft d. Wissenschaften zu verweisen (Sitzung vom 12. Januar 1885), in welcher ich einen Beweis für die Irreducibilität der Gleichungen der complexen Multiplication in seinen Grundzügen zu geben versucht habe.

[Febr. 1885.]

Ueber projectivische Erzeugung von Curven.

Von

Karl Bobek in Prag.

Der Chasles'sche Satz über die projectivische Erzeugung einer vorgelegten Curve der $n = (\nu' + \nu)^{\text{ter}}$ Ordnung lautet:

„Soll man auf einer Curve der $n = (\nu' + \nu)^{\text{ter}}$ Ordnung ν^2 Punkte so bestimmen, dass sie die Basispunkte eines Curvenbüschels ν^{ter} Ordnung bilden, so kann man von ihnen, wenn $\nu' \geqq \nu - 2$ ist, $3\nu - 2$ beliebig vertheilen."*)

Wir wollen diesen Satz für einen speciellen Fall betrachten.

Ist $\nu' = \nu$ und hat die Curve n^{ter} Ordnung Doppelpunkte, so sollte man erwarten, dass man $3\nu - 2$ von den Doppelpunkten zur Basis des Büschels ν^{ter} Ordnung wählen darf; dem ist aber nicht so, wie folgendes Beispiel deutlich zeigt.

Es sei eine Curve 6^{ter} Ordnung C_6 vorgelegt, mit 7 Doppelpunkten, vom Geschlechte 3. Ist $\nu = 3$, so würde man also $3\nu - 2 = 7$ Punkte willkürlich auf C_6 wählen können, und würde dann noch zwei Punkte finden, welche mit den 7 angenommenen die Basis eines Büschels von Curven dritter Ordnung bilden würden. Nimmt man nun die 7 willkürlichen Punkte in den Doppelpunkten an, und würde man auf C_6 noch zwei Punkte a, a' finden, dass durch diese und die 7 Doppelpunkte ein Büschel von Curven dritter Ordnung geht, so würde dieser Büschel auf C_7 eine lineare Schaar von zwei Punkten $g_2^{(1)}$ ausschneiden**) und C_7 müsste also eine *hyperelliptische* Curve sein, während die allgemeine C_6 mit 7 Doppelpunkten *nicht* hyperelliptisch ist.

Wir ersehen den Grund leicht in Folgendem. Gesetzt die Curve C_n der $n = 2\nu^{\text{ten}}$ Ordnung besitze d Doppelpunkte, von denen wir δ

*) Vergl.: Cremona, Einleitung i. d. g. Theorie d. eb. Curven, pag. 81. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, pag. 761, wo übrigens das Hauptresultat nach der Bemerkung im Druckfehlerverzeichnisse nicht bewiesen ist.

**) Wegen dieser und später folgenden Bezeichnungen und Citaten vergleiche: Brill und Nöther, Ueber algebraische Functionen etc. Math. Ann. Bd. VII, pag. 276 ff.

auf die Basis eines Büschels von Curven ν^{ter} Ordnung bringen wollen, während die $\nu^2 - \delta$ übrigen Basispunkte einfache Punkte von C_n sein sollen. Es sei $\varphi_0 - \lambda\varphi_1 = 0$ der Büschel von der verlangten Art so geht die Curve C_n, deren Gleichung $f = 0$ sei durch alle Schnittpunkte von $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_1 = 0$, daher kann man

$$f \equiv \varphi_0\psi_1 - \varphi_1\psi_0$$

setzen, wenn $\psi_0 = 0$ und $\psi_1 = 0$ irgend welche in gewisser Weise bestimmte Curven ν^{ter} Ordnung sind. Gehen $\psi_0 = 0$ und $\psi_1 = 0$ auch durch die δ Doppelpunkte, durch welche $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_1 = 0$ gehen, so ergeben diese für die Curven ψ keine Bedingungen mehr, und es geht $\psi_0 = 0$ durch die $\nu^2 - \delta$ Schnittpunkte von $\varphi_0 = 0$ mit $f = 0$, durch welche $\varphi_1 = 0$ *nicht* hindurchgeht, ebenso $\psi_1 = 0$ durch die Gruppe von $\nu^2 - \delta$ Punkten auf $f = 0$ und $\varphi_1 = 0$, durch welche $\varphi_0 = 0$ nicht hindurchgeht.

Aus

$$f \equiv \varphi_0\psi_1 - \varphi_1\psi_0 \equiv \psi_1(\varphi_0 - \lambda\varphi_1) - \varphi_1(\psi_0 - \lambda\psi_1)$$

ersieht man, dass die Schaar $g_Q^{(1)}$ von $Q = \nu^2 - \delta$ Punkten, welche auf $f = 0$ von dem Büschel $\varphi_0 - \lambda\varphi_1 = 0$ ausgeschnitten wird, auch von dem Büschel $\psi_0 - \lambda\psi_1 = 0$ ausgeschnitten wird, der unter seinen Basispunkten auch die δ Doppelpunkte besitzt, wie der erstere, und dass beide Büschel einander projectivisch sind, wenn Curven, die demselben λ entsprechen, einander zugewiesen werden.

Aber die $R = \nu^2 - \delta$ Basispunkte des Büschels $\varphi_0 - \lambda\varphi_1 = 0$ oder $\psi_0 - \lambda\psi_1 = 0$ bilden selbst eine $\gamma_R^{(1)}$ d. h. eine lineare Schaar von einfach unendlich viel Gruppen zu R Punkten. Denn es ist

$$f \equiv \varphi_0\psi_1 - \varphi_1\psi_0 \equiv (\varphi_0 - \mu\psi_0)\psi_1 - (\varphi_1 - \mu\psi_1)\psi_0$$

d. h. durch die $Q = \nu^2 - \delta$ Schnittpunkte von $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$ geht ein Büschel von Curven ν^{ter} Ordnung und je zwei Curven, welche dasselbe μ haben

$$\varphi_0 - \mu\psi_0 = 0, \quad \varphi_1 - \mu\psi_1 = 0$$

schneiden $f = 0$ in einer Gruppe von $R = \nu^2 - \delta$ Punkten, die die Basis eines Büschels $\Phi_0 - \lambda\Phi_1 = 0$ bilden, der dieselbe Schaar $g_Q^{(1)}$ ausschneidet, wie $\psi_0 - \lambda\psi_1 = 0$, man braucht nur

$$\Phi_0 \equiv \varphi_0 - \mu\psi_0, \quad \Phi_1 \equiv \varphi_1 - \mu\psi_1$$

zu setzen, wenn μ so bestimmt ist, dass die Curven $\Phi_0 = 0$, $\Phi_1 = 0$ sich in der betreffenden Gruppe von $R = \nu^2 - \delta$ Punkten schneiden.

Wir haben also folgende Aufgabe: *Es sind auf C_n $R = \nu^2 - \delta$ Punkte, welche eine einfach unendliche lineare Schaar $\gamma_R^{(1)}$ bilden, derart zu finden, dass durch dieselben noch einfach unendlich viel Curven ν^{ter} Ordnung gehen, welche auch noch durch δ Doppelpunkte der C_n hindurchgehen, und die also die lineare Schaar $g_Q^{(1)}$ ausschneiden.*

Die Bedingungen für die Möglichkeit der Lösung derselben finden wir bei Brill und Nöther Math. Ann. Bd. VII, pag. 291 für den allgemeinen Fall, dass die R Punkte eine Schaar $\gamma_R^{(r)}$ bilden und die Q Punkte eine $g_Q^{(q)}$, während die ausschneidenden Curven eine Mannigfaltigkeit t besitzen. Als Bedingung für die Möglichkeit der Lösung ergiebt sich, dass

(N) $$\tau = R - (q+1)(R - t + q) - r$$

positiv oder allenfalls *Null* sein kann. Für unseren Fall haben wir

$$R = \nu^2 - \delta; \quad q = 1; \quad t = \frac{1}{2}\nu(\nu+3) - \delta; \quad r = 1,$$

also ergiebt sich

$$\tau = 3\nu - 3 - \delta$$

d. h. *wir können auf einer allgemeinen Curve $n = 2\nu^{ter}$ Ordnung höchstens $3\nu - 3$ Doppelpunkte zu den Basispunkten eines Büschels ν^{ter} Ordnung willkürlich annehmen.* Hierdurch erhalten wir eine endliche Anzahl von Schaaren $\gamma_R^{(1)}$ und aus jeder dieser können wir durch Annahme eines weiteren *einfachen* Punktes der Curve eine Gruppe Γ_R von $R = \nu^2 - \delta$ Punkten ausscheiden, die die Basispunkte eines Büschels Curven ν^{ter} Ordnung bilden, welcher die $g_Q^{(1)}$ ausschneidet. Durch eine Gruppe G_Q dieser geht nun noch ein Büschel von Curven ν^{ter} Ordnung, welche alle auch die δ Doppelpunkte enthalten und eine beliebige Curve desselben bestimmt dann eine zweite Gruppe Γ'_R von $R = \nu^2 - \delta$ Punkten, welche die Basis eines zum ersten projectivischen Curven-Büschels ν^{ter} Ordnung bilden kann.

In den Doppelpunkten von $f = 0$, die nicht auf $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_1 = 0$ liegen, berühren sich die entsprechenden Curven $\varphi_1 - \lambda\varphi_0 = 0$ und $\psi_1 - \lambda\psi_0 = 0$.

II.

Hat man auf einer Curve $f = 0$ der $n = (\nu' + \nu)^{ten}$ Ordnung eine einfach lineare Schaar $g_Q^{(1)}$ von $Q = \nu\nu' - \delta$ Punkten, die ausgeschnitten wird von Curven ν^{ter} Ordnung, welche alle durch δ Doppelpunkte von $f = 0$ gehen, so liegen auch die übrigen $\nu^2 - \delta$ Basispunkte des Büschels auf $f = 0$ und die Schaar $g_Q^{(1)}$ kann dann immer auch durch einen Büschel von Curven ν'^{ter} Ordnung ausgeschnitten werden, zu dessen Basispunkten die δ Doppelpunkte gehören. Denn da auf $f = 0$ die Schaar $g_Q^{(1)}$ existirt, so kann man

$$f \equiv \varphi_0\psi_1 - \varphi_1\psi_0$$

setzen, wo $\varphi_0 = 0$ durch eine Gruppe G'_Q von $g_Q^{(1)}$ geht. Geht nun $\psi_1 = 0$ auch durch die δ Doppelpunkte, so muss diess auch $\psi_0 = 0$ thun und der Büschel $\psi_1 - \lambda\psi_0 = 0$ schneidet zufolge der Relation

$$f \equiv \varphi_0(\psi_1 - \lambda\psi_0) - \psi_1(\varphi_1 - \lambda\varphi_0)$$

auf $f = 0$ dieselbe Schaar $g_Q^{(1)}$ aus, wie der Büschel $\varphi_1 - \lambda\varphi_0 = 0$.

Ist umgekehrt auf einer Curve $f = 0$ *der* $n = (\nu' + \nu)^{ter}$ *Ordnung eine Schaar* $g_Q^{(q)}$ *vorhanden, welche durch Curven* ν^{ter} *und* ν'^{ter} *Ordnung ausschneidbar ist, wobei die Curven durch* δ *Doppelpunkte von* $f = 0$ *gehen, so muss* $Q = \nu\nu' - \delta$ *und* $q = 1$ *sein.* Denn sei R die Anzahl der festen Punkte, durch welche die Curven ν^{ter} Ordnung ausser den δ Doppelpunkten gehen, so muss $R \leq \nu^2 - \delta$ sein, damit durch die R Punkte und δ Doppelpunkte überhaupt mehr als eine einzige Curve ν^{ter} Ordnung möglich ist. Da aber $Q + R = \nu(\nu' + \nu) - 2\delta$ ist, so folgt $Q \geq \nu\nu' - \delta$. Nun soll die Schaar $g_Q^{(q)}$ auch durch Curven ν'^{ter} Ordnung ausschneidbar sein, die durch die δ Doppelpunkte gehen. Da sich aber die Curven ν^{ter} und ν'^{ter} Ordnung in nicht mehr als $\nu\nu' - \delta$ Punkten noch schneiden können, so muss $Q \leq \nu\nu' - \delta$ sein, d. h. es ist $Q = \nu\nu' - \delta$, $R = \nu^2 - \delta$ und also $q = 1$.

Ist nun $\nu' > \nu$ so geht durch eine Gruppe G_Q von $g_Q^{(1)}$ nur *eine einzige* Curve ν^{ter} Ordnung, eben die, welche sie ausschneidet, in dem sie dem Büschel angehört, welcher noch in $R = \nu^2 - \delta$ festen Punkten schneidet. Hieraus folgt, dass die Gruppe Γ_R von $R = \nu^2 - \delta$ Punkten *keiner* Schaar angehört, sondern, dass zu jeder Schaar $g_Q^{(1)}$ nur *eine* Gruppe von $R = \nu^2 - \delta$ Punkten *residual* ist.

Hingegen bilden die Gruppen $\Gamma'_{R'}$ von $R' = \nu'^2 - \delta$ Punkten, welche Basispunkte des Büschels von Curven ν'^{ter} Ordnung sind, eine lineare Schaar $\gamma_{R'}^{(r')}$ von der Mannigfaltigkeit

$$r' = \frac{1}{2}(\nu' - \nu + 1)(\nu' - \nu + 2);$$

denn aus

$$f \equiv \varphi_0\psi_1 - \varphi_1\psi_0 \equiv \varphi_0(\psi_1 - C\varphi_1) - \varphi_1(\psi_0 - C\varphi_0)$$

folgt, dass auf $f = 0$ die Schaar $g_Q^{(1)}$, welche von $\varphi_1 - \lambda\varphi_0 = 0$ ausgeschnitten wird, auch ausgeschnitten wird von dem Büschel

$$\psi_1 - C\varphi_1 - \lambda(\psi_0 - C\varphi_0) = 0$$

d. h. die Curve $\psi_1 - C\varphi_1 = 0$, welche, wenn $C = 0$ eine Curve $(\nu' - \nu)^{ter}$ Ordnung darstellt, auch eine Curve ν'^{ter} Ordnung wird, schneidet $f = 0$ ausser in der Gruppe G'_Q, durch die $\varphi_1 = 0$ geht, und den δ Doppelpunkten noch in einer Gruppe $\Gamma'_{R'}$ von $R' = \nu'^2 - \delta$ Punkten, durch die ein Büschel von Curven ν'^{ter} Ordnung geht, zu dessen Basispunkten auch die δ Doppelpunkte gehören. Da nun C als ganze rationale Function der Coordinaten vom $(\nu' - \nu)^{ten}$ Grade

$$r' = \frac{1}{2}(\nu - \nu + 1)(\nu' - \nu + 2)$$

willkürliche Constanten enthält, so kann man von der Gruppe $\Gamma'_{R'}$ noch

r' Punkte willkürlich annehmen, und sie bilden daher eine $\gamma_{R'}^{r'}$ die von $\psi_1 - C\varphi_1 = 0$ ausgeschnitten wird.

Will man nun nach der Anzahl von Systemen von Schaaren $g_R^{(1)}$ auf $f = 0$ fragen, so haben wir von den Curven ν^{ter} Ordnung ausgehend in der Formel (N)

$$R = \nu^2 - \delta, \quad t = \frac{1}{2}\nu(\nu + 3) - \delta, \quad q = 1, \quad r = 0$$

zu setzen, und erhalten

$$\tau = 3\nu - 2 - \delta$$

d. h. *man kann von den Basispunkten des Büschels Curven ν^{ter} Ordnung τ willkürlich annehmen und erhält dann eine endliche Anzahl von Gruppen, deren jede eine Schaar $g_Q^{(1)}$ bestimmt.* Man kann $\delta = 3\nu - 2$ annehmen also $3\nu - 2$ von den Doppelpunkten zur Basis des Büschels ν^{ter} Ordnung bestimmen und erhält dann die zugehörigen Gruppen von $\nu^2 - \delta$ Punkten. Zu jeder so erhaltenen Schaar $g_Q^{(1)}$ tritt nun eine Schaar $\gamma_{R'}^{(r')}$ als residuale hinzu, so dass jede Gruppe $\Gamma_{R'}$ derselben die Basis eines Büschels Curven ν'^{ter} Ordung bildet, welcher die $g_Q^{(1)}$ ausschneidet. Hieraus erkennt man, dass die Anzahl der Systeme von $\gamma_{R'}^{(r')}$ dieselbe sein muss wie die Anzahl der Systeme der Schaaren $g_Q^{(1)}$.

Diess finden wir nun in der That, wenn wir von den Curven ν'^{ter} Ordnung ausgehen. Hierbei müssen wir aber einen Umstand beachten. Die Punkte einer Gruppe $\Gamma'_{R'}$, welche die Basispunkte eines Büschels von Curven ν'^{ter} Ordnung bilden, sind in Bezug auf die Curve $(\nu' + \nu) = n^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch sie hindurchgeht, nicht von einander unabhängig, d. h. die Curve $\nu' + \nu = n^{\text{ter}}$ Ordnung braucht nur durch $R' - \varrho$ derselben gelegt zu werden, um auch die letzten ϱ zu enthalten.

Gelingt es also, von den Basispunkten des Büschels ν'^{ter} Ordnung $R' - \varrho$ auf die Curve $\nu' + \nu = n^{\text{ter}}$ Ordnung zu bringen, so liegen alle R' Punkte auf derselben. Die Zahl ϱ bestimmt sich durch folgende Betrachtung.

Sind $\psi_0 = 0$ und $\psi_1 = 0$ irgend welche Curven ν'^{ter} Ordnung, so ist

$$F \equiv A\psi_0 - B\psi_1 = 0$$

die Form der Gleichung einer jeden Curve $(\nu' + \nu)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch die ν'^2 Schnittpunkte beider Curven $\psi_0 = 0$, $\psi_1 = 0$ hindurchgeht. Legt man nun $A = 0$ und $B = 0$, welches Curven ν^{ter} Ordnung sind, durch δ der Punkte, so wird $F = 0$ in diesen δ Punkten Doppelpunkte haben und enthält dann

$$x = \nu(\nu + 3) + 1 - 2\delta$$

willkürliche Constanten, die in A und B enthalten sind. Ist $\nu' > \nu$, so wird für eine bestimmte Curve $F = 0$ diese Darstellung also auch

A und B vollständig bestimmt sein. Nun ist aber eine Curve $(\nu'+\nu)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch $\nu'^2-\delta$ Punkte geht und δ Doppelpunkte haben soll, bestimmt durch

$$y=\frac{1}{2}(\nu'+\nu)(\nu'+\nu+3)-(\nu'^2-\delta)-3\delta$$

weitere einfache Punkte. Daher sind von den $\nu'^2-\delta$ Punkten für die Curve $(\nu'+\nu)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\varrho=x-y=\frac{1}{2}(\nu'-\nu-1)(\nu'-\nu-2)$$

keine Bestimmungsstücke, oder die Curven $(\nu'+\nu)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch die $\nu'^2-\delta-\varrho$ Punkte gehen und in den δ Punkten Doppelpunkte haben, gehen auch durch die letzten ϱ Punkte.*)

Nun lautet unsere Aufgabe so: auf $f=0$ sind $R'-\varrho$ Punkte, welche eine lineare Schaar von der Mannigfaltigkeit r' bilden so zu finden, dass die durch dieselben gehenden Curven ν'^{ter} Ordnung, die eine Mannigfaltigkeit $t'=\frac{1}{2}\nu'(\nu'+3)-\delta$ bilden, noch einen Büschel constituiren; es ist also nach Formel (N)

$$\begin{aligned}\tau' &= R'-\varrho-2(R'-\varrho-t'+q)-r'\\ &= 3\nu'-2-\delta-r'+\varrho.\end{aligned}$$

Zu Folge der Beziehung

$$r'-\varrho=3(\nu'-\nu)$$

wird aber

$$\tau'=3\nu-2-\delta=\tau,$$

wie es sein muss.

Man kann also von den Basispunkten des Büschels ν'^{ter} Ordnung $\tau=3\nu-2-\delta$ Punkte ausserhalb der δ Doppelpunkte nehmen, um eine endliche Anzahl von Schaaren $\gamma_{R'}^{(r')}$ auszuscheiden. Dann ist durch Annahme von $r'=\frac{1}{2}(\nu'-\nu+1)(\nu'-\nu+2)$ weiteren willkürlichen Punkten eine Gruppe $\Gamma_{R'}$ einer Schaar $\gamma_{R'}^{(r')}$ bestimmt und damit auch $g_Q^{(1)}$. Für $\nu'=\nu-1$, $\nu'=\nu-2$ ist $r'=0$, also kann man in diesen

*) Würde man dieselbe Betrachtung für die Schnittpunkte zweier Curven ν^{ter} Ordnung machen $\varphi_0=0$, $\varphi_1=0$ also $F\equiv A\varphi_0-B\varphi_1=0$ setzen und $A=0$, $B=0$ wären jetzt Curven $\nu'>\nu^{\text{ter}}$ Ordnung, dann würde sich

$$\varrho=\frac{1}{2}(\nu'-\nu+1)(\nu'-\nu+2)$$

ergeben, da aber für dasselbe F auch $F\equiv(A-C\varphi_1)\varphi_0-(B-C\varphi_0)\varphi_1$ gelten würde und C als Function von $(\nu'-\nu)^{\text{ter}}$ Ordnung $r'=\frac{1}{2}(\nu'-\nu+1)(\nu'-\nu+2)$ willkürliche Constanten enthält, so kann man die Curven $A=0$, $B=0$ aus einer r'-fachen Mannigfaltigkeit aussuchen und es bleiben also bloss $\varrho-r'=0$ Punkte übrig, die für die Curven $(\nu'+\nu)^{\text{ter}}$ Ordnung keine Bestimmungsstücke sind.

Fällen von der Basis des Büschels ν'^{ter} Ordnung nur $3\nu-2-\delta$ ausserhalb der Doppelpunkte wählen. Für $\nu' > \nu - 2$ bleiben von der Basis des Büschels ν'^{ter} Ordnung

$$3\nu - 2 - \delta + \tfrac{1}{2}(\nu' - \nu + 1)(\nu' - \nu + 2)$$

$$= \tfrac{1}{2}[(\nu' - \nu)^2 + 3(\nu' + \nu) - 2] - \delta$$

beliebig wählbar, die man aber in einfache Punkte der $f = 0$ zu legen hat, wenn man die allgemeinste Schaar $g_Q^{(1)}$ ausschneiden will.

III.

Es habe nun $f = 0$ in $a_1, a_2 \ldots a_\delta$ beziehungsweise $\varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_\delta$-fache Punkte. Zum Bestehen der Identität

$$f \equiv \varphi_0\psi_1 - \varphi_1\psi_0$$

ist nach Herrn Nöther*) nothwendig und hinreichend, dass die Curven ψ_1 und φ_1 *„gleichsinguläre"* σ-Curven seien, d. h. dass die Curve $\psi_1 = 0$ in a_i einen σ_i-fachen Punkt gerade so wie $\varphi_1 = 0$ habe und überdiess jeder Zweig von $\psi_1 = 0$ einen entsprechenden Zweig von $\varphi_1 = 0$ in $\varkappa_i - \sigma_i - 1$ auf einanderfolgenden Punkten treffe. Die Curven $\psi_0 = 0$ und $\varphi_0 = 0$ werden dann auch „gleichsinguläre" σ-Curven. Nun trifft jeder Zweig von $\varphi_0 = 0$ die Curve $f = 0$, also auch $\varphi_1\psi_0 = 0$ in $\varkappa_i$ Punkten. Da aber φ_0 und ψ_0 gleich singulär sind, so trifft jeder Zweig von $\varphi_0 = 0$ die Curve $\psi_0 = 0$ in a_i in $\varkappa_i - \sigma_i - 1 + \sigma_i = \varkappa_i - 1$ Punkten und die Curve $\varphi_1 = 0$ in σ_i Punkten, d. h. jeder Zweig von $\varphi_0 = 0$ trifft $\varphi_1\psi_0 = 0$ in $\varkappa_i - 1 + \sigma_i$ Punkten und aus $\varkappa_i = \varkappa_i - 1 + \sigma_i$ folgt also $\sigma_i = 1$. *Die Curven $\psi_1 = 0$, $\psi_0 = 0$ gehen also bei gegebenen $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 0$ durch dieselben Punkte a_i einfach, durch welche $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 0$ gehen und es schneidet $\psi_0 = 0$ die Curve $\varphi_0 = 0$ in a_i noch in $\varkappa_i - 1$ aufeinanderfolgenden Punkten. Diese Bedingung ist auch hinreichend dafür, dass $f = 0$ einen $\varkappa_i$-fachen Punkt in a_i hat,* denn aus

$$f \equiv \varphi_0\psi_1 - \varphi_1\psi_0 \equiv \varphi_0(\psi_1 - \lambda\psi_0) - \psi_0(\varphi_1 - \lambda\varphi_0)$$

folgt, da die Curven $\varphi_0 = 0$ und $\psi_0 = 0$ gleichsingulär sind und $\varphi_0 = 0$ durch dieselbe Gruppe von Punkten auf $f = 0$ geht, wie $\psi_0 = 0$ (nämlich durch die Punkte, durch welche $\varphi_1 = 0$ nicht hindurchgeht) nach dem I. Restsatze des Herrn Nöther**), dass jede Curve des Büschels $\psi_1 - \lambda\psi_0 = 0$ zur Curve $\varphi_1 - \lambda\varphi_0 = 0$ *„gleichsingulär"* ist, daher trifft jede der ∞^1 Curven $\psi_1 - \lambda\psi_0 = 0$ die Curve $\psi_0(\varphi_1 - \lambda\varphi_0) = 0$

---

*) Nöther: Ueber nicht adjungirte Curven. Math. Ann. Bd. XV, p. 512.
**) l. c. p. 512.

in a_i in $\varkappa_i$ Punkten also auch $f = 0$, d. h. $f = 0$ hat daselbst einen $\varkappa_i$-fachen Punkt.

Der Büschel $\varphi_1 - \lambda\varphi_0 = 0$ schneidet nun auf $f = 0$ eine Schaar $g_Q^{(1)}$ von $Q = \nu\nu' - \sum_1^\delta {}^i (\varkappa_i - 1)$ Punkten aus, die auch von dem Büschel $\psi_1 - \lambda\psi_0 = 0$ ausgeschnitten wird. Der erste Büschel hat noch $R = \nu^2 - \delta$ Basispunkte in einfachen Punkten der Curve $f = 0$ und diese Punkte bilden *keine* Schaar sobald $\nu' > \nu$ ist. Denn durch $Q = \nu'\nu - \sum_1^\delta {}^i (\varkappa_i - 1)$ Punkte lässt sich nicht eine zweite Curve ν^{ter} Ordnung legen, welche mit der diese Gruppe ausschneidenden gleichsingulär wäre, denn beide Curven hätten dann $\nu\nu' > \nu^2$ Punkte gemeinschaftlich. Wohl aber bilden die $\nu'^2 - \delta = R'$ Basispunkte des Büschels ν'^{ter} Ordnung eine lineare Schaar $\gamma_{R'}^{(r')}$ von der Mannigfaltigkeit $r' = \frac{1}{2}(\nu' - \nu + 1)(\nu' - \nu + 2)$, denn die Curve $\psi_1 - C\varphi_1 = 0$ geht durch die Schnittpunkte von $\psi_1 = 0$ und $\varphi_1 = 0$ und ist also bei beliebigem C der Curve $\varphi_1 = 0$ gleichsingulär.

Um die von der Basis der Curven ν^{ter} Ordnung willkürlichen Punkte zu bestimmen, nehmen wir wieder die Formel (N) zu Hilfe und erhalten, da

$$R = \nu^2 - \delta, \quad t = \frac{1}{2}\nu(\nu + 3) - \delta, \quad q = 1, \quad r = 0$$

ist,

$$\tau = 3\nu - 2 - \delta.$$

Man kann daher δ von den vielfachen Punkten auf die Curven ν^{ter} Ordnung bringen, wobei $\delta \leq 3\nu - 2$ sein muss. Wählt man dann noch τ Punkte willkürlich in einfachen Punkten auf $f = 0$, so erhält man eine $g_Q^{(1)}$, welche zur projectivischen Erzeugung der Curve $(\nu' + \nu)^{\text{ter}}$ Ordnung verwendet werden kann, indem die Basis des Büschels ν^{ter} Ordnung endlich vieldeutig bestimmt wird.

Will man von den Curven ν'^{ter} Ordnung ausgehen und die Anzahl der Systeme der Schaaren $g_Q^{(1)}$ bestimmen, so hat man darauf zu achten, dass es nicht nöthig ist, alle $R' = \nu'^2 - \delta$ Basispunkte auf $f = 0$ zu bringen, sondern dass $f = 0$ schon durch alle R' Punkte geht, sobald nur $R' - \varrho$ auf ihr liegen, wobei ϱ' folgendermassen zu bestimmen ist.

Jede Curve, welche durch die Schnittpunkte der Curven ν'^{ter} Ordnung $\psi_1 = 0$, $\psi_0 = 0$ geht, hat eine Gleichung von der Form

$$F \equiv A\psi_1 - B\psi_0 = 0$$

wo $A = 0$, $B = 0$ Curven ν'^{ter} Ordnung sind. Soll nun $F = 0$ im Punkte a_i, welcher unter den Schnittpunkten von $\psi_1 = 0$, $\psi_0 = 0$

enthalten ist, einen $\varkappa_i$-fachen Punkt haben, so sahen wir, dass hiezu nothwendig und hinreichend ist, wenn *jede* Curve des Büschels $B - \lambda A = 0$ die Curve $\psi_1 - \lambda\psi_0 = 0$ in $\varkappa_i - 1$ aufeinanderfolgenden Punkten trifft, wobei $A = 0$, $B = 0$ durch a_i gehen.

Es sei b_h die Anzahl Bedingungen, welche aussagen, dass jede Curve des einen Büschels eine Curve des anderen Büschels in h aufeinanderfolgenden Punkten trifft. Hat man dann einen solchen Büschel, so wird es $h + 1$ Curven in demselben geben, welche die entsprechenden in $h + 1$ Punkten treffen. Bewirkt man also, dass $h + 2$ Curven des Büschels die entsprechenden $h + 2$ Curven in $h + 1$ Punkten treffen, so thun es alle Curven. Diess sind aber $h + 2$ weitere Bedingungen, also ist

$$b_{h+1} = b_h + h + 2$$

somit

$$b_h = \frac{1}{2}(h + 1)(h + 2) - 1^{*}),$$

und daher ist

$$b_{\varkappa-1} = \frac{1}{2}\varkappa_i(\varkappa_i + 1) - 1.$$

Die Constanten der Curven $A = 0$ und $B = 0$ haben daher für jeden

---

*) Man kann obigen Beweis auch so führen: Ist

$$\psi_1 - \lambda\psi_0 \equiv \Psi(xy), \quad B - \lambda A \equiv C(xy)$$

so wird, wenn die Coordinaten des Punktes a_i, in dem $\Psi(xy) = 0$ die $C(xy) = 0$ in h Punkten schneiden soll, (a, b) sind, für diese

$$C(ab) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right)\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = 0,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\left(\frac{\partial^{h-1} C}{\partial x^{h-1}}\right) + \cdots + \left(\frac{\partial^{h-1} C}{\partial y^{h-1}}\right)\left[\frac{dy}{dx}\right]^{h-1} = 0$$

sein, wobei

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)}$$

zu setzen ist und $\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)$ bedeuten soll, dass in $\frac{\partial C}{\partial x}$ statt x und y, a und b gesetzt wurden. Diese Gleichungen sind für λ vom $1. 2. 3. \ldots h$. Grade, sollen sie also identisch erfüllt sein, so giebt das für die Coefficienten von B und A

$$2 + 3 + 4 + \cdots + h + 1 = \frac{1}{2}(h + 1)(h + 2) - 1$$

lineare Gleichungen.

$\varkappa_i$-fachen Punkt $\frac{1}{2}\varkappa_i(\varkappa_i+1)-1$ Bedingungen zu erfüllen und haben daher diese noch

$$x = \nu(\nu+3)+1+\delta-\frac{1}{2}\sum_{1}^{\delta}{}^{i}\,\varkappa_i(\varkappa_i+1)$$

willkürliche Constanten, die $F=0$ zukommen, wenn diese in δ von den Schnittpunkten der $\psi_1=0$, $\psi_0=0$ $\varkappa_i$-fache Punkte haben sollen. Andererseits ist eine Curve $(\nu'+\nu)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch $\nu'^2-\delta$ Punkte geht und δ vielfache Punkte besitzt durch

$$y=\frac{1}{2}(\nu'+\nu)(\nu'+\nu+3)-(\nu'^2-\delta)-\frac{1}{2}\sum_{1}^{\delta}{}^{i}\,\varkappa_i(\varkappa_i+1)$$

Punkte bestimmt. Mithin müssen

$$\varrho = x-y=\frac{1}{2}(\nu'-\nu-1)(\nu'-\nu-2)$$

von den $\nu'^2-\delta$ einfachen Punkten für die Curve $(\nu'+\nu)^{\text{ter}}$ Ordnung keine Bestimmungsstücke sein, *und alle Curven $(\nu'+\nu)^{ter}$ Ordnung, welche durch $R'-\varrho$ der Punkte gehen, enthalten auch die übrigen.**)

Wir haben daher in der Formel (N)

$$R=\nu'^2-\delta-\varrho,\quad t=\frac{1}{2}\nu'(\nu'+3)-\delta,\quad q=1,\quad r=r'$$

zu setzen und erhalten

$$\tau'=3\nu'-2-\delta-r+\varrho$$

und da

$$r-\varrho=3(\nu'-\nu)$$

sich ergiebt, folgt

$$\tau'=3\nu-2-\delta=\tau.$$

Man kann daher auch von der Basis des Büschels $\nu'^{\,ter}$ Ordnung vor allem nur τ Punkte auf $f=0$ willkürlich nehmen um eine endliche Anzahl von Schaaren $\gamma_R^{(r')}$ auszuscheiden, deren einzelne Gruppen $\Gamma_{R'}$, dann in jeder durch weitere Annahme von $r'=\frac{1}{2}(\nu'-\nu+1)(\nu'-\nu+2)$ Punkten festgelegt wird. Die ganze Schaar $\gamma_{R'}^{(r')}$, welche durch einmalige Annahme der τ Punkte bestimmt ist, liefert dann nur eine einzige Schaar $g_Q^{(1)}$, welche zu ihr residual ist, für die ausschneidenden Curven $\nu'^{\,\text{ter}}$ Ordnung.

Ist $\nu'=\nu$ so findet man

$$\tau'=\tau=3\nu-3-\delta$$

---

*) Eine ähnliche allgemeiner gehaltene Betrachtung findet sich bei Dr. Bacharach, Inauguraldissertation: Ueber algebraische Schnittpunktsysteme. Erlangen 1881.

denn dann ist unter denselben Bedingungen wie früher

$$f \equiv \varphi_0 \psi_1 - \varphi_1 \psi_0 \equiv \varphi_0 (\psi_1 - \mu \varphi_1) - \varphi_1 (\psi_0 - \mu \varphi_0)$$

$\varphi_1 = 0$ und $\psi_1 = 0$ gleichsingulär, also ist auch $\psi_1 - \mu \varphi_1 = 0$ mit $\varphi_1 = 0$ gleichsingulär oder die Basispunkte des Büschels $\varphi_1 - \lambda \varphi_0 = 0$ bilden gerade sowie die Basispunkte des Büschels $\psi_1 - \lambda \psi_0 = 0$ eine einfach unendliche lineare Schaar. In der Formel (N) ist also

$$R = \nu^2 - \delta, \quad t = \frac{1}{2} \nu(\nu + 3) - \delta, \quad q = 1, \quad r = 1$$

zu setzen.

Es sei mir zum Schlusse noch erlaubt Herrn Professor Nöther meinen besten Dank für die mir bereitwilligst ertheilten Aufschlüsse über verschiedene Sätze aus der Theorie der algebraischen Curven hier auszusprechen.

Prag, am 1. December 1884.

Ueber Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen. II.

Von

Paul Gordan in Erlangen.

Nachdem ich in den Bänden 17, 19 und 20 dieser Annalen eine Reihe von Vorfragen studirt hatte, welche sich auf die Invariantentheorie bestimmter ternärer Formen bezogen, habe ich ebenda, Bd. 20, pag. 515 ff., eine allgemeine Theorie der Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen gegeben. Aber ich habe damals bereits eine andere Darstellung derselben Theorie in Aussicht genommen, bei welcher nur die elementaren Processe der gewöhnlichen Gleichungstheorie zur Verwendung kommen sollten. Indem ich nachstehend dieses Versprechen einlöse, recapitulire ich vorab des besseren Verständnisses halber die hauptsächlichen in Betracht kommenden Punkte. Sei zunächst verabredet, dass die Gleichung siebenten Grades in folgender Form gegeben sei, in der das zweite Glied fehlt:

$$(1) \qquad x^7 + (2)x^5 + (3)x^4 + (4)x^3 + (5)x^2 + (6)x + (7) = 0$$

(wo also (2), (3), etc. die nicht verschwindenden Coefficienten sind, deren Quadrate und Producte ich dann fernerhin mit (22), (23) etc. etc. bezeichne). Die Wurzeln derselben sollen mit $x_0, x_1, \ldots, x_6$ benannt werden und die Gruppe der 168 Substitutionen diejenige sein, welche die Function:

$$(2) \qquad \begin{aligned} P = x_0x_1x_2 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_5 + x_3x_4x_6 + x_4x_5x_0 \\ + x_5x_6x_1 + x_6x_0x_2 \end{aligned}$$

ungeändert lässt. Ich habe dann l. c. bemerkt, dass es vortheilhaft ist, neben (1) von vorneherein immer auch diejenige Gleichung siebenten Grades zu betrachten:

$$(3) \qquad \bar{x}^7 + (\bar{2})\bar{x}^5 + (\bar{3})\bar{x}^4 + (\bar{4})\bar{x}^3 + (\bar{5})\bar{x}^2 + (\bar{6})\bar{x} + (\bar{7}) = 0,$$

deren Wurzeln $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_6$ mit den $x_0, x_1, \ldots, x_6$ durch folgende Relationen verbunden sind:

$$(4) \qquad -\sqrt{2}\,.\,\bar{x}_{1-\nu} = x_\nu + x_{\nu+1} + x_{\nu+3}\,,$$

deren Auflösungen entsprechend lauten:

$$(\bar{5})\qquad \sqrt{2}\,.\,x_{1-\nu} = \bar{x}_\nu + \bar{x}_{\nu+1} + \bar{x}_{\nu+3}.$$

Die 168 Substitutionen der x, wie auch solche ganze Functionen der x, welche bei den 168 Substitutionen ungeändert bleiben, nenne ich im Folgenden S. Ich habe dann in meinen früheren Arbeiten bewiesen, *dass alle Functionen S ganze Functionen der* (i), $(\bar{i})$ *sind, dass speciell* (6), $(\bar{6})$, (7), $(\bar{7})$ *sich rational durch die übrigen Coefficienten* (2) $=$ $(\bar{2})$, (3), $(\bar{3})$, (4), $(\bar{4})$, (5), $(\bar{5})$ *darstellen lassen, während zwischen diesen eine Relation besteht, die in* (5), $(\bar{5})$ *vom sechsten Grade ist.* Eben diese Sätze werde ich im ersten Abschnitte des Folgenden aufs neue beweisen, indem ich direct mit den x, $\bar{x}$ operire und einen Gedankengang verfolge, welcher mit demjenigen ähnlich ist, den man in der Theorie der symmetrischen Functionen verwendet, wenn es sich darum handelt, zu zeigen, dass alle ganzen symmetrischen Functionen der Wurzeln ganze Functionen der Gleichungscoefficienten sind.

Ich erinnere jetzt ferner an diejenigen speciellen Gleichungen siebenten Grades der hier in Betracht kommenden Art, welche Herr Klein im 14ten und 15ten Bande dieser Annalen studirt hat. Es sind dies alle diejenigen, deren Wurzeln sich in die Form setzen lassen:

$$(6)\qquad \begin{cases} x_\nu = \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(\varepsilon^{-2\nu}\lambda_1^2 + \varepsilon^{-\nu}\lambda_2^2 + \varepsilon^{-4\nu}\lambda_3^2\right) + \beta\left(\varepsilon^{-6\nu}\lambda_2\lambda_3 + \varepsilon^{-3\nu}\lambda_3\lambda_1 + \varepsilon^{-5\nu}\lambda_1\lambda_2\right), \\ \bar{x}_\nu = \dfrac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\varepsilon^{2\nu}\lambda_1^2 + \varepsilon^{\nu}\lambda_2^2 + \varepsilon^{4\nu}\lambda_3^2\right) + \alpha\left(\varepsilon^{6\nu}\lambda_2\lambda_3 + \varepsilon^{3\nu}\lambda_3\lambda_1 + \varepsilon^{5\nu}\lambda_1\lambda_2\right), \end{cases}$$

wo λ_1, λ_2, λ_3 drei unbestimmte Grössen bedeuten und ε für $e^{\frac{2i\pi}{7}}$ gesetzt ist, α, β aber die folgenden Irrationalitäten repräsentiren:

$$\alpha = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{-7}}{\sqrt{8}}}, \qquad \beta = \sqrt{\frac{-1-\sqrt{-7}}{\sqrt{8}}}$$

$$= \sqrt{2(\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4)} \qquad = \sqrt{2(\varepsilon^3 + \varepsilon^5 + \varepsilon^6)}.$$

Nimmt man bei ihnen insbesondere

$$\lambda_1^3\lambda_2 + \lambda_2^3\lambda_3 + \lambda_3^3\lambda_1 = 0,$$

also

$$(7)\qquad \sum x_\nu^2 = \sum \bar{x}_\nu^2 = 0,$$

so haben die ausgerechneten Gleichungen die Form:

$$(8)\qquad \begin{cases} x^7 + 7\cdot\dfrac{-1+\sqrt{-7}}{2}\cdot\nabla\cdot x^4 - 7\cdot\dfrac{5+\sqrt{-7}}{2}\cdot\nabla^2\cdot x - C = 0, \\ \bar{x}^7 + 7\cdot\dfrac{-1-\sqrt{-7}}{2}\cdot\nabla\cdot x^4 - 7\cdot\dfrac{5-\sqrt{-7}}{2}\cdot\nabla^2\cdot\bar{x} - C = 0 \end{cases}$$

und lassen sich durch elliptische Functionen auflösen. Hr. Klein hat ferner pag. 268 des 15ten Annalenbandes gezeigt, dass man jede Gleichung siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen in eine der hier betrachteten speciellen Gleichungen überführen kann, wobei man zunächst keinerlei Irrationalität zu adjungiren braucht, aber allerdings eine Wurzel einer Hülfsgleichung vierten Grades bestimmen muss, wenn man insbesondere zu einer Gleichung (8) gelangen will. Ich selbst habe mich dann in meinen wiederholt genannten Arbeiten mit der genaueren Formulirung der in Rede stehenden Transformation und der Aufstellung jener Hülfsgleichung vierten Grades beschäftigt.

Es wird sich im Folgenden darum handeln, auch die hiermit berührten Untersuchungen in einer Form darzustellen, welche den gewöhnlichen Ueberlegungen der elementaren Gleichungstheorie nahe steht. Zu dem Zwecke entwickele ich im zweiten Abschnitte der folgenden Arbeit vor Allem, dass man in der That zu den Gleichungen (8) gelangen kann, wenn man von den im ersten Abschnitte für die Coefficienten (i), $(\bar{i})$ aufgestellten Relationen ausgeht (womit zugleich eine angenehme Verification dieser Relationen gefunden ist). Auch die Beziehungen zwischen den x_ν, $\bar{x}_\nu$, die sich aus (6) durch Elimination der λ_1, λ_2, λ_3 ergeben, können unter Voraussetzung der Gleichungen (8) aus den Rechnungen des ersten Abschnittes abgelesen werden. Ich führe sodann eine bestimmte Terminologie ein. Bei den Gleichungen (8) ist:

$$(1+\sqrt{-7})(3)-(1-\sqrt{-7})(\bar{3})=0. \tag{9}$$

Alle Gleichungen siebenten Grades, welche dieser Relation genügen, nenne ich *Normalgleichungen.* Die Normalgleichung wird *ausgezeichnet,* wenn die Formeln (6) hinzutreten (aus denen rückwärts das Bestehen von (9) folgt). Hat man insbesondere mit (8) zu thun, so wird die ausgezeichnete Form *kanonisch.* — Ich zeige dann ferner, wie man durch einen gewissen alternirenden Process einer beliebigen Gleichung (1) zuerst eine Normalform, dann eine ausgezeichnete Gleichung zuordnen kann, die ihrerseits zu einer kanonischen Gleichung Anlass giebt, wenn man eine Hülfsgleichung vierten Grades hinzunimmt.

Alle diese Dinge finden, soweit es sich um principielle Formulirungen handelt, bereits im zweiten Abschnitte des Folgenden ihren Abschluss. Im dritten Abschnitte handelt es sich dann nur noch darum, die gefundene Transformation der Gleichung (1) in die Form von Tschirnhaus zu setzen:

$$l^{(\nu)}=\xi_0+\xi_1 x_\nu+\xi_2 x_\nu^2+\xi_3 x_\nu^3+\xi_4 x_\nu^4+\xi_5 x_\nu^5+\xi_6 x_\nu^6, \tag{10}$$

wo die ξ zu den Functionen S gehören.

Abschnitt I.

Von den Substitutionen S und den zugehörigen Formen.

§ 1.

Von den 168 Substitutionen.

Die 168 Vertauschungen S der Grössen $x_0, x_1, \ldots, x_6$ wurden bereits soeben durch Angabe der bei ihnen unveränderlichen Function definirt:

(1) $$P = x_0x_1x_3 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_5 + x_3x_4x_6 + x_4x_5x_0 + x_5x_6x_1 + x_6x_0x_2;$$

statt ihrer hätten wir ebensowohl die andere wählen können:

(2) $$L = x_2x_4x_5x_6 + x_3x_5x_6x_0 + x_4x_6x_0x_1 + x_5x_0x_1x_2 + x_6x_1x_2x_3 + x_0x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4x_5.$$

Die einzelnen Bestandtheile von P nenne ich *Tripel* (von Wurzeln), diejenigen von L *Quadrupel*. — Ich werde hier zunächst die 168 Substitutionen S einzeln aufzählen; es sind folgende:

1. Die Identität. Sie hat die Periode 1.

2. Es giebt 3 Substitutionen S von der Periode 2, welche die Elemente des Quadrupels $x_2\,x_4\,x_5\,x_6$ unter einander permutiren, nämlich:

$$\begin{pmatrix}2456\\4265\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}2456\\5624\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}2456\\6542\end{pmatrix}.$$

Ebenso giebt es für jedes Quadrupel 3 solcher Substitutionen, also im Ganzen 21.

3. Es giebt 8 Substitutionen S von der Periode 3, welche die Elemente des 1^ten^ Tripels permutiren; es sind dies die Substitutionen:

$$\begin{pmatrix}013245\\130452\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}013246\\130462\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}013256\\130561\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}013456\\130564\end{pmatrix}$$

und ihre Quadrate. Im Ganzen giebt es hiernach 56 Substitutionen S von der Periode 3.

4. Es giebt 6 Substitutionen S von der Periode 4, welche die Elemente des 1^ten^ Quadrupels permutiren; nämlich die Substitutionen:

$$\begin{pmatrix}13\ 2465\\31\ 4652\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}01\ 2456\\10\ 4562\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}03\ 2546\\30\ 5462\end{pmatrix}$$

und ihre Cuben. Im Ganzen giebt es 42 Substitutionen von der Periode 4.

5. Es giebt 48 Substitutionen S von der Periode 7, nämlich die 8 Substitutionen:

$$\begin{pmatrix}0123456\\1234560\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0126534\\1265340\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0143265\\0432650\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0145632\\1456320\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0153624\\1536240\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0154236\\1542360\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0162435\\1624350\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0163542\\1635420\end{pmatrix}$$

und ihre zweiten, dritten, ..., sechsten Potenzen.

Was die *Untergruppen* angeht, die man aus den S bilden kann, so nenne ich hier zunächst eine erste, S', von 24 Substitutionen. Dieselbe umfasst alle diejenigen S, welche x_0 festlassen. Es sind dies:

1. Die Identität.
2. 9 Substitutionen von der Periode 2, nämlich:

$$\begin{pmatrix}24 & 56\\65 & 42\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}24 & 56\\42 & 65\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}24 & 56\\56 & 24\end{pmatrix}$$

und die entsprechenden, welche die Elemente der Quadrupel (1345) und (1326) permutiren.

3. 8 Substitutionen von der Periode 3, nämlich:

$$\begin{pmatrix}124 & 365\\241 & 653\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}235 & 461\\352 & 614\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}346 & 152\\463 & 521\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}156 & 234\\561 & 342\end{pmatrix}$$

und ihre Quadrate.

4. 6 Substitutionen von der Periode 4, nämlich:

$$\begin{pmatrix}13 & 2465\\31 & 4652\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}26 & 1435\\62 & 4351\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}45 & 1236\\54 & 2361\end{pmatrix}$$

und ihre Cuben.

Eine weitere Untergruppe, S'', ebenfalls von 24 Substitutionen, bekommen wir durch die Bemerkung, dass die Grössen $\bar{x}_\nu$ (Formel (4) der Einleitung) im Grunde mit den x_ν gleichberechtigt sind, indem auch sie sich bei den Vertauschungen von S auf 168 Weisen substituiren. Die Gruppe S'' besteht aus denjenigen S, welche $\bar{x}_0$ (oder, was dasselbe ist, welche das Tripel $x_0\,x_1\,x_3$) festlassen. Es sind dies:

1. Die Identität.
2. 9 Substitutionen von der Periode 2:

$$\begin{pmatrix}26 & 45\\62 & 54\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}24 & 59\\42 & 65\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}25 & 46\\52 & 64\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}13 & 26\\31 & 62\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}13 & 45\\31 & 54\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}01 & 25\\10 & 52\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}01 & 46\\10 & 64\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}03 & 24\\30 & 42\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}03 & 56\\30 & 65\end{pmatrix}.$$

3. 8 Substitutionen von der Periode 3, nämlich:

$$\begin{pmatrix}013 & 246\\130 & 462\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}013 & 254\\130 & 542\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}013 & 265\\130 & 652\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}013 & 456\\130 & 564\end{pmatrix}$$

und ihre Quadrate.

4. 6 Substitutionen von der Periode 4, nämlich:

$$\begin{pmatrix}13 & 2465\\ 31 & 4652\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}01 & 2456\\ 10 & 4562\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}03 & 2546\\ 30 & 5462\end{pmatrix}$$

und ihre Cuben.

Die Gruppen der S' und S'' haben 8 Substitutionen gemein, welche ich S''' nenne, es sind dies:

1. Die Identität.
2. 5 Substitutionen von der Periode 2, nämlich:

$$\begin{pmatrix}26 & 45\\ 62 & 54\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}24 & 56\\ 42 & 65\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}25 & 46\\ 52 & 64\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}13 & 26\\ 31 & 62\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}13 & 45\\ 31 & 54\end{pmatrix}.$$

3. 2 Substitutionen von der Periode 4, nämlich:

$$\begin{pmatrix}13 & 2465\\ 31 & 4652\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}13 & 2564\\ 31 & 5642\end{pmatrix}.$$

Die hiermit gemachten Angaben mögen genügen. Ich mache schon hier darauf aufmerksam, dass ich in der Folge immer, wie es bei den S', S'' geschah, bald die x_ν, bald die $\bar{x}_\nu$ betrachten werde.

§ 2.

Allgemeines über die zu erbringenden Beweise.

Um die verschiedenen Sätze zu beweisen, welche in der Einleitung betreffs der Functionen S in Aussicht genommen wurden, gehe ich schrittweise vor, indem ich successive immer complicirtere Functionen der x in Betracht ziehe und Relationen zwischen ihnen aufsuche.

Erinnern wir uns zunächst an die Newton'schen Formeln für die Potenzsummen:

$$s_\nu = x_0{}^\nu + x_1{}^\nu + x_2{}^\nu + \cdots + {}_6x^\nu, \tag{3}$$

die sich hier folgendermassen schreiben:

$$\tag{4} \left\{\begin{aligned}
s_2 &= -2(2),\\
s_3 &= -3(3),\\
s_4 &= -4(4)+2(22),\\
s_5 &= -5(5)+5(32),\\
s_6 &= -6(6)+6(42)+3(33)-2(222),\\
s_7 &= 7(-(7)+(52)+(43)-(322)),\\
s_8 &= 8\left((62)+(53)+\tfrac{1}{2}(44)-(422)-(332)+\tfrac{1}{4}(2222)\right),\\
s_9 &= 9\left((72)+(63)+(54)-(522)-2(243)-\tfrac{1}{3}(333)+(3222)\right),\\
s_{10} &= 10\left((73)+(64)-(622)+\tfrac{1}{2}(55)-2(532)-(442)-(433)\right.\\
&\qquad \left.+(4222)+\tfrac{3}{2}(3322)-\tfrac{1}{5}(22222)\right) \text{ etc.,}
\end{aligned}\right.$$

und denen natürlich entsprechende Formeln für die Potenzsummen $\bar{s}_\nu$ zur Seite stehen.

Wir berechnen ferner die folgenden symmetrischen Functionen der x:

$$\sum x_0^\lambda x_1^\lambda \quad \text{und} \quad \sum x_0^\lambda x_1^\mu \qquad (\lambda \gtrless \mu)$$

und finden für dieselben:

$$(5) \qquad \begin{aligned} 2\sum x_0^\lambda x_1^\lambda &= s_\lambda^2 - s_{2\lambda}, \\ \sum x_0^\lambda x_1^\mu &= s_\lambda \cdot s_\mu - s_{\lambda+\mu}. \end{aligned}$$

Die weitere Betrachtung ordne ich jetzt in der Weise an, dass ich das Tripel $(x_0\, x_1\, x_3)$ und also das Quadrupel $(x_2\, x_4\, x_5\, x_6)$ bevorzuge. Alle symmetrischen Functionen der x_0, x_2, x_3 sind bekanntlich rationale ganze Functionen der folgenden drei:

$$(6) \qquad u_1 = x_0 + x_1 + x_3, \quad u_2 = x_0x_1 + x_0x_3 + x_1x_3, \quad u_3 = x_0x_1x_3.$$

Ich will nun im Folgenden solche ganze Functionen der $x_0, \ldots, x_6$, *welche ganze Functionen der Coefficienten* (i), $(\bar{i})$ *und der hier definirten* u_1, u_2, u_3 *sind, als Functionen* A *bezeichnen.*

Derartige Functionen sind insbesondere die symmetrischen Functionen von x_2, x_4, x_5, x_6. Denn sie sind ganze Functionen derjenigen Coefficienten, die bei Ausführung des Productes

$$(x - x_2)(x - x_4)(x - x_5)(x - x_6)$$

entstehen, diese Coefficienten aber sind selbst Functionen A, weil sich unser Product als Quotient der linken Seite unserer Gleichung siebenten Grades durch $x^3 - u_1x^2 + u_2x - u_3$ berechnen lässt. Insbesondere will ich den Term $x_2\, x_4\, x_5\, x_6$ mit v bezeichnen:

$$(7) \qquad v = x_2\, x_4\, x_5\, x_6;$$

man hat dann die evidente Relation:

$$(8) \qquad -(7) = u_3 \,.\, v.$$

Ziehen wir jetzt die Theorie der cubischen Gleichungen in Betracht, so können wir jedenfalls folgenden Satz aussprechen:

Jede in x_1, x_3 *symmetrische ganze Function* G *von* x_0, x_1, x_3 *kann in die Form gebracht werden:*

$$(9) \qquad G = A_0 + A_1 x_0 + A_2 x_1 x_3$$

(*wo* A_0, A_1, A_2 *Functionen* A *sind*). — Analog kommt, wenn wir die Theorie der biquadratischen Gleichungen herannehmen.

Jede ganze Function H *der* x_2, x_4, x_5, x_6, *welche bei den acht Substitutionen* S''' *ungeändert bleibt, kann nach Belieben in eine der beiden Formen gesetzt werden:*

$$(10)\quad H = A_0 + (A_1 - x_0^2 A_2)(x_2 x_6 + x_4 x_5) \\ + A_2 \{x_2 x_6 (x_0^2 + x_2^2 + x_6^2) + x_4 x_5 (x_0^2 + x_4^2 + x_6^2)\}$$

resp.

$$(11)\quad H = A_0 + (A_1 - x_0^2 A_2)(x_2 x_6 + x_4 x_5) \\ + A_2 (x_2 x_6 (x_0^2 + x_4^2 + x_5^2) + x_4 x_5 (x_0^2 + x_2^2 + x_6^2)).$$

§ 3.

Ueber die einfachsten Functionen A und die aus ihnen entspringenden S.

Unter den Functionen A erwähne ich insbesondere diese:

$$(12)\quad \begin{cases} p_\nu \quad = x_0^\nu + x_1^\nu + x_3^\nu, \\ p_{\nu,\nu} = x_0^\nu x_1^\nu + x_1^\nu x_3^\nu + x_3^\nu x_0^\nu, \\ p_{\lambda,\mu} = x_0^\lambda (x_1^\mu + x_3^\mu) + x_1^\lambda (x_3^\mu + x_0^\mu) + x_3^\lambda (x_0^\mu + x_1^\mu), \quad \{\lambda \gtrless \mu\}, \\ p_{\lambda,\mu,\nu} = \sum x_0^\lambda x_1^\mu x_3^\nu, \end{cases}$$

(wo also $p_1 = \sqrt{2} \cdot \bar{x}_1$), ferner, unter v den Ausdruck (7) verstanden:

$$(13)\qquad v, \quad p_\nu . v, \quad p_{\nu,\nu} . v, \quad p_{\lambda,\mu} . v \text{ etc.}$$

Ihnen entsprechen analog gebildete Functionen, in denen jedes x durch das correspondirende $\bar{x}$ ersetzt ist.

Wendet man nun auf diese Ausdrücke die Substitutionen S an, so nehmen sie je 7 Werthe an; indem wir über dieselben summiren, erhalten wir eine Anzahl der Functionen S. Die einfachsten dieser Functionen werthen wir sofort aus. So wird aus (3) und (5):

$$(14)\quad \begin{cases} \sum p_\nu = 3 s_\nu, \\ 2 \sum p_{\nu,\nu} = s_\nu^2 - s_{2\nu}, \\ \sum p_{\lambda,\mu} = s_\lambda s_\mu - s_{\lambda+\mu}; \end{cases}$$

analog $\sum \bar{p}_\nu$, $\sum \bar{p}_{\nu,\nu}$ etc. *Für die anderen hier gewonnenen Functionen S führen wir besondere Bezeichnung ein, indem wir setzen:*

$$(15)\quad \begin{cases} \sum p_{\lambda,\mu,\nu} = P_{\lambda,\mu,\nu}, & \sum \bar{p}_{\lambda,\mu,\nu} = \bar{P}_{\lambda,\mu,\nu}, \\ \sum v \quad = L_0, & \sum \bar{v} \quad = \bar{L}_0, \\ \sum p_\nu . v = L_\nu, & \sum \bar{p}_\nu . \bar{v} = \bar{L}_\nu, \\ \sum p_{\nu,\nu} . v = L_{\nu,\nu}, & \sum \bar{p}_{\nu,\nu} . \bar{v} = \bar{L}_{\nu,\nu}, \\ \sum p_{\lambda,\mu} . v = L_{\lambda,\mu}, & \sum \bar{p}_{\lambda,\mu} . \bar{v} = \bar{L}_{\lambda,\mu}, \end{cases}$$

Wir fügen noch hinzu:

$$C_{\lambda,\mu} = \sum x_0^{\lambda}\, \bar{x}_1^{\mu}. \tag{16}$$

Die hiermit definirten P, L, C bilden insofern das Fundament der folgenden Untersuchung, als wir complicirtere Bildungen immer auf sie zurückführen. Was ihre Auswerthung in Functionen der (i), $(\bar{i})$ angeht, so können wir einige von ihnen unmittelbar bestimmen. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
\sum p_{-1} &= 3s_{-1} = -3\,\frac{(6)}{(7)} = \sum \frac{p_{11}}{u_3},\\
\sum p_{-1,-1} &= \frac{(5)}{(7)} = \sum \frac{p_1}{u_3},\\
\sum p_{\lambda,-1} &= s_\lambda s_{-1} - s_{\lambda-1} = -\frac{(6)s_{\lambda-1} + (7)s_{\lambda-1}}{(7)} = \sum \frac{p_{\lambda+1,1}}{u_3}
\end{aligned}$$

also nach § 2 Formel (8):

$$L_1 = -(5); \quad L_{1,1} = 3(6); \quad L_{\lambda+2,1} = (7)s_\lambda + (6)s_{\lambda+1}. \tag{17}$$

Die übrigen P, L und die C sollen erst später berechnet werden.

§ 4.

Inbetrachtnahme anderer Functionen A.

Neben den symmetrischen Functionen p_ν, $p_{\nu,\nu}$ etc. der x_0, x_1, x_3, die wir eben eingeführt haben, ist es nützlich, gewisse andere zu betrachten, die als Quotienten von Determinanten definirt werden können. Es sind dies folgende:

$$q_{\lambda,\mu,\nu} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x_0^{\lambda} & x_0^{\mu} & x_0^{\nu} \\ x_1^{\lambda} & x_1^{\mu} & x_1^{\nu} \\ x_3^{\lambda} & x_3^{\mu} & x_3^{\nu} \end{vmatrix}, \qquad r_{\lambda,\mu} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x_0^{\lambda} & x_0^{\mu} & (x_0-x_1)(x_0-x_3) \\ x_1^{\lambda} & x_1^{\mu} & (x_1-x_3)(x_1-x_0) \\ x_3^{\lambda} & x_3^{\mu} & (x_3-x_0)(x_3-x_1) \end{vmatrix}, \tag{18}$$

wo Δ folgenden Ausdruck bedeuten soll:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Die Ausdrücke $\frac{1}{2}(r_{\lambda+1,0} + r_{\lambda,1})$ bezeichne ich dabei durch $r_{\lambda+1}$, so dass also:

$$2r_{\lambda+1} = r_{\lambda+1,0} + r_{\lambda,1}. \tag{20}$$

Es handelt sich zunächst darum, eine Reihe von Beziehungen für die hiermit definirten q, r und die p des vorigen Paragraphen darzulegen.

Multiplicirt man die in Formel (18) rechts stehenden Determinanten mit $p_{i\varkappa}$ so erhält man 6 Determinanten, deren jede aus 6 Gliedern besteht. Diese 36 Glieder lassen sich auf 6 neue Determinanten vertheilen, nämlich:

$$\begin{vmatrix} x_0^{\lambda+i} & x_0^{\mu+i} & x_0^{\nu} \\ x_1^{\lambda+i} & x_1^{\mu+i} & x_1^{\nu} \\ x_3^{\lambda+i} & x_3^{\mu+i} & x_3^{\nu} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_0^{\lambda+i} & x_0^{\mu} & x_0^{\nu+\varkappa} \\ x_1^{\lambda+i} & x_1^{\mu} & x_1^{\nu+\varkappa} \\ x_3^{\lambda+i} & x_3^{\mu} & x_3^{\nu+\varkappa} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_0^{\lambda+\varkappa} & x_0^{\mu+i} & x_0^{\nu} \\ x_1^{\lambda+\varkappa} & x_1^{\mu+i} & x_1^{\nu} \\ x_3^{\lambda+\varkappa} & x_3^{\mu+i} & x_3^{\nu} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} x_0^{\lambda+\varkappa} & x_0^{\mu} & x_0^{\nu+i} \\ x_1^{\lambda+\varkappa} & x_1^{\mu} & x_1^{\nu+i} \\ x_3^{\lambda+\varkappa} & x_3^{\mu} & x_3^{\nu+i} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_0^{\lambda} & x_0^{\mu+i} & x_0^{\nu+\varkappa} \\ x_1^{\lambda} & x_1^{\mu+i} & x_1^{\nu+\varkappa} \\ x_3^{\lambda} & x_3^{\mu+i} & x_3^{\nu+\varkappa} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_0^{\lambda} & x_0^{\mu+\varkappa} & x_0^{\nu+i} \\ x_1^{\lambda} & x_1^{\mu+\varkappa} & x_1^{\nu+i} \\ x_3^{\lambda} & x_3^{\mu+\varkappa} & x_3^{\nu+i} \end{vmatrix}.$$

So gelange ich zu den Formeln:

$$(21)\quad \begin{cases} p_\varkappa q_{\lambda,\mu,\nu} = q_{\lambda+\varkappa,\mu,\nu} + q_{\lambda,\mu+\varkappa,\nu} + q_{\lambda,\mu,\nu+\varkappa}, \\ p_{\varkappa,\varkappa} q_{\lambda,\mu,\nu} = q_{\lambda,\mu+\varkappa,\nu+\varkappa} + q_{\lambda+\varkappa,\mu,\nu+\varkappa} + q_{\lambda+\varkappa,\mu+\varkappa,\nu}, \\ p_{i,\varkappa} q_{\lambda,\mu,\nu} = q_{\lambda+i,\mu+\varkappa,\nu} + q_{\lambda+i,\mu,\nu+\varkappa} + q_{\lambda+\varkappa,\mu+i,\nu} + q_{\lambda+\varkappa,\mu,\nu+i} \\ \qquad + q_{\lambda,\mu+i,\nu+\varkappa} + q_{\lambda,\mu+\varkappa,\nu+i}. \end{cases}$$

Für:

$$\lambda = 2;\quad \mu = 1;\quad \nu = 0$$

gehen diese Formeln in die folgenden über:

$$(22)\quad \begin{cases} p_\varkappa = q_{\varkappa+2,1,0} + q_{2,\varkappa+1,0} + q_{2,1,\varkappa}, \\ p_{\varkappa,\varkappa} = q_{2,\varkappa+1,\varkappa} + q_{2+\varkappa,1,\varkappa} + q_{2+\varkappa,1+\varkappa,0}, \\ p_{i\varkappa} = q_{2+i,1+\varkappa,0} + q_{2+i,1,\varkappa} + q_{2+\varkappa,1+i,0} + q_{2+\varkappa,1,i} + q_{2,1+\varkappa,i} + q_{2,1+i,\varkappa}. \end{cases}$$

Entwickelt man die im Zähler $r_{\lambda,\mu}$ vorkommenden Determinanten nach der 3. Colonne, so wird:

$$r_{\lambda,\mu} = \frac{x_1^\lambda x_3^\mu - x_3^\lambda x_1^\mu}{x_1 - x_3} + \frac{x_3^\lambda x_0^\mu - x_0^\lambda x_3^\mu}{x_3 - x_0} + \frac{x_0^\lambda x_1^\mu - x_0^\mu x_1^\lambda}{x_0 - x_1}.$$

Trägt man hier für λ und μ specielle Werthe ein, so gelangt man leicht zu diesen Formeln:

$$(23)\quad \begin{cases} r_{\lambda+1} = p_\lambda + p_{\lambda-1,2} + p_{\lambda-2,2} \cdots, \\ r_{\lambda+1,1} = p_{\lambda,1} + p_{\lambda-1,2} + p_{\lambda-2,3} \cdots, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ r_{\lambda+\mu,\mu} = p_{\lambda,\mu} + p_{\lambda-1,\mu+1} + p_{\lambda-2,\mu+2} \cdots, \end{cases}$$

in denen sich die Summen rechts über solche $p_{i\varkappa}$ erstrecken, bei denen:

$$i \geqq \varkappa$$

ist.

Trägt man ferner für die Elemente der 3ten Colonne der im Zähler der $r_{\lambda,\mu}$ stehenden Determinante die Werthe ein:

$$(x_0-x_1)(x_0-x_3)=2x_0^2-p_1x_0+x_1x_3,$$
$$(x_1-x_0)(x_1-x_3)=2x_1^2-p_1x_1+x_3x_0,$$
$$(x_3-x_0)(x_3-x_1)=2x_3^2-p_1x_3+x_0x_1,$$

so erhält man die Formel:

$$r_{\lambda,\mu}=2q_{\lambda,\mu,2}-p_1q_{\lambda,\mu,1}+u_3q_{\lambda,\mu,-1}.$$

Nun ist nach (21):

$$p_1q_{\lambda,\mu,1}=q_{\lambda,\mu,2}+q_{\lambda+1,\mu,1}+q_{\lambda,\mu+1,1}$$

und ausserdem:

$$u_3q_{\lambda,\mu,-1}=q_{\lambda+1,\mu+1,0},$$

mithin kommt:

(24) $$r_{\lambda,\mu}=q_{\lambda+1,\mu+1,0}-q_{\lambda+1,\mu,1}-q_{\lambda,\mu+1,1}+q_{\lambda,\mu,2}.$$

Für $\mu=0$ und 1 wird:

$$r_{\lambda+1,0}=2q_{\lambda+2,1,0}-q_{\lambda+1,2,0},$$
$$r_{\lambda,1}=-2q_{\lambda,2,1}+q_{\lambda+1,2,0},$$

also nach Formel (20):

(24a) $$r_{\lambda+1}=q_{\lambda+2,1,0}-q_{\lambda,2,1}.$$

Setzt man in den Formeln (24) für λ und μ diejenigen Combinationen der Zahlen 0, 1, ... 6, bei denen $\lambda>\mu$ ist, so entstehen die Formeln

(25) $$\left\{\begin{array}{l}
r_2=q_{3,1,0};\ r_{2,1}=q_{3,2,0};\\
r_3=q_{4,1,0};\ r_{3,1}=q_{4,2,0}-2q_{3,2,1};\ r_{3,2}=q_{4,3,0}-q_{4,2,1};\\
r_4=q_{5,1,0}-q_{3,2,1};\ r_{4,1}=q_{5,2,0}-2q_{4,2,1};\ r_{4,2}=q_{5,3,0}-q_{5,2,1}-q_{4,3,1};\\
\qquad r_{4,3}=q_{5,4,0}-q_{5,3,1}+q_{4,3,2};\\
r_5=q_{6,1,0}-q_{4,2,1};\ r_{5,1}=q_{6,2,0}-2q_{5,2,1};\ r_{5,2}=q_{6,3,0}-q_{6,2,1}-q_{5,3,1};\\
\qquad r_{5,3}=q_{6,4,0}-q_{6,3,1}-q_{5,4,1}+q_{5,3,2};\\
\qquad r_{5,4}=q_{6,5,0}-q_{6,4,1}-q_{5,4,2};\\
r_6=q_{7,1,0}-q_{5,2,1};\ r_{6,1}=q_{7,2,0}-2q_{6,2,1};\ r_{6,2}=q_{7,3,0}-q_{7,2,1}-q_{6,3,1};\\
\qquad r_{6,3}=q_{7,4,0}-q_{7,3,1}-q_{6,4,1}+q_{6,3,2};\\
\qquad r_{6,4}=q_{7,5,0}-q_{7,4,1}-q_{6,5,1}+q_{6,4,2};\\
\qquad r_{6,5}=q_{7,6,0}-q_{7,5,1}+q_{6,5,2};
\end{array}\right.$$

welche unter Anderem dazu benutzt werden können, um die q linear durch die r auszudrücken, welche ihrerseits nach Formel (23) Aggregate der p sind. —

Ich erwähne ferner eine gewisse Relation, welche die q mit den Coefficienten (i) verbindet. Sei $f(x)$ die linke Seite unserer Gleichung siebenten Grades, so hat man:

$$f(x_0)=0,\quad f(x_1)=0,\quad f(x_3)=0$$

und also:

$$\begin{vmatrix} x_0^\lambda . f(x_0) & x_0^\mu & x_0^\nu \\ x_1^\lambda . f(x_1) & x_1^\mu & x_1^\nu \\ x_3^\lambda . f(x_3) & x_3^\mu & x_3^\nu \end{vmatrix} = 0.$$

Somit hat man die Formel:

(26) $$q_{\lambda+7,\mu,\nu} + (2) q_{\lambda+5,\mu,\nu} + (3) q_{\lambda+4,\mu,\nu} + (4) q_{\lambda+3,\mu,\nu} + q_{\lambda+2,\mu,\nu} + (6) q_{\lambda+1,\mu,\nu} + (7) q_{\lambda,\mu,\nu} = 0.$$ *)

Setzt man hier:

$$\lambda = -1,$$

so wird:

(27) $$q_{6,\mu,\nu} + (2) q_{4,\mu,\nu} + (3) q_{3,\mu,\nu} + (4) q_{2,\mu,\nu} + (5) q_{1,\mu,\nu} + (6) q_{0,\mu,\nu} = q_{0,\mu+1,\nu+1} . v.$$

§ 5.

Darstellung gewisser Functionen S durch die (i) und die G.

Von den Functionen P, L, die in § 3 eingeführt wurden, will ich die folgenden (deren Auswerthung besondere Schwierigkeiten macht) unter dem Namen G zusammenfassen:

(28) $$P_{2,2,2},\ P_{3,2,2},\ P_{5,2,2};\quad L_0,\ L_2,\ L_3,\ L_4;\quad L_{2,2},\ L_{3,2},\ L_{3,3},\ L_{4,2},\ L_{4,3},\ L_{4,4}.$$

Ich will nun zeigen, dass die Grössen:

$$r_{i,\varkappa},\ q_{\lambda,\mu,\nu},\ q_{\lambda,\mu,\nu}.v,\ q_{\lambda,\mu,\nu}.v^2,\ p_{i\varkappa}.v,\ p_{i\varkappa}.u_3^\lambda,\ p_{i\varkappa}.v^2$$

Aggregate der folgenden sind

(29) $$p_{i,\varkappa},\ p_1^3,\ p_1^4,\ p_1^5,\ p_1^6,\ p_1^7,\ u_3^2,\ p_1 u_3^2,\ p_3 u_3^2,\ p_{i\varkappa}.v$$

(wo bei den $p_{i\varkappa} . v$ die i und $\varkappa \leq 4$ genommen werden können). Indem wir alsdann nach den S summiren, erhalten wir Darstellungen bestimmter Functionen S durch die Coefficienten (i) und die G. Ich fasse die betreffenden Ueberlegungen in eine Reihe einzelner Punkte zusammen.

1. Die r sind nach Formel (23) Aggregate der $p_{i\varkappa}$. —
2. Diejenigen Producte

$$q_{\lambda,\mu,\nu} v$$

bei denen $\lambda > 6$ ist, lassen sich nach Formel (26) auf einfachere reduciren, und die, bei denen $\nu > 0$ ist, haben den Factor:

$$u_3 v = -(7).$$

Die übrigen Producte:

$$q_{\lambda,\mu,\nu} v,$$

---

*) Diese Formel liefert alle Beziehungen zwischen den (i) und q, welche in den q linear sind.

bei denen also $\lambda < 7$ und $\nu = 0$ ist, sind nach Formel (25) auf diejenigen Producte

$$r_{\lambda,\mu} v$$

reducibel, bei denen $\lambda < 6$ ist und diese wieder nach § 4 Formel (23) auf solche Producte:

$$p_{i\,\varkappa} v$$

bei denen i und $\varkappa < 5$ ist, also auf Grössen (29).

3. Ich gehe nun zu den Grössen $q_{\lambda,\mu,\nu}$ über. Diejenigen unter ihnen, bei denen

$$\lambda \geqq 6$$

ist, lassen sich mittelst der Formeln (26), (27) reduciren, und die, bei denen zwar $\lambda < 6$ aber $\nu = 0$ ist, mittelst Formel (25) auf $r_{\lambda,\mu}$ und solche $q_{\lambda,\mu,\nu}$, bei denen $\nu > 0$ ist.

Es gilt also, diejenigen q zu berechnen, bei denen:

$$\lambda < 6 \quad \text{und} \quad \nu > 0$$

ist, nämlich:

$$q_{3,2,1},\; q_{4,2,1},\; q_{5,2,1},\; q_{4,3,1},\; q_{5,3,1},$$
$$q_{5,4,1},\; q_{4,3,2},\; q_{5,3,2},\; q_{5,4,2},\; q_{5,4,3}.$$

Die hierzu nöthigen Formeln verschaffe ich mir auf diesem Wege.

Zunächst entwickele ich die p_1^ν nach dem binomischen Lehrsatze. Es ist:

$$(30)\quad \begin{cases} p_1^3 = p_3 + 3p_{21} + 6u_3, \\ p_1^4 = p_4 + 4p_{31} + 6p_{22} + 12p_1 u_3, \\ p_1^5 = p_5 + 5p_{41} + 10p_{32} + 20p_2 u_3 + 30p_{11} u_3, \\ p_1^6 = p_6 + 6p_{51} + 15p_{42} + 20p_{33} + 30(p_3 + 2p_{21} + 3u_3)u_3, \\ p_1^7 = p_7 + 7p_{61} + 21p_{52} + 35p_{43} + 7(6p_4 + 15p_{31} + 20p_{22} + 30p_1 u_3)u_3. \end{cases}$$

In die erste und dritte dieser Gleichungen trage ich für die

$$u_3,\; p_2 u_3,\; p_{11} u_3$$

ihre Werthe aus Formel (22) ein, und erhalte:

$$(31)\quad \begin{cases} p_1^3 = p_3 + 3p_{21} + 6q_{3,2,1}, \\ p_1^5 = p_5 + 5p_{41} + 10p_{32} + 20q_{5,2,1} + 10q_{4,3,1}. \end{cases}$$

Sodann ist nach Formel (22):

$$(32)\quad u_3^2 = q_{4,3,2};\; p_1 u_3^2 = q_{5,3,2};\; p_3 u_3^2 = q_{7,3,2} - q_{6,4,2} + q_{5,4,3}.$$

Endlich hat man nach Formel (23):

$$(33)\quad \begin{cases} r_5 = q_{6,1,0} - q_{4,2,1};\; r_{5,1} = q_{6,2,0} - 2q_{5,2,1};\; r_{5,2} = q_{6,3,0} - q_{6,2,1} - q_{5,3,1}; \\ r_{5,3} = q_{6,4,0} - q_{6,3,1} - q_{5,4,1} + q_{5,3,2};\; r_{5,4} = q_{6,5,0} - q_{6,4,1} + q_{5,4,2}. \end{cases}$$

Aus den Formeln (31), (32), (33) ergeben sich jetzt diese Werthe der q:

$$(34)\quad\left\{\begin{aligned}
6q_{3,2,1} &= p_1^3 - p_3 - 3p_{2,1},\\
q_{4,2,1} &= q_{6,1,0} - r_5,\\
2q_{5,2,1} &= q_{6,2,0} - r_{5,1},\\
10q_{4,3,1} &= p_1^5 - p_5 - 5p_{41} - 10p_{32} - 20q_{5,2,1},\\
q_{4,3,2} &= u_3^2,\\
q_{5,3,1} &= q_{6,3,0} - q_{6,2,1} - r_{5,2},\\
q_{5,3,2} &= p_1 u_3^2,\\
q_{5,4,1} &= q_{6,4,0} - q_{6,3,1} + q_{5,3,2} - r_{5,3},\\
q_{5,4,2} &= -q_{6,5,0} + q_{6,4,1} + r_{5,4},\\
q_{5,4,3} &= -q_{7,3,2} + q_{6,4,2} + p_3 u_3^2.
\end{aligned}\right.$$

4. Die Producte $q_{\lambda,\mu,\nu}v^2$, bei denen $\nu > 0$ ist, haben den Factor:

$$u_3 v = -(7),$$

die übrigen Producte $q_{\lambda,\mu,0}v^2$ lassen sich nach Formel (27) berechnen. —

Die:

$$p_{i\,x}v,\ p_{i\,x}u_3^\lambda,\ p_{i\,x}v^2$$

lassen sich nach Formel (32) durch die:

$$q_{\lambda,\mu,\nu}v,\ q_{\lambda,\mu,\nu},\ q_{\lambda,\mu,\nu}v^2$$

ausdrücken.

Somit ist unser Satz bewiesen.

Die nun folgenden Formeltabellen, in welchen Formen bis zum Grade 12 berechnet sind, sind im wesentlichen nach denselben Methoden aufgestellt worden, die wir jetzt bereits gebraucht haben.

Die Summen:

$$\sum q_{\lambda,\mu,0}\,v$$

nämlich sind mittelst Formel (25) berechnet; die:

$$\sum q_{7,\mu,\nu} \quad \text{und} \quad \sum q_{6,\mu,\nu}$$

nach Formel (26) und (27). Die Summen:

$$\sum q_{\lambda,\mu,1} \quad \text{und} \quad \sum q_{\lambda,\mu,2},$$

bei denen $\lambda < 6$ ist, sind nach den Formeln (34) und die Summe:

$$\sum q_{\lambda,\mu,0},$$

bei denen $\lambda < 6$ ist, nach den Formeln (25) berechnet.

Die Summen:

$$\sum q_{\lambda,\mu,0}v^2$$

sind nach Formel (27) bestimmt. —

Um die Grössen:

$$\sum p_{i\,x}\,v^2$$

und die P sowie die Aggregate der $L_{\lambda,\mu}$ zu berechnen, benutzte

ich die Formeln (22). Die Grössen L_6 und $L_{6,2}$ berechnete ich vermöge der Relation:

$$x_0^6 + (2)\,x_0^4 + (3)\,x_0^3 + (4)\,x_0^2 + (5)\,x_0 + (6) = -\frac{(7)}{x_0} = x_1 x_3 \cdot v.$$

Formeltabelle.

Formeln vom Grade 0.

$$\sum q_{2,1,0} = 7(7).$$

Formeln vom Grade 1.

$$\sum q_{3,1,0} = 0.$$

Formeln vom Grade 2.

$$\sum q_{4,1,0} = -\,5(2), \qquad \sum q_{3,2,0} = (2).$$

Formeln vom Grade 3.

$$\sum q_{3,2,1} = P_{1,1,1} = -\sqrt{2}\,(\bar{3}),$$
$$\sum q_{5,1,0} = -\sqrt{2}\,(\bar{3}) - 6(3),$$
$$\sum q_{4,2,0} = -\sqrt{8}\,(\bar{3}) + 3(3).$$

Formeln vom Grade 4.

$$\sum q_{2,1,0}\,v = L_0, \quad \sum q_{4,2,1} = P_{2,1,1} = L_0 - (4),$$
$$\sum q_{6,1,0} = L_0 - 7(4) + 5(22),$$
$$\sum q_{5,2,0} = 2L_0 + 4(4) - (22),$$
$$\sum q_{4,3,0} = L_0 + (4) + (22),$$
$$3L_0 = -\,4(\bar{4}) - (4) + (22).$$

Formeln vom Grade 5.

$$L_1 = \sum q_{3,1,0}v = -\,(5),$$
$$\sum q_{6,2,0} = 6(5) + \sqrt{8}\,(\bar{3}2) - 4(32),$$

$$\sum q_{5,2,1} = -2(5) + \sqrt{2}(\bar{3}2),$$
$$\sum q_{4,3,1} = -\sqrt{8}(\bar{5}) - 2(5) = P_{2,2,1},$$
$$\sum q_{5,3,0} = -\sqrt{8}(\bar{5}) + (5) + \sqrt{2}(\bar{3}2) + (32),$$
$$P_{3,1,1} = \sqrt{8}(\bar{5}) + \sqrt{2}(\bar{3}2).$$

Formeln vom Grade 6.

$$\sum q_{3,2,0}v = L_{1,1} = 3(6), \quad \sum q_{4,1,0}\, v = L_2 + 3(6),$$
$$\sum q_{4,3,2} = P_{2,2,2},$$
$$\sum q_{6,3,0} = L_2 - (2)\, L_0 + 3(6) - (222),$$
$$\sum q_{6,2,1} = -(2)\, L_0 - 4(6) + (42) + \sqrt{2}(\bar{3}3),$$
$$\sum q_{5,4,0} = -P_{2,2,2} + L_2 + (6) - 3(42) - \sqrt{2}(\bar{3}3) + 3(33) + (222),$$
$$\sum q_{5,3,1} = L_2 - 2(6) - \sqrt{2}(\bar{3}3),$$
$$P_{4,1,1} = P_{2,2,2} - L_2 - (2)\big(L_0 - (4)\big) - 2(6) + \sqrt{8}(\bar{3}3),$$
$$P_{3,2,1} = -2P_{2,2,2} + L_2 - 2(6) - \sqrt{2}(\bar{3}3),$$
$$5L_2 = -(2)\big(L_0 - (4)\big) - 8(\bar{6}) + 2(6) + 4(\bar{3}\bar{3}) - (33).$$

Formeln vom Grade 7.

$$L_{2,1} = 7(7), \quad \sum q_{4,2,0}\, v = -7(7), \quad \sum q_{5,1,0}\, v = L_3,$$
$$\sum q_{5,3,2} = P_{3,2,2},$$
$$\sum q_{7,2,1} = -(3)\, L_0 - 7(7) + 2(52) + \sqrt{2}(4\bar{3}) + (43) - \sqrt{2}(\bar{3}22),$$
$$\sum q_{6,4,0} = L_3 + (3)\, L_0 - \sqrt{8}(4\bar{3}) + 4(43) - 5(52) + (322),$$
$$\sum q_{6,3,1} = -7(7) + \sqrt{8}(\bar{5}2) + 2(52) - \sqrt{2}(4\bar{3}),$$
$$\sum q_{5,4,1} = P_{3,2,2} + L_3 + (3)\big(L_0 - (4)\big) - \sqrt{8}(\bar{5}2) - \sqrt{2}(4\bar{3}),$$
$$P_{5,1,1} = P_{3,2,2} - (3)\big(L_0 - (4)\big) - \sqrt{8}(\bar{5}2) + \sqrt{8}(4\bar{3}) - \sqrt{2}(\bar{3}22),$$
$$P_{4,2,1} = -2P_{3,2,2} - L_3 - (3)\big(L_0 - (4)\big) - 7(7) + 4\sqrt{2}(\bar{5}2) + 2(52),$$
$$P_{3,3,1} = L_3 + (3)\big(L_0 - (4)\big) - \sqrt{8}(\bar{5}2) - \sqrt{2}(4\bar{3}),$$
$$-6P_{3,2,2} - 5L_3 = 8\sqrt{2}(\bar{7}) + \big(6\sqrt{2}(\bar{3}) - (3)\big)\big(L_0 - (4)\big) - 45(7).$$

Formeln vom Grade 8.

$$L_{3,1} = -2(62),$$

$$\sum q_{4,3,0}\, v = L_{2,2},$$

$$\sum q_{5,2,0}\, v = L_{2,2} - 2(62), \qquad \sum q_{6,1,0}\, v = L_4 + L_{2,2} - 2(62),$$

$$\sum q_{7,3,1} = -(2) L_2 + 2(62) + \sqrt{8}(\bar{5}3) - \sqrt{2}(5\bar{3}) + 2(53) + \sqrt{2}(\bar{3}32),$$

$$\sum q_{6,5,0} = \left\{ \begin{array}{l} -(2) P_{2,2,2} + L_4 + L_{2,2} + (2) L_2 + 2(4) L_0 - (62) \\ -\sqrt{8}(\bar{5}3) - \sqrt{2}(5\bar{3}) - 5(53) + 4(44) - 4(422) \\ +4(332) + (2222), \end{array} \right.$$

$$\sum q_{6,4,1} = L_{2,2} + (4)\big(L_0 - (4)\big) + 3(62) - \sqrt{8}(\bar{5}3) - 2(53),$$

$$\sum q_{6,3,2} = L_{2,2} - (2) P_{2,2,2} + \sqrt{2}(5\bar{3}) - (62),$$

$$\sum q_{5,4,2} = -L_4 + (2) P_{2,2,2} - (2) L_2 - (4)\big(L_0 - (4)\big) + \sqrt{2}(5\bar{3}) - (53),$$

$$P_{5,2,1} = \left\{ \begin{array}{l} -L_4 + 2(2) P_{2,2,2} - 2 L_{2,2} - 2(2) L_2 - 2(4) L_0 \\ +4\sqrt{2}(\bar{5}3) + \sqrt{2}(5\bar{3}) + 3(53) + 2(44) + \sqrt{2}(\bar{3}32), \end{array} \right.$$

$$P_{4,3,1} = L_4 + (2) L_2 + 2(4)\big(L_0 - (4)\big) + 4(62) - \sqrt{8}(\bar{5}3)$$
$$- \sqrt{8}(5\bar{3}) - (53),$$

$$P_{4,2,2} = L_4 + L_{2,2} - 2(2) P_{2,2,2} + (2) L_2 + (4)\big(L_0 - (4)\big) - (62) + (53),$$

$$P_{3,3,2} = -L_4 + (2) P_{2,2,2} - (2) L_2 - (4)\big(L_0 - (4)\big) + \sqrt{2}(5\bar{3}) - (53),$$

$$\sum q_{2,1,0}\, v^2 = \sum v^2 = L_4 + L_{2,2} + (2) L_2 + (4) L_0 + (62) - (53),$$

$$P_{6,1,1} = \left\{ \begin{array}{l} L_{2,2} - (2) P_{2,2,2} + (2) L_2 - \big((4) - (22)\big)\big(L_0 - (4)\big) + (62) \\ \qquad - \sqrt{8}(\bar{5}3) + 3\sqrt{2}(5\bar{3}) - 3\sqrt{2}(\bar{3}32). \end{array} \right.$$

Formeln vom Grade 9.

$$L_{4,1} = -2(72) - 3(63),$$

$$\sum q_{5,3,0}\, v = L_{3,2} + 4(72), \qquad \sum q_{6,2,0}\, v = L_{3,2} - 4(64) + 2(622) + 3\sqrt{2}(7\bar{3}),$$

$$\sum q_{7,1,0}\, v = -(2) L_3 - (3) L_2 - (5)\big(L_0 - (4)\big) - 3(63),$$

$$L_5 + L_{3,2} = -(2) L_3 - (3) L_2 - (5)\big(L_0 - (4)\big) - 3(72),$$

$$\sum q_{7,3,2} = -(2) P_{3,2,2} - (3) P_{2,2,2} - (72) + \sqrt{2}(6\bar{3}),$$

$$\sum q_{6,4,2} = L_{3,2} + (3)\,P_{2,2,2} - (5)\big(L_0 - (4)\big) + 4(72) + \sqrt{\bar 8}\,(6\bar 3) - 3(63),$$

$$P_{4,3,2} = -\,2\,P_{5,2,2} - L_{3,2} - 2(2)\,P_{3,2,2} - 3(3)\,P_{2,2,2} + (5)\big(L_0 - (4)\big) - 6(72) + 3(63).$$

Formeln vom Grade 10.

$$L_{5,1} = -\,3(73) + \big(-\,4(4) + 2(22)\big)(6),$$

$$\sum q_{5,4,0}\,v = L_{3,3} + \sqrt{\bar 2}\,(7\bar 3) - 3(73),$$

$$\sum q_{7,2,0}\,v = -\,(2)\,L_{2,2} + (6)\,L_0 + 7(73) - 3(64) + 2(622),$$

$$L_{4,2} + L_{3,3} = -\,(2)\,L_{2,2} + (6)\,L_0 - \sqrt{\bar 8}\,(7\bar 3) - 2(73) + (64),$$

$$\sum q_{6,3,0}\,v = -\,(2)\,L_{2,2} + (6)\,L_0 + \sqrt{\bar 2}\,(7\bar 3) + (73) + (64),$$

$$\sum q_{6,5,2} = \begin{cases} -\,(2)\,L_4 - (2)\,L_{2,2} + (3)\,P_{3,2,2} - (22)\,L_2 - \big((6) + (42)\big)\,L_0 \\ +\,(22)\,P_{2,2,2} + \sqrt{\bar 2}\,(7\bar 3) + (73) - 3(64) + (622) + 2(55) \\ -\,(532) + (442), \end{cases}$$

$$\sum q_{6,4,3} = L_{3,3} - (4)\,P_{2,2,2} - (6)\,L_0 + \sqrt{\bar 2}\,(7\bar 3) - 3(73) - (64) - (622) + \sqrt{\bar 8}\,(\bar 5 5) + 2(55),$$

$$P_{4,4,2} = \begin{cases} -\,L_{3,3} - (2)\,L_4 - (2)\,L_{2,2} + (3)\,P_{2,2,2} + \big((4) + (22)\big)\,P_{2,2,2} \\ -\,(22)\,L_2 - (42)\big(L_0 - (4)\big) + 4(73) - 2(64) + 2(622) \\ -\,\sqrt{\bar 8}\,(\bar 5 5) - (532), \end{cases}$$

$$P_{6,2,2} = \begin{cases} L_{3,3} - (2)\,L_4 + (2)\,L_{2,2} - (3)\,P_{3,2,2} - \big(3(4) - 2(22)\big)\,P_{2,2,2} \\ \quad -\,(22)\,L_2 - (42)\big(L_0 - (4)\big) - 2(64) + \sqrt{\bar 8}\,(\bar 5 5) \\ \quad +\,2(55) - (532), \end{cases}$$

$$\sum q_{3,1,0}\,v^2 = (6)\,L_0 + \sqrt{\bar 2}\,(7\bar 3) + (73) - 2(64) + (55),$$

$$\sum q_{3,2,0}\,v^2 = \sum p_{11}\,v^2 = (6)\,L_0 + \sqrt{\bar 2}\,(7\bar 3) - (73),$$

$$\sum p_2\,v^2 = 2(73) - 2(64) + (55),$$

$$L_6 = -\,(2)\,L_4 - (3)\,L_3 - (4)\,L_2 + \sqrt{\bar 2}\,(7\bar 3) - (73) + (55) - 2(6)\,L_0.$$

Formeln vom Grade 11.

$$L_{6,1} = \big(-4(4) + 2(22)\big)(7) + 5\big(-(5) + (32)\big)(6),$$

$$\sum q_{7,3,0}\, v = -(2)\, L_{3,2} - (3)\, L_{2,2} - 4(722) + 2(65),$$

$$\sum q_{6,4,0}\, v = L_{4,3} - 2(7)\, L_0 - 6(74),$$

$$L_{5,2} + L_{4,3} = -(2)\, L_{3,2} - (3)\, L_{2,2} + 3(7)\big(L_0 - (4)\big) + 2(65),$$

$$\sum q_{7,5,2} = \begin{cases} -(3)\, L_4 + (4)\, P_{3,2,2} + (32)\, P_{2,2,2} - (32)\, L_2 \\ -\big(2(7) + (43)\big) L_0 - 4(74) + (722) + 2(65) \\ -\sqrt{2}(6\bar{3}2) + \sqrt{2}(5\bar{3}3) - (533) + (443), \end{cases}$$

$$\sum (q_{7,4,3} + q_{6,5,3}) = \begin{cases} L_{4,3} - (4)\, P_{3,2,2} - (5)\, P_{2,2,2} - (5)\, L_2 - 3(7)\, L_0 \\ \quad - 7(74) - (722) + 4\sqrt{2}(6\bar{5}) + 3(65) \\ \quad - \sqrt{2}(6\bar{3}2) - (632) + \sqrt{2}(5\bar{3}3), \end{cases}$$

$$P_{5,4,2} = \begin{cases} -L_{4,3} - (3)\, L_4 + 2(4)\, P_{3,2,2} + \big((5) + (32)\big) P_{2,2,2} \\ + \big((5) - (32)\big) L_2 + \big((7) - (43)\big) L_0 + 3(74) \\ + 2(722) - 4\sqrt{2}(6\bar{5}) - (65) + (632) - (533) + (443), \end{cases}$$

$$P_{7,2,2} = \begin{cases} -(2)\, P_{5,2,2} - (3)\, L_4 - (3)\, L_{2,2} - (4)\, P_{3,2,2} \\ -\big(-3(5) - 2(32)\big) P_{2,2,2} - (32)\, L_2 - (43)\big(L_0 - (4)\big) \\ - 2(74) - (722) + \sqrt{8}(6\bar{5}) + 2(65) + (632) - (533), \end{cases}$$

$$\sum q_{5,1,0}\, v^2 = L_{4,3} - (3)\, L_{2,2} - (5)\, L_2 - 2(7)\, L_0 + (74) - 3(65),$$

$$\sum q_{4,2,0}\, v^2 = -2(7)\, L_0 + 3(74) - (65),$$

$$\sum p_{21}\, v^2 = 3(74) - (65),$$

$$\sum p_3\, v^2 = L_{4,3} - (3)\, L_{2,2} - (5)\, L_2 - (7)\, L_0 - 4(74) - 2(65).$$

Formeln vom Grade 12.

$$\sum q_{6,5,0}\, v = L_{4,4} - 3(75) - \sqrt{2}(7\bar{3}2) - (732),$$

$$\sum q_{7,4,0}\, v = -(2)\, L_{3,3} + (4)\, L_{2,2} + (6)\, L_2 - 7(75) - \sqrt{2}(7\bar{3}2) \\ + 3(732) + 3(66),$$

$$L_{5,3} + L_{4,4} = -(2)\,L_{3,3} + (4)\,L_{2,2} + (6)\,L_2 - \sqrt{8}(7\bar{5}) + 2(75)$$
$$+ \sqrt{2}(7\bar{3}2) + 3(66),$$

$$\sum q_{6,1,0}v^2 = L_{4,4} - (2)\,L_{3,3} - (3)\,L_{3,2} - (4)\,L_{2,2} - (5)\,L_3 - 3(75)$$
$$- \sqrt{8}(7\bar{3}2) + 2(642) - 2(732),$$

$$\sum q_{5,2,0}v^2 = (6)\,L_2 + \sqrt{8}(7\bar{5}) - (75) - \sqrt{2}(7\bar{3}2) + 3(66),$$

$$\sum q_{4,3,0}v^2 = -5(75) + 3(66),$$

$$\sum p_{22}\,v^2 = -6(75) + 3(66),$$

$$\sum p_{31}\,v^2 = (6)\,L_2 + \sqrt{8}(7\bar{5}) + 3(75) - \sqrt{2}(7\bar{3}2),$$

$$\sum p_4\,v^2 = \begin{cases} L_{4,4} - (2)\,L_{3,3} - (3)\,L_{3,2} - (4)\,L_{2,2} - (5)\,L_3 - (6)\,L_2 \\ \quad - \sqrt{8}(7\bar{5}) - (75) - \sqrt{2}(7\bar{3}2) - 2(732) - 3(66) \\ \quad + 2(642), \end{cases}$$

$$L_{6,2} = \begin{cases} -(2)\,L_{4,2} - (3)\,L_{3,2} - 2(4)\,L_{2,2} - (6)\,L_2 + \sqrt{8}(7\bar{5}) \\ -4(75) - \sqrt{2}(7\bar{3}2). \end{cases}$$

---

§ 6.

Gewisse Producte der P und L werden durch Aggregate dieser Grössen ausgedrückt.

Nach unserer früheren Angabe haben die Grössen $P_{1,1,1}$, L_0, $P_{\lambda+1,1,1}$, $P_{\mu+1,1,1}$, L_λ, L_μ die folgenden Werthe:

$$P_{1,1,1} = x_0x_1x_3 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_5 + x_3x_4x_6 + x_4x_5x_0 + x_5x_6x_1 + x_6x_0x_1,$$
$$L_0 = x_2x_4x_5x_6 + x_3x_5x_6x_0 + x_4x_6x_0x_4 + x_5x_0x_1x_2 + x_6x_1x_2x_3$$
$$+ x_0x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4x_5,$$

$$P_{\lambda+1,1,1} = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=6} (x_\varkappa^\lambda + x_{\varkappa+1}^\lambda + x_{\varkappa+3}^\lambda)\, x_\varkappa x_{\varkappa+1} x_{\varkappa+3},$$

$$P_{\mu+1,1,1} = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=6} (x_\varkappa^\mu + x_{\varkappa+1}^\mu + x_{\varkappa+3}^\mu)\, x_\varkappa x_{\varkappa+1} x_{\varkappa+3},$$

$$L_\lambda = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=6} (x_\varkappa^\lambda + x_{\varkappa+1}^\lambda + x_{\varkappa+3}^\lambda)\, x_{\varkappa+2} x_{\varkappa+4} x_{\varkappa+5} x_{\varkappa+6},$$

$$L_\mu = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=6} (x_\varkappa^\mu + x_{\varkappa+1}^\mu + x_{\varkappa+3}^\mu)\, x_{\varkappa+2} x_{\varkappa+4} x_{\varkappa+5} x_{\varkappa+6}.$$

Multiplicirt man zwei P mit einander oder zwei L mit einander, so erhält man 49 Producte. Dieselben zerfallen in 4 Gruppen, von denen die eine aus 7 Producten und die 2te aus 42 Producten besteht. Die Summe der Producte einer jeden solchen Gruppe ist eine Function S.

Die Glieder der 1ten Gruppe der Producte:

$$P_{1,1,1}\sum p_\lambda p_\mu u_3,\quad P_{\lambda+1,1,1}P_{\mu+1,1,1},\qquad L_0\sum p_\lambda p_\mu v,\quad L_\lambda L_\mu$$

entstehen aus den Producten:

$$p_\lambda p_\mu u_3^2,$$
$$p_\lambda p_\mu u_3^2,$$
$$p_\lambda p_\mu v^2,$$
$$p_\lambda p_\mu v^2$$

durch die Substitutionen S; ihre Summen haben daher die Werthe:

$$\sum p_\lambda p_\mu u_3^2 \quad \text{und} \quad \sum p_\lambda p_\mu v^2.$$

Die Glieder der 2ten Gruppe obiger Producte entstehen aus den Producten:

$$(x_0^\lambda + x_2^\lambda + x_6^\lambda)(x_0^\mu + x_2^\mu + x_6^\mu)\, x_0 x_2 x_6 \cdot x_0 x_4 x_5,$$
$$(x_0^\lambda + x_2^\lambda + x_6^\lambda)(x_0^\mu + x_4^\mu + x_5^\mu)\, x_0 x_2 x_6 \cdot x_0 x_4 x_5,$$
$$(x_0^\lambda + x_2^\lambda + x_6^\lambda)(x_0^\mu + x_2^\mu + x_6^\mu)\, x_1 x_3 x_4 x_5 \cdot x_1 x_3 x_2 x_6,$$
$$(x_0^\lambda + x_2^\lambda + x_6^\lambda)(x_0^\mu + x_4^\mu + x_5^\mu)\, x_1 x_3 x_4 x_5 \cdot x_1 x_3 x_2 x_6$$

durch die Substitutionen S. Nun befindet sich unter letzteren unter andern die Substitution $\begin{pmatrix} 2\,6\,4\,5 \\ 4\,5\,2\,6 \end{pmatrix}$; durch dieselbe gehen unsere Producte in diese über:

$$(x_0^\lambda + x_4^\lambda + x_5^\lambda)(x_0^\mu + x_4^\mu + x_5^\mu)\, x_0^2 v,$$
$$(x_0^\lambda + x_4^\lambda + x_5^\lambda)(x_0^\mu + x_2^\mu + x_6^\mu)\, x_0^2 v,$$
$$(x_0^\lambda + x_4^\lambda + x_5^\lambda)(x_0^\mu + x_4^\mu + x_5^\mu)\, x_1^2 x_3^2 v,$$
$$(x_0^\lambda + x_4^\lambda + x_5^\lambda)(x_0^\mu + x_2^\mu + x_6^\mu)\, x_1^2 x_3^2 v.$$

Addirt man sie zu den obigen Producten, so erhält man Ausdrücke, aus denen durch die S im Ganzen 21 entstehen, deren Summen die 2te Gruppe der Glieder obiger Producte ergeben.

So gelangt man zu den Formeln:

$$(35)\qquad P_{1,1,1}\sum p_\lambda p_\mu u_3 + P_{\lambda+1,1,1}\, P_{\mu+1,1,1}$$
$$= 2\sum p_\lambda p_\mu u_3^2 + \sum x_0^2 v (s_\lambda + x_0^\lambda - x_1^\lambda - x_3^\lambda)(s_\mu + x_0^\mu - x_1^\mu - x_3^\mu),$$

$$(36)\qquad L_0 \sum p_\lambda p_\mu v + L_0 L_\mu$$
$$= 2\sum p_\lambda p_\mu v^2 + \sum x_1^2 x_3^2 v (s_\lambda + x_0^\lambda - x_1^\lambda - x_3^\lambda)(s_\mu + x_0^\mu - x_1^\mu - x_3^\mu).$$

Hier entstehen nun rechts in der That, wie in der Ueberschrift dieses Paragraphen in Aussicht genommen wurde, bei Ausmultiplication der einzelnen Glieder Terme P und L. Ich werde die Formeln (35), (36) weiterhin dazu benutzen, um Grössen P, L mit höherem Index auf Producte niederer zurückzuführen.

§ 7.

Berechnung der G.

Die nunmehr gewonnenen Formeln gestatten uns jetzt, die G (und ebenso die noch rückständigen nicht in diese Bezeichnung eingeschlossenen P und L) als ganze Functionen der (i), $(\bar{i})$ darzustellen. Wir haben zunächst aus (35), (36):

$$P_{1,1,1}^2 = P_{2,2,2} + 2L_2,$$
$$P_{1,1,1}P_{2,1,1} = P_{3,2,2} + L_3 - 7(7),$$
$$P_{1,1,1}P_{3,1,1} = P_{4,2,2} + L_4 - 2(2)L_2 - 2L_{2,2},$$
$$P_{1,1,1}P_{4,1,1} = P_{5,2,2} + L_5 - 3(3)L_2 - L_{3,2},$$
$$P_{2,1,1}P_{3,1,1} + P_{1,1,1}(P_{4,1,1} + P_{3,2,1}) = 2P_{5,2,2} + 2P_{4,3,2} + L_5 - 2(2)L_3 + 14(72) + 3(63),$$
$$L_0^2 = \sum v^2 + 2L_{2,2},$$
$$L_0L_2 = \sum p_2v^2 - L_{4,2} - 2(2)L_{2,2} - 3(7)P_{1,1,1},$$
$$L_0L_3 = \sum p_3v^2 - L_{5,2} - 3(3)L_{2,2} - (7)P_{2,1,1},$$
$$L_0L_4 = \sum p_4v^2 - L_{6,2} + \big(-4(4) + 2(22)\big)L_{2,2} - (7)P_{3,1,1}.$$

Hiermit nun combinire ich die folgenden Formeln des § 5:

$$P_{1,1,1} = -\sqrt{2}(\bar{3}),\quad P_{2,1,1} = L_0 - (4),\quad P_{3,1,1} = \sqrt{8}(\bar{5}) + \sqrt{2}(\bar{3}2),$$
$$P_{4,1,1} = P_{2,2,2} - L_2 - (2)\big(L_0 - (4)\big) - 2(6) + \sqrt{8}(\bar{3}3),$$
$$P_{3,2,1} = -2P_{2,2,2} + L_2 - 2(6) - \sqrt{2}(\bar{3}3),$$
$$P_{4,2,2} = L_4 + L_{2,2} - 2(2)P_{2,2,2} + (2)L_2 + (4)\big(L_0 - (4)\big) - (62) + (53),$$
$$P_{4,3,2} = -2P_{5,2,2} - L_{3,2} - 2(2)P_{3,2,2} - 3(3)P_{2,2,2} + (5)\big(L_0 - (4)\big) - 6(72) + 3(63),$$
$$\sum v^2 = L_4 + L_{2,2} + (2)L_2 + (4)L_0 + (62) - (53),$$
$$\sum p_2v^2 = 2(73) - 2(64) + (55),$$

$$\sum p_3 v^2 = L_{4,3} - (3)\,L_{2,2} - (5)\,L_2 - (7)\,L_0 - 4(74) - 2(65),$$

$$\sum p_4 v^2 = \begin{cases} L_{4,4} - (2)\,L_{3,3} - (3)\,L_{3,2} - (4)\,L_{2,2} - (5)\,L_3 \\ \quad - (6)\,L_2 - \sqrt{8}(7\bar{5}) - (75) - \sqrt{2}(7\bar{3}2) \\ \quad - 2(732) - 3(66) + 2(642), \end{cases}$$

$$3L_0 = -4(\bar{4}) - (4) + (22),$$

$$5L_2 = -(2)\big(L_0 - (4)\big) - 8(\bar{6}) + 2(6) + 4(\bar{3}\bar{3}) - (33),$$

$$-6P_{3,2,2} - 5L_3 = 8\sqrt{2}(\bar{7}) + \big(6(\sqrt{2}(\bar{3}) - (3)\big)\big(L_0 - (4)\big) - 45(7),$$

$$L_5 + L_{3,2} = -(2)\,L_3 - (3)\,L_2 - (5)\,\big(L_0 - (4)\big) - 3(72),$$

$$L_{4,2} + L_{3,3} = -(2)\,L_{2,2} + (6)\,L_0 - \sqrt{8}(7\bar{3}) - 2(73) + (64),$$

$$L_{5,2} + L_{4,3} = -(2)\,L_{3,2} - (3)\,L_{2,2} + 3(7)\big(L_0 - (4)\big) + 2(65),$$

$$L_{5,3} + L_{4,4} = -(2)\,L_{3,3} + (4)\,L_{2,2} + (6)\,L_2 - \sqrt{8}(7\bar{5}) + 2(75) + \sqrt{2}(7\bar{3}2) + 3(66),$$

$$L_{6,2} = -(2)\,L_{4,2} - (3)\,L_{3,2} - 2(4)L_{2,2} - (6)\,L_2 + \sqrt{8}(7\bar{5}) - 4(75) - \sqrt{2}(7\bar{3}2).$$

Hieraus aber folgt unmittelbar für die 13 Grössen G:

$$(37)\quad \begin{cases} P_{2,2,2} = -2L_2 + 2(\bar{3}\bar{3}), \\ P_{3,2,2} = -L_3 - \sqrt{2}(\bar{3})\big(L_0 - (4)\big) + 7(7), \\ P_{5,2,2} = -L_5 + L_{3,2} + 3\big(\sqrt{2}(\bar{3}) + (3)\big)\,L_2 + \sqrt{2}(\bar{3}2)\big(L_0 - (4)\big) \\ \qquad + \sqrt{8}(6\bar{3}) - \sqrt{8}(\bar{3}\bar{3}\bar{3}) - 4(\bar{3}\bar{3}3), \\ 3L_0 = -4(\bar{4}) - (4) + (22), \\ 5L_2 = -(2)\big(L_0 - (4)\big) - 8(\bar{6}) + 2(6) + 4(\bar{3}\bar{3}) - (33), \\ L_3 = -(3)\big(L_0 - (4)\big) + 8\sqrt{2}(\bar{7}) - 3(7), \\ 7L_4 = \big(L_0 - 3(4)\big)\big(L_0 - (4)\big) - 10(2)\,L_2 + 2(62) - 12(\bar{5}\bar{3}) \\ \qquad - 2(53) + 6(\bar{3}\bar{3}2), \\ 7L_{2,2} = \big(2L_0 + (4)\big)\big(L_0 - (4)\big) + (2)\,L_2 - 3(62) + 4(\bar{5}\bar{3}) \\ \qquad + 3(53) - 2(\bar{3}\bar{3}2), \\ 7L_{3,2} = \begin{cases} -(2)\,L_3 - \big(4(\sqrt{2}(\bar{3}) - 3(3)\big)L_2 - \big(\sqrt{8}(\bar{5}) + (5)\big)\big(L_0 - (4)\big) \\ -35(72) - 8\sqrt{2}(6\bar{3}) + 9(63) + \sqrt{8}(\bar{3}\bar{3}\bar{3}) - 2(\bar{3}\bar{3}3), \end{cases} \end{cases}$$

$$
(37)\left\{\begin{aligned}
L_{4,2} &= -L_0 L_2 - 2(2)\,L_{2,2} + 3\sqrt{2}(7\bar{3}) + 2(73) - 2(64) + (55),\\
L_{3,3} &= L_0 L_2 + (2)\,L_{2,2} + (6)\,L_0 - 5\sqrt{2}(7\bar{3}) - 4(73) + 3(64) - (55),\\
2\,L_{1,3} &= L_0 L_3 - (2)\,L_{3,2} + 3(3)\,L_{2,2} + (5)\,L_2 + 5(7)\,L_0 - 2(74) + 4(65),\\
L_{4,4} &= \left\{\begin{aligned}
&L_0 L_4 - (2)\,L_{4\,2} + (2)\,L_{3,3} + \big(3(4) - 2(22)\big)\,L_{2,2} + (5)\,L_3\\
&\quad + 3(66) - 2(642) + 6\sqrt{2}(7\bar{5}) - 3(75) + \sqrt{2}\,(7\bar{3}2)\\
&\quad + 2(732).
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.
$$

Ausserdem erhält man noch diese Werthe für L_5, $L_{5,2}$, $L_{5,3}$, $\sum p_4 v^2$:

$$
(38)\left\{\begin{aligned}
7\,L_5 &= \left\{\begin{aligned}
&-6(2)\,L_3 + \big(4\sqrt{2}(\bar{3}) - 10(3)\big)\,L_2\\
&+\big(\sqrt{8}(\bar{5}) - 6(5)\big)\big(L_0 - (4)\big) + 14(72) + 8\sqrt{2}(6\bar{3})\\
&-9(63) - \sqrt{8}(\bar{3}\bar{3}\bar{3}) - 2(\bar{3}\bar{3}3),
\end{aligned}\right.\\
2\,L_{5,2} &= -L_0 L_3 - (2)\,L_{3,2} - 5(3)\,L_{2,2} - (5)\,L_2 + (7)\,L_0 - 4(74),\\
L_{5,3} &= \left\{\begin{aligned}
&-L_0 L_4 + (2)\,L_{4,2} - 2(2)\,L_{3,3} - 2\,\big((4) - (22)\big)\,L_{2,2}\\
&-(5)\,L_3 + (6)\big(L_2 + 2(42)\big) - 8\sqrt{2}(7\bar{5}) + 5(75) + 2(732),
\end{aligned}\right.\\
\sum p_4 v^2 &= L_0 L_4 + L_{6,2} + \big(4(4) - 2(22)\big)\,L_{2,2} + \sqrt{8}(7\bar{5}) + \sqrt{2}(7\bar{3}2).
\end{aligned}\right.
$$

Diese Formeln bleiben ungeändert bestehen, wenn man

$$P,\ L,\ (i),\ \overline{(i)}$$

überall durch

$$\overline{P},\ \overline{L},\ \overline{(i)},\ (i)$$

ersetzt, wir haben durch sie also unmittelbar auch die $\overline{P}$ und $\overline{L}$ berechnet.

§ 8.

Beweis, dass alle Functionen S ganze Functionen der (i), $\overline{(i)}$ sind.

Wir können den Beweis des in Aussicht genommenen Satzes: *dass alle Functionen S ganze Functionen der (i), $\overline{(i)}$ sind*, jetzt folgendermassen führen.

In § 5, (7) sind die L als ganze Functionen der (i), $\overline{(i)}$ dargestellt worden und übrigens die P durch die L und die (i). Wir wollen nun immer verwickeltere Functionen S in dieser Weise darstellen, schliesslich die allgemeinsten solcher Functionen. Die Symbole A

und H, welche ich dabei zur Bezeichnung gewisser Functionsclassen gebrauche, sind in § 2 definirt worden. Unter F verstehe ich allgemein eine ganze Function der (i), $\textcircled{i}$.

Wir erinnern uns jetzt zunächst der Formeln:

$$p_1 = x_0 + x_1 + x_3 = u_1,$$
$$p_4 = x_1 x_3 + x_3 x_0 + x_0 x_1 = u_2,$$
$$P_{1,1,1} = u_3 + x_1 x_2 x_4 + x_2 x_3 x_5 + x_3 x_4 x_6 + x_4 x_5 x_6 + x_5 x_6 x_1 + x_6 x_0 x_2,$$
$$P_{3,1,1} = \begin{cases} p_2 u_3 + x_1 x_2 x_4 (x_1^2 + x_2^2 + x_4^2) + x_2 x_3 x_5 (x_2^2 + x_3^2 + x_5^2) \\ \quad + x_3 x_4 x_6 (x_3^2 + x_4^2 + x_6^2) + x_4 x_5 x_0 (x_4^2 + x_5^2 + x_0^2) \\ \quad + x_5 x_6 x_1 (x_5^2 + x_6^2 + x_1^2) + x_6 x_0 x_2 (x_6^2 + x_0^2 + x_2^2), \end{cases}$$
$$L_0 = v + x_3 x_0 x_5 x_6 + x_4 x_1 x_6 x_0 + x_5 x_2 x_0 x_1 + x_6 x_3 x_1 x_2 + x_0 x_4 x_2 x_3 \\ + x_1 x_5 x_3 x_4,$$
$$L_2 = \begin{cases} p_2 v + x_3 x_0 x_5 x_6 (x_1^2 + x_2^2 + x_4^2) + x_4 x_1 x_6 x_0 (x_2^2 + x_3^2 + x_5^2) \\ \quad + x_5 x_2 x_0 x_1 (x_3^2 + x_4^2 + x_6^2) + x_6 x_3 x_1 x_2 (x_4^2 + x_5^2 + x_0^2) \\ \quad + x_0 x_4 x_2 x_3 (x_5^2 + x_6^2 + x_1^2) + x_1 x_5 x_3 x_4 (x_6^2 + x_0^2 + x_2^2). \end{cases}$$

Aus ihnen können wir erschliessen, dass sich die Summen:

$$(39) \qquad \begin{array}{ll} \sum A x_0, & \sum A x_1 x_3, \\ \sum A x_0 x_2 x_6, & \sum A x_0 x_2 x_6 (x_0^2 + x_2^2 + x_6^2), \\ \sum A x_1 x_3 x_2 x_6, & \sum A x_1 x_3 x_2 x_6 (x_0^2 + x_4^2 + x_5^2) \end{array}$$

als Functionen F darstellen lassen.

Das Nämliche gilt für die Summen:

$$\sum A x_0^3 x_2 x_6, \qquad \sum A x_0 H, \qquad \sum A x_1 x_3 H.$$

Denn wir haben nach § 2 die Formeln:

$$x_0^3 = A_0 + A_1 x_0 + A_2 x_1 x_3,$$
$$H = A_0 + (A_1 - x_0^2 A_2)(x_2 x_6 + x_4 x_5) \\ + A_2 \Big(x_2 x_6 (x_0^2 + x_2^2 + x_6^2) + x_4 x_5 (x_0^2 + x_4^2 + x_5^2)\Big),$$
$$H = A_0 + (A_1 - x_0^2 A_2)(x_2 x_6 + x_4 x_5) \\ + A_2 \Big(x_2 x_6 (x_0^2 + x_4^2 + x_5^2) + x_4 x_5 (x_0^2 + x_2^2 + x_6^2)\Big),$$

und also sind unsere neuen Summen lineare Verbindungen der (39). Nun erhält man überhaupt Functionen H, wenn man Producte:

$$x_2^{\lambda_2} x_4^{\lambda_4} x_5^{\lambda_5} x_6^{\lambda_6}$$

über die S''' summirt. Daher sind die Summen:

$$(40) \qquad \sum A x_0\, x_2^{\lambda_2} x_4^{\lambda_4} x_5^{\lambda_5} x_6^{\lambda_6}, \qquad \sum A x_1\, x_3\, x_2^{\lambda_2} x_4^{\lambda_4} x_5^{\lambda_5} x_6^{\lambda_6}$$

Functionen F. Weiterschliessend finden wir das Gleiche für die Summen:

$$(40\alpha) \qquad \sum A x_2^{\lambda_2} x_4^{\lambda_4} x_5^{\lambda_5} x_6^{\lambda_6},$$

welche symmetrisch in den x_2, x_4, x_5, x_6 sind, sowie für die Summen:

$$(41) \qquad \sum x_0^{\lambda_0}(x_1^{\lambda_1} x_3^{\lambda_3} + x_3^{\lambda_1} x_1^{\lambda_3})\, x_2^{\lambda_2} x_4^{\lambda_4} x_5^{\lambda_5} x_6^{\lambda_6},$$

welche Aggregate der Summen (40) sind, weil man Formeln der folgenden Art herstellen kann (§ 2, Formel (9)):

$$x_0^{\lambda_0}(x_1^{\lambda_1} x_3^{\lambda_3} + x_1^{\lambda_3} x_3^{\lambda_1}) = A_0 + A_1 x_0 + A_2 x_1 x_3.$$

Jetzt kann man vermöge der Formel:

$$2P_{1,1,1} = 2x_0(x_1x_3 + x_2x_6 + x_4x_5) + (x_1 + x_3)(x_2 + x_6)(x_4 + x_5) \\ + (x_1 - x_3)(x_2 - x_6)(x_4 - x_5)$$

die Summen:

$$(42) \qquad \sum x_0^{\lambda_0}(x_1^{\mu_1} x_3^{\mu_3} + x_3^{\mu_1} x_1^{\mu_3})(x_1 - x_3)(x_2 - x_6)(x_4 - x_5)\, x_2^{\lambda_2} x_4^{\lambda_4} x_5^{\lambda_5} x_6^{\lambda_6}$$

auf die bereits behandelten Summen zurückführen. Daher sind auch die Summen (42) Functionen F. Hieraus aber schliessen wir das Gleiche für die Summen:

$$(43) \qquad \begin{cases} \sum x_0^{\lambda_0}(x_1^{\mu_1} x_3^{\mu_3} + x_1^{\mu_3} x_3^{\mu_1})\,(x_1 - x_3)\, x_2^{\lambda_2} x_4^{\lambda_4} x_5^{\lambda_5} x_6^{\lambda_6}, \\ \sum x_0^{\lambda_0}(x_1^{\lambda_1} x_3^{\lambda_3} + x_3^{\lambda_1} x_1^{\lambda_3})\, x_2^{\lambda_2} x_4^{\lambda_4} x_5^{\lambda_5} x_6^{\lambda_6} \end{cases}$$

und also für alle Summen

$$(44) \qquad \sum x_0^{\lambda_0} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} x_3^{\lambda_3} x_4^{\lambda_4} x_5^{\lambda_5} x_6^{\lambda_6}.$$

Aus ihnen aber setzen sich die allgemeinsten Functionen S zusammen. Daher ist unser Satz bewiesen.

§ 9.

Die Grössen $C_{\lambda,\mu}$.

In § 2 bereits haben wir gewisse Grössen $C_{\lambda,\mu}$ definirt:

$$(45) \qquad C_{\lambda,\mu} = \sum x_0^{\lambda}\, \bar{x}_1^{\mu},$$

die wir bisher nicht gebraucht haben, die uns aber später nützlich sein sollen. Wir wollen daher unsere bisherigen Rechnungen benutzen, um auch diese $C_{\lambda,\mu}$ explicite durch die (i), $(\bar{i})$ darzustellen.

Wir bemerken zunächst Folgendes. Vertauscht man in den $C_{\lambda,\mu}$ die x und $\bar{x}$, so geht $C_{\lambda,\mu}$ in $C_{\mu,\lambda}$ über, mithin ist:

$$\bar{C}_{\lambda,\mu} = C_{\mu,\lambda}. \tag{46}$$

Nun war

$$\sqrt{2} \cdot \bar{x}_0 = x_0 + x_1 + x_3 = p_1.$$

Daher können wir $C_{\lambda,\mu}$ auch folgendermassen schreiben:

$$C_{\lambda,\mu} = \frac{1}{(\sqrt{2})^\mu} \cdot \sum x_0^\lambda p_1^\mu = \frac{1}{(\sqrt{2})^\mu} \cdot \sum p_\lambda \cdot p_1^\mu. \tag{47}$$

Hier haben wir für $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$:

$$\text{(49)} \quad \begin{cases} C_{0,\mu} = \bar{s}_\mu, \quad \text{also} \quad C_{\lambda,0} = s_\lambda, \\ C_{1,\mu} = \dfrac{1}{(\sqrt{2})^\mu} \cdot \sum p_1^{\mu+1} = \sqrt{2} \cdot \bar{s}_{\mu+1}, \quad \text{also} \quad C_{\lambda,1} = \sqrt{2} \,.\, s_{\lambda+1}. \end{cases}$$

Ferner ergeben die Formeln:

$$f(x_0) = 0, \qquad \frac{f(x_0) - (7)}{x_0} = x_1 x_3 \cdot v$$

die folgenden Beziehungen für die $C_{\lambda,\mu}$:

$$\text{(50)} \quad \begin{cases} C_{\lambda+7,\mu} + (2)\, C_{\lambda+5,\mu} + (3)\, C_{\lambda+4,\mu} + (4)\, C_{\lambda+3,\mu} + (5)\, C_{\lambda+2,\mu} \\ \qquad\qquad + (6)\, C_{\lambda+1,\mu} + (7)\, C_{\lambda,\mu} = 0, \\ C_{0,\mu} + (2)\, C_{4,\mu} + (3)\, C_{3,\mu} + (4)\, C_{2,\mu} + (5)\, C_{1,\mu} + (6)\, C_{0,\mu} \\ \qquad\qquad = \dfrac{1}{\sqrt{2}^\mu} \sum p_1^\mu p_{11}\, v. \end{cases}$$

Um jetzt weitere Relationen zwischen den C zu erhalten, gehen wir von der Formel aus:

$$p_1 - x_0 = x_1 + x_3.$$

Aus ihr folgt zunächst diese:

$$\sum (p_1 - x_0)^\nu = \sum (x_1 + x_3)^\nu,$$

oder ausgeführt:

$$\sum \Big\{ p_1^\nu - \binom{\nu}{1} p_1^{\nu-1} x_0 + \binom{\nu}{2} p_1^{\nu-2} x_0^2 + \cdots + (-1)^{\nu-2} \binom{\nu}{2} p_1^2 x_0^{\nu-2}$$
$$+ (-1)^{\nu-1} \binom{\nu}{1} p_1 x_0^{\nu-1} + (-1)^\nu x_0^\nu \Big\}$$
$$= \sum \Big\{ 2p_\nu + \binom{\nu}{1} p_{\nu-1,1} + \binom{\nu}{2} p_{\nu-2,2} \cdots \Big\},$$

$$3\sqrt{2}^{\nu}\,\bar{s}_\nu - \binom{\nu}{1}\sqrt{2}^{\nu-1}\,C_{1,\nu-1} + \binom{\nu}{2}\sqrt{2}^{\nu-2}\,C_{2,\nu-2}\cdots(-1)^{\nu-2}\,2\,C_{\nu-2,2}$$
$$+(-1)^{\nu-1}\binom{\nu}{1}\sqrt{2}\,C_{\nu-1,1} + 3(-1)^\nu s_\nu$$
$$= \left\{6 - \binom{\nu}{1} - \binom{\nu}{2}\cdots\right\} s_\nu + \binom{\nu}{2} s_2 s_{\nu-2} + \binom{\nu}{3} s_3 s_{\nu-3}\cdots,$$

$$\sqrt{2}^{\nu}\left(3 - \binom{\nu}{1}\right)\bar{s}_\nu + \binom{\nu}{2}\sqrt{2}^{\nu-2}\,C_{2,\nu-2}\cdots 2(-1)^{\nu-2}\,C_{\nu-2,2}$$
$$= \left\{-2\binom{\nu}{1}(-1)^{\nu-1} - 3(-1)^\nu + 7 - 2^{\nu-1}\cdots\right\} s_\nu + \binom{\nu}{2} s_2 s_{\nu-2}$$
$$+\binom{\nu}{3} s_3 s_{\nu-3}\cdots.$$

$$\left(\text{Das letzte Glied ist } \binom{\nu}{\frac{\nu-1}{2}} s_{\frac{\nu-1}{2}} s_{\frac{\nu+1}{2}} \text{ oder } \frac{1}{2}\binom{\nu}{\frac{\nu}{2}} s^2_{\frac{\nu}{2}}\right).$$

Trägt man hier für ν die Werthe $4, 5, \ldots, 10$ ein, so wird:

$$(51)\left\{\begin{aligned}
&3\,C_{2,2} = \bar{s}_4 + s_4 + 3(22),\\
&10(\sqrt{2}\,C_{2,3} - C_{3,2}) = 4\sqrt{2}\,\bar{s}_5 - 8s_5 + 5s_2s_3,\\
&60\,C_{2,4} - 40\sqrt{2}\,C_{3,3} + 30\,C_{2,4} = 24\,\bar{s}_6 - 16s_6 + 15s_2s_4 + 10s_3^2,\\
&84\sqrt{2}\,C_{2,5} - 140\,C_{3,4} + 70\sqrt{2}\,C_{4,3} - 42\,C_{5,2} = 32\sqrt{2}\,\bar{s}_7 - 68s_7\\
&\qquad + 21s_2s_5 + 35s_3s_4,\\
&224\,C_{2,6} - 224\sqrt{2}\,C_{3,5} + 280\,C_{4,4} - 112\sqrt{2}\,C_{5,3} + 56\,C_{6,2}\\
&\qquad = 80\bar{s}_8 - 108\,s_8 + 28\,s_2s_6 + 56\,s_3s_5 + 35\,s_4^2,\\
&288\sqrt{2}\,C_{2,7} - 672\,C_{3,6} + 504\sqrt{2}\,C_{4,5} - 504\,C_{5,4} + 168\sqrt{2}\,C_{6,3}\\
&\qquad - 72\,C_{7,2}\\
&= 96\sqrt{2}\,\bar{s}_9 - 264\,s_9 + 36\,s_2s_7 + 84\,s_3s_6 + 126\,s_4s_5,\\
&720\,C_{2,8} - 960\sqrt{2}\,C_{3,7} + 1680\,C_{4,6} - 1008\sqrt{2}\,C_{5,5} + 840\,C_{6,4}\\
&\qquad - 240\sqrt{2}\,C_{7,3} + 90\,C_{8,2}\\
&= 224\bar{s}_{10} - 488s_{10} + 45s_2s_8 + 120s_3s_7 + 210s_4s_6 + 126s_5^2.
\end{aligned}\right.$$

Ersetzt man in den 6 letzten dieser Formeln die $C_{\lambda,\mu}$, s, $\bar{s}$ durch die $\overline{C}_{\lambda,\mu} = C_{\mu,\lambda}$, $\bar{s}$, s, so gehen sie in diese über:

$$
(52)\left\{\begin{aligned}
&10(\sqrt{2}\,C_{3,2} - C_{2,3}) = 4\sqrt{2}\,s_5 - 8\bar{s}_5 + 5 s_2 \bar{s}_3,\\
&60 C_{4,2} - 40\sqrt{2}\,C_{3,3} + 30 C_{2,4} = 24 s_6 - 16\,\bar{s}_6 + 15 s_2 \bar{s}_4 + 10 \bar{s}_3^{\,2},\\
&84\sqrt{2}\,C_{5,2} - 140 C_{4,3} + 70\sqrt{2}\,C_{3,4} - 42 C_{2,5}\\
&\qquad\qquad = 32\sqrt{2}\,s_7 - 68\,\bar{s}_7 + 21 s_2 \bar{s}_5 + 35 \bar{s}_3 \bar{s}_4,\\
&224 C_{6,2} - 224\sqrt{2}\,C_{5,3} + 280\,C_{4,4} - 112\sqrt{2}\,C_{3,5} + 56 C_{2,6}\\
&\qquad\qquad = 80 s_8 - 108 \bar{s}_8 + 28 s_2 \bar{s}_6 + 56 \bar{s}_3 \bar{s}_5 + 35 \bar{s}_4^{\,2},\\
&288\sqrt{2}\,C_{7,2} - 672 C_{6,3} + 504\sqrt{2}\,C_{5,4} - 504 C_{4,5} + 168\sqrt{2}\,C_{3,6} - 72 C_{2,7}\\
&\qquad\qquad = 96\sqrt{2}\,s_9 - 264\bar{s}_9 + 36 s_2 \bar{s}_7 + 84 \bar{s}_3 \bar{s}_6 + 126 \bar{s}_4 \bar{s}_5,\\
&720\,C_{8,2} - 960\sqrt{2}\,C_{7,2} + 1680 C_{6,4} - 1008\sqrt{2}\,C_{5,5} + 840 C_{4,6}\\
&\qquad\qquad - 240\,\sqrt{2}\,C_{3,7} + 90\,C_{2,8}\\
&= 224 s_{10} - 488 \bar{s}_{10} + 45 s_2 \bar{s}_8 + 120 \bar{s}_3 \bar{s}_7 + 210 \bar{s}_4 \bar{s}_6 + 126 \bar{s}_5^{\,2},
\end{aligned}\right.
$$

Diese Formeln reichen hin, um alle C durch die:

$$(i),\ (\bar{i}),\ P,\ L,\ \bar{P},\ \bar{L}$$

auszudrücken.

Um nämlich die $C_{\lambda,\mu}$ zu berechnen, bei denen $\lambda > 6$ ist, benutzen wir die Formeln (50), und in analoger Weise die entsprechenden Formeln, falls $\mu > 6$ sein sollte.

Die $C_{0,\mu}$ und $C_{\lambda,0}$, sowie die $C_{1,\mu}$ und $C_{\lambda,1}$ berechnet man aus (49).

Um die

$$C_{2,2},\ C_{3,2},\ C_{4,2},\ C_{5,2},\ C_{6,2},\ C_{3,3},\ C_{4,3},\ C_{5,3}$$

zu bestimmen, bediene ich mich der Formel (47). Die

$$C_{2,3},\ C_{2,4},\ C_{2,5},\ C_{2,6},\ C_{3,4},\ C_{3,5}$$

folgen dann aus (46).

Endlich werden die

$$C_{4,4},\ C_{4,5},\ C_{5,4},\ C_{5,5}$$

aus (51), (52), die

$$C_{6,\mu},\ C_{\lambda,6}$$

aus (50) bestimmt [immer in Verbindung mit (46)].

Ich stelle die solchergestalt resultirenden Werthe der $C_{\lambda,\mu}$ in nachstehender Tabelle zusammen:

Tabelle der $C_{\lambda,\mu}$.

$C_{1,0} = 0$; $C_{2,0} = s_2$; $C_{3,0} = s_3$; $C_{4,0} = s_4$; $C_{5,0} = s_5$; $C_{6,0} = s_6$;

$C_{0,1} = 0$; $C_{0,2} = s_2$; $C_{0,3} = \bar{s}_3$; $C_{0,4} = \bar{s}_4$; $C_{0,5} = \bar{s}_5$; $C_{0,6} = \bar{s}_6$.

$$C_{1,1}=\sqrt{2}\,s_3;\ C_{2,1}=\sqrt{2}\,s_3;\ C_{3,1}=\sqrt{2}\,s_4;\ C_{4,1}=\sqrt{2}\,s_5;\ C_{5,1}=\sqrt{2}\,s_6;$$
$$C_{6,1}=\sqrt{2}\,s_7;$$
$$C_{1,2}=\sqrt{2}\,\bar{s}_3;\ C_{1,3}=\sqrt{2}\,\bar{s}_4;\ C_{1,4}=\sqrt{2}\,\bar{s}_5;\ C_{1,5}=\sqrt{2}\,\bar{s}_6;\ C_{1,6}=\sqrt{2}\,\bar{s}_7;$$

$$C_{2,2}=\frac{1}{2}s_2^2+P_{2,1,1};\ C_{3,2}=\frac{1}{2}s_2s_3+P_{3,1,1};\ C_{4,2}=\frac{1}{2}s_2s_4+P_{4,1,1};$$
$$C_{5,2}=\frac{1}{2}s_2s_5+P_{5,1,1};\ C_{6,2}=\frac{1}{2}s_2s_6+P_{6,1,1};$$
$$\sqrt{8}\,C_{3,3}=-4s_6+3s_2s_4+s_3^2+6P_{4,1,1}+3P_{3,2,1};$$
$$\sqrt{8}\,C_{4,3}=-4s_7+3s_2s_5+s_3s_4+6P_{5,1,1}+3P_{4,2,1};$$
$$\sqrt{8}\,C_{5,3}=-4s_8+3s_2s_6+s_3s_5+6P_{6,1,1}+3P_{5,2,1};$$
$$C_{2,3}=\frac{1}{2}s_2\bar{s}_3+\bar{P}_{3,1,1};\ C_{2,4}=\frac{1}{2}s_2\bar{s}_4+\bar{P}_{4,1,1};$$
$$C_{2,5}=\frac{1}{2}s_2\bar{s}_5+\bar{P}_{5,1,1};\ C_{2,6}=\frac{1}{2}s_2\bar{s}_6+\bar{P}_{6,1,1};$$
$$\sqrt{8}\,C_{3,4}=-4\bar{s}_7+3s_2\bar{s}_5+\bar{s}_3\bar{s}_4+6\bar{P}_{5,1,1}+3\bar{P}_{4,2,1};$$
$$\sqrt{8}\,C_{3,5}=-4\bar{s}_8+3s_2\bar{s}_6+\bar{s}_3\bar{s}_5+6\bar{P}_{6,1,1}+3\bar{P}_{5,2,1}.$$

$$280\,C_{4,4}=\begin{cases}-224\,C_{2,6}+224\sqrt{2}\,C_{3,5}+112\sqrt{2}\,C_{5,3}-56\,C_{6,2}\\ +80\,\bar{s}_8-108\,s_8+28\,s_2s_6+56\,s_3s_5+35\,s_4^2.\end{cases}$$

$$-C_{7,2}=(2)\,C_{5,2}+(3)\,C_{4,2}+(4)\,C_{3,2}+(5)\,C_{2,2}+(6)\,C_{1,2}+3(7)\,C_{0,2};$$
$$-C_{2,7}=(2)\,C_{2,5}+(\bar{3})\,C_{3,4}+(\bar{4})\,C_{2,3}+(\bar{5})\,C_{2,2}+(\bar{6})\,C_{2,1}+3(\bar{7})\,C_{2,0}.$$

$$C_{6,3}=-(2)\,C_{4,3}-(3)\,C_{3,3}-(4)\,C_{2,3}-\sqrt{2}\,(5)\,\bar{s}_4-3(6)\,\bar{s}_3$$
$$\frac{3}{\sqrt{8}}L_{3,2}+7\sqrt{2}\,(72)-\frac{3}{\sqrt{8}}(63);$$
$$C_{3,6}=-(2)\,C_{3,4}-(\bar{3})\,C_{3,3}-(\bar{4})\,C_{3,2}-\sqrt{2}\,(\bar{5})\,s_4-3(\bar{6})\,s_3$$
$$+\frac{3}{\sqrt{8}}\bar{L}_{3,2}+7\sqrt{2}\,(\bar{7}2)-\frac{3}{\sqrt{8}}(6\bar{3}).$$

$$84\,C_{5,4}=\begin{cases}-36\sqrt{2}\,C_{2,7}+56\,C_{3,6}+84\sqrt{2}\,C_{6,3}-84\,C_{7,2}-28\bar{s}_9-12s_9,\\ +6\sqrt{2}\,\bar{s}_2\bar{s}_7+14\sqrt{2}\,\bar{s}_3\bar{s}_6+21\sqrt{2}\,\bar{s}_4\bar{s}_5+6s_2s_7+14s_3s_6+21s_4s_5;\end{cases}$$

$$84\,C_{4,5}=\begin{cases}-36\sqrt{2}\,C_{7,2}+56\,C_{6,3}+84\sqrt{2}\,C_{3,6}-84\,C_{2,7}-28s_9-12\bar{s}_9\\ +6\sqrt{2}\,s_2s_7+14\sqrt{2}\,s_3s_6+21\sqrt{2}\,s_4s_5+6s_2\bar{s}_7\\ \qquad\qquad +14\bar{s}_3\bar{s}_6+21\bar{s}_4\bar{s}_5.\end{cases}$$

$$-C_{8,2}=(2)\,C_{6,2}+(3)\,C_{5,2}+(4)\,C_{4,2}+(5)\,C_{3,2}+(6)\,C_{2,2}+(7)\,C_{1,2};$$

$$-C_{2,8}=(2)\,C_{2,6}+(\bar{3})\,C_{2,5}+(\bar{4})\,C_{2,4}+(\bar{5})\,C_{2,3}+(\bar{6})\,C_{2,2}+(\bar{7})\,C_{2,1};$$

$$-C_{7,3}=(2)\,C_{5,3}+(3)\,C_{4,3}+(4)\,C_{3,3}+(5)\,C_{2,3}+(6)\,C_{1,3}+(7)\,C_{0,3};$$

$$-C_{3,7}=(2)\,C_{3,5}+(\bar{3})\,C_{3,4}+(\bar{4})\,C_{3,3}+(\bar{5})\,C_{3,2}+(\bar{6})\,C_{3,1}+(\bar{7})\,C_{3,0}.$$

$$C_{6,4}=\begin{cases}-(2)\,C_{4,4}-(3)\,C_{3,4}-(4)\,C_{2,4}-\sqrt{2}\,(5)\,\bar{s}_5-3(6)\,\bar{s}_4\\ +L_{4,2}+\frac{3}{2}L_{3,3}+\frac{1}{4}(6)\,s_4+9\sqrt{2}\,(7\bar{3})+3(73);\end{cases}$$

$$C_{4,6}=\begin{cases}-(2)\,C_{4,4}-(\bar{3})\,C_{4,3}-(\bar{4})\,C_{4,2}-\sqrt{2}\,(\bar{5})\,s_5-3(\bar{6})\,s_4\\ +\bar{L}_{4,2}+\frac{3}{2}\bar{L}_{3,3}+\frac{1}{4}(\bar{6})\,\bar{s}_4+9\sqrt{2}\,(\bar{7}3)+3(\bar{7}\bar{3}).\end{cases}$$

$$1008\sqrt{2}\,C_{5,5}=\begin{cases}720\,C_{2,8}-960\sqrt{2}\,C_{3,7}+1680\,C_{4,6}+840\,C_{6,4}\\ -240\sqrt{2}\,C_{7,3}+90\,C_{8,2}-224\bar{s}_{10}+488s_{10}-45s_2s_8\\ -120s_3s_7-210s_4s_6-126s_5^2.\end{cases}$$

$$C_{6,5}=\begin{cases}-(2)\,C_{4,5}-(3)\,C_{3,5}-(4)\,C_{2,5}-\sqrt{2}\,(5)\,\bar{s}_6-3(6)\,\bar{s}_5\\ +\frac{5}{4\sqrt{2}}L_{5,2}+\frac{5}{\sqrt{8}}L_{4,3}+\frac{1}{4\sqrt{2}}(6)\,s_5-10\sqrt{2}\,(7)\big(L_0-(4)\big)\\ +\frac{7}{\sqrt{2}}(7)\,s_4-\frac{25}{\sqrt{2}}(722);\end{cases}$$

$$C_{5,6}=\begin{cases}-(2)\,C_{5,4}-(\bar{3})\,C_{5,3}-(\bar{4})\,C_{5,2}-\sqrt{2}\,(\bar{5})\,\bar{s}_6-3(\bar{6})\,s_5\\ +\frac{5}{4\sqrt{2}}\bar{L}_{5,2}+\frac{5}{\sqrt{8}}\bar{L}_{4,3}+\frac{1}{4\sqrt{2}}(\bar{6})\,\bar{s}_5-10\sqrt{2}\,(\bar{7})\big(\bar{L}_0-(\bar{4})\big)\\ +\frac{7}{\sqrt{2}}(\bar{7})\,\bar{s}_4-\frac{25}{\sqrt{2}}(\bar{7}22).\end{cases}$$

$$C_{6,6}=\begin{cases}-(2)C_{4,6}-(3)C_{3,6}-(4)C_{2,6}+\frac{15}{8}L_{5,3}+\frac{5}{2}L_{4,4}\\ -\sqrt{2}(5)\bar{s}_7-3(6)\bar{s}_6+\frac{3}{4}L_{6,2}+\frac{1}{8}(6)s_6+15\sqrt{2}(7\bar{5})\\ -15(75)-\frac{75}{\sqrt{8}}(7\bar{3}2)-\frac{15}{4}(732).\end{cases}$$

Die P, L, $\overline{P}$, $\overline{L}$, welche hier vorkommen, hat man sich natürlich durch ihre Ausdrücke in den (i), $(\bar{i})$ ersetzt zu denken.

§ 10.

Relationen zwischen den Coefficienten (i), $(\bar{i})$.

Wir haben in den früheren Paragraphen alle Mittel gewonnen, um nun auch alle zwischen den Coefficienten (i), $(\bar{i})$ bestehenden Relationen aufzustellen. Da die Zahl der linear unabhängigen x sechs beträgt und $(2)=(\bar{2})$ ist, so wird es fünf unabhängige derartige Relationen geben. Damit ist natürlich nicht gesagt, dass die fünf Relationen, welche ich im Folgenden ableite, für sich genommen die Abhängigkeit zwischen den (i), $(\bar{i})$ *rein* darstellen. Aber sie genügen für den Zweck, zu dem wir sie im folgenden Abschnitte gebrauchen werden. Uebrigens kann man alle anderen existirenden Relationen genau auf dem hier eingeschlagenen Wege auffinden, womit allerdings die gegenseitige Abhängigkeit dieser Relationen noch nicht klargestellt ist.

Ausser den Formeln, welche wir in § 7 aus (35), (36) abgeleitet haben, bilden wir uns hier aus ihnen die folgenden Formeln:

$$0=-P_{1,1,1}P_{5,1,1}+P_{6,2,2}+L_6-L_{4,2}-\big(4(4)-2(22)\big)L_2,$$

$$0=\begin{cases}-P^2_{3,1,1}-P_{1,1,1}(P_{5,1,1}+2P_{3,3,1})+2P_{6,2,2}+4P_{4,4,2}+L_6-L_{4,2}\\ -4(2)L_4+8(2)L_{2,2}+4(22)L_2-6(7)P_{1,1,1},\end{cases}$$

$$0=-P_{1,1,1}P_{6,1,1}+P_{7,2,2}+L_7-L_{5,2}-5\big((5)-(32)\big)L_2,$$

$$0=\begin{cases}-P_{3,1,1}P_{4,1,1}-P_{1,1,1}(P_{6,1,1}+P_{4,3,2})+2P_{7,2,2}+2P_{5,4,2}+L_7-L_{4,3}\\ -2(2)L_5+2(2)L_{3,2}-3(3)L_4+6(3)L_{2,2}+6(32L_2-2(7)P_{2,1,1},\end{cases}$$

$$0=\begin{cases}2\sum p_4v^2+4\sum p_{22}v^2+L_{6,2}+2L_{4,4}+4(2)L_{4,2}\\ -L_2{}^2-L_0L_4-2L_0L_{2,2}+4(22)L_{2,2}+3(7)P_{3,1,1}+6(72)P_{1,1,1}.\end{cases}$$

Es gilt jetzt nur noch, dieselben zu transformiren. Hierzu benutzen wir eine grosse Anzahl von Formeln der § 5, 6, die ich folgendermassen zusammenstelle:

I.

$$-P_{1,1,1}P_{5,1,1}=\sqrt{2}(\bar{3})\Big\{-L_3-\big(\sqrt{2}(\bar{3})+(3)\big)\big(L_0-(4)\big)+7(7)$$
$$-\sqrt{8}(\bar{5}2)+\sqrt{8}(4\bar{3})-\sqrt{2}(\bar{3}22)\Big\},$$

$$P_{6,2,2}-L_{3,3}=\begin{cases}(2)L_4-2(2)L_{2,2}+(3)L_3+\big(6(4)-2(22)\big)L_2\\ +\sqrt{2}(\bar{3}3)\big(L_0-(4)\big)-7(73)-2(64)-(622)\\ +\sqrt{8}(\bar{5}5)+2(55)+4(\bar{5}\bar{3}2)-6(4\bar{3}\bar{3})+2(\bar{3}\bar{3}22),\end{cases}$$

$$L_6=-(2)L_4-(3)L_3-(4)L_2+\sqrt{2}(7\bar{3})-(73)+(55)-2(6)L_0,$$

$$L_{3,3}=L_0L_2+(2)L_{2,2}+(6)L_0-5\sqrt{2}(7\bar{3})-4(73)$$
$$+3(64)-(55),$$

$$-L_{4,2}=L_0L_2+2(2)L_{2,2}-3\sqrt{2}(7\bar{3})-2(73)+2(64)-(55).$$

II.

$$-P^2_{3,1,1}=-8(\bar{5}\bar{5})-8(\bar{5}\bar{3}2)-2(\bar{3}\bar{3}22),$$

$$-P_{1,1,1}(P_{5,1,1}+2P_{3,3,1})=\sqrt{2}(\bar{3})\Big\{L_3-\big(\sqrt{2}(\bar{3})-(3)\big)\big(L_0-(4)\big)+7(7)$$
$$-6\sqrt{2}(\bar{5}2)-\sqrt{2}(\bar{3}22)\Big\},$$

$$2(P_{6,2,2}-L_{3,3})=\begin{cases}2(2)L_4-4(2)L_{2,2}+2(3)L_3+2\big(6(4)-2(22)\big)L_2\\ +\sqrt{8}(\bar{3}3)\big(L_0-(4)\big)-14(73)-4(64)-2(622)\\ +4\sqrt{2}(\bar{5}5)+4(55)+8(\bar{5}\bar{3}2)-12(4\bar{3}\bar{3})+4(\bar{3}\bar{3}22),\end{cases}$$

$$4(P_{4,4,2}-L_{4,2})=\begin{cases}4(2)L_4-4(2)L_{2,2}-4(3)L_3-8(4)L_2\\ -\big(4(6)+4\sqrt{2}(\bar{3}3)\big)\big(L_0-(4)\big)+8\sqrt{2}(7\bar{3})+52(73)\\ -16(64)+4(622)-8\sqrt{2}(\bar{5}5)+16(\bar{5}\bar{3}2)+8(4\bar{3}\bar{3}),\end{cases}$$

$$L_6=-(2)L_4-(3)L_3-(4)L_2-2(6)L_0$$
$$+\sqrt{2}(7\bar{3})-(73)+(55),$$

$$3L_{4,2}=-3L_0L_2-6(2)L_{22}+9\sqrt{2}(7\bar{3})+6(73)$$
$$-6(64)+3(55),$$

$$2L_{3,3}=2L_0L_2+2(2)L_{2,2}+2(6)L_0-10\sqrt{2}(7\bar{3})$$
$$-8(73)+6(64)-2(55).$$

III.

$$-2P_{1,1,1}P_{6,1,1}=\sqrt{8}(\bar{3})\Big(L_{2,2}+3(2)L_2+\big((22)-(4)\big)\big(L_0-(4)\big)+(62)$$
$$-\sqrt{8}(\bar{5}3)+3\sqrt{2}(5\bar{3})-2(\bar{3}\bar{3}2)-3\sqrt{2}(\bar{3}32)\Big),$$

$$2P_{7,2,2}=\begin{cases}2(2)L_5-2(2)L_{3,2}+2(3)L_4-4(3)L_{2,2}+2(4)L_3\\ +\big(12(5)-6\sqrt{2}(\bar{3}2)-10(32)\big)L_2\\ +\sqrt{8}(\bar{3})\big((4)-(22)\big)\big(L_0-(4)\big)-18(74)-2(722)\\ +4\sqrt{2}(6\bar{5})+4(65)-4\sqrt{2}(6\bar{3}2)+8(5\bar{3}3)\\ -12(5\bar{3}\bar{3})+4\sqrt{2}(\bar{3}\bar{3}\bar{3}2)+12(\bar{3}\bar{3}32),\end{cases}$$

$$2L_7=-2(2)L_5-2(3)L_4-2(4)L_3-2(5)L_2$$
$$-6(7)\big(L_0-(4)\big)+2(65)-6(74)$$

$$-2L_{5,2}=L_0L_3+(2)L_{3,2}+5(3)L_{2,2}+(5)L_2$$
$$-(7)\big(L_0-(4)\big)+3(74).$$

IV.

$$-2P_{3,1,1}P_{4,1,1}=2\big(\sqrt{8}(\bar{5})+\sqrt{2}(\bar{3}2)\big)\Big(3L_2+(2)\big(L_0-(4)\big)$$
$$+2(6)-2(\bar{3}\bar{3})-\sqrt{8}(\bar{3}3)\Big),$$

$$-2P_{1,1,1}(P_{6,1,1}+P_{4,3,1})=\sqrt{8}(\bar{3})\Big\{-L_4+2L_{2,2}+(2)L_2+(22)\big(L_0-(4)\big)$$
$$+6(62)-4(\bar{5}\bar{3})-4\sqrt{2}(\bar{5}3)+\sqrt{2}(5\bar{3})-2(53)-3\sqrt{2}(\bar{3}32)\Big\},$$

$$4P_{7,2,2}=\begin{cases}4(2)L_5-4(2)L_{3,2}+4(3)L_4-8(3)L_{2,2}+4(4)L_3\\ \qquad +\big(24(5)-12\sqrt{2}(\bar{3}2)-20(32)\big)L_2\\ +4\sqrt{2}(\bar{3})\big((4)-(22)\big)\big(L_0-(4)\big)-36(74)\\ \qquad -4(722)+8\sqrt{2}(6\bar{5})+8(65)-8\sqrt{2}(6\bar{3}2)\\ +16(5\bar{3}3)-24(5\bar{3}\bar{3})+8\sqrt{2}(\bar{3}\bar{3}\bar{3}2)\\ \qquad +24(\bar{3}\bar{3}32),\end{cases}$$

$$4\,P_{5,4,2}+4\,L_{4,3}=\begin{cases}4(3)\,L_4-4(3)\,L_{2,2}-8(4)\,L_3-4(5)\,L_2\\ +\big(4(7)-8\sqrt{2}\,(4\bar{3})\big)\big(L_0-(4)\big)+72(74)\\ +8\,(722)-16\sqrt{2}(6\bar{5})-4(65)+16(\bar{5}\bar{3}3)\\ +8(5\bar{3}\bar{3}),\end{cases}$$

$$2\,L_7=-2(2)\,L_5-2(3)\,L_4-2(4)\,L_3-2(5)\,L_2$$
$$-6(7)\,\big(L_0-(4)\big)-6(74)+2(65),$$

$$-6\,L_{4,3}=-3\,L_0\,L_3+3(2)\,L_{3,2}-9(3)\,L_{2,2}-3(5)\,L_2$$
$$-15(7)\big(L_0-(4)\big)-9(74)-12(65).$$

V.

$$2\Big(\sum p_4 v^2-L_{6,2}\Big)=2\,L_0\,L_4+\big(8(4)-4(22)\big)\,L_{2,2}+4\sqrt{2}(7\bar{5})$$
$$+\sqrt{8}(7\bar{3}2),$$

$$4\sum p_{22}\,v^2=-24(75)+12(66),$$

$$2\,L_{4,4}+2(2)\,L_{4,2}-2(2)\,L_{3,3}=\begin{cases}2\,L_0\,L_4+\big(6(4)-4(22)\big)\,L_{2,2}+2(5)\,L_3\\ +12\sqrt{2}(7\bar{5})-6(75)+\sqrt{8}(7\bar{3}2)\\ +4(732)+6(66)-4(642),\end{cases}$$

$$3\big(L_{6,2}+(2)\,L_{4,2}\big)=-3(3)\,L_{3,2}-6(4)\,L_{2,2}-3(6)\,L_2$$
$$+6\sqrt{2}(7\bar{5})-12(75)-3\sqrt{2}(7\bar{3}2),$$

$$-(2)\,L_{4,2}=(2)\,L_0\,L_2+2(22)\,L_{2,2}-3\sqrt{2}(7\bar{3}2)$$
$$-2(732)+2(642)-(552),$$

$$2(2)\,L_{3,3}=2(2)\,L_0\,L_2+2(22)\,L_{2,2}+2(62)\,L_0$$
$$-10\sqrt{2}(7\bar{3}2)-8(732)+6(642)-2(552).$$

Auf solche Weise finden wir:

$$(53)\qquad 0=\begin{cases}2\,L_0\,L_2+(2)\,L_{2,2}-\sqrt{2}(\bar{3})\,L_3+(4)L_2-\big((6)+2(\bar{3}\bar{3})\big)\big(L_0-(4)\big)\\ -14(73)+2(64)-(622)+\sqrt{8}(\bar{5}5)+(55)-2(4\bar{3}\bar{3}),\end{cases}$$

$$(54)\qquad 0=\begin{cases}-L_0\,L_2+(2)\,L_4+\big(\sqrt{2}(\bar{3})-3(3)\big)L_3-4(2)\,L_{2,2}+3(4)\,L_2\\ -\big(4(6)+2(\bar{3}\bar{3})+\sqrt{2}(\bar{3}3)\big)\big(L_0-(4)\big)+21\sqrt{2}(7\bar{3})\\ +35(73)-20(64)+2(622)-8(\bar{5}\bar{5})-4\sqrt{2}(\bar{5}5)+6(55)\\ +4(\bar{5}\bar{3}2)-4(4\bar{3}\bar{3}),\end{cases}$$

$$(55)\quad 0=\begin{cases} L_0 L_3-(2)L_{3,2}+\big(\sqrt{8}(\bar{3})+(3)\big)L_{2,2}+(5)L_2-7(7)L_0-14(74)\\ -2(722)+4\sqrt{2}(6\bar{5})+6(65)-\sqrt{8}(6\bar{3}2), \end{cases}$$

$$(56)\quad 0=\begin{cases} -3L_0L_3-2(2)L_5+3(2)L_{3,2}-\sqrt{8}(\bar{3})L_4\\ +\big(4\sqrt{2}(\bar{3})-9(3)\big)L_{2,2}-6(4)L_3\\ +\big(-21(7)+4\sqrt{2}(\bar{5}2)-4\sqrt{2}(4\bar{3})\big)\big(L_0-(4)\big)\\ +\big(12\sqrt{2}(\bar{5})+15(5)-4\sqrt{2}(\bar{3}2)-8(32)\big)L_2+21(74)\\ +4(722)-6(65)+8\sqrt{2}(6\bar{3}2)-16\sqrt{2}(\bar{5}\bar{3}\bar{3})-12(5\bar{3}\bar{3})\\ -4\sqrt{2}(5\bar{3}3)+4\sqrt{2}(\bar{3}\bar{3}\bar{3}2)+4(\bar{3}\bar{3}32), \end{cases}$$

$$(57)\quad 0=\begin{cases} -L_2^2+3L_0L_4-2L_0L_{2,2}+3(2)L_0L_2+8(4)L_{2,2}-3(3)L_{3,2}\\ +2(5)L_3-3(6)L_2+2(62)L_0+28\sqrt{2}(7\bar{5})-42(75)\\ -12\sqrt{2}(7\bar{3}2)-6(732)+18(66)-3(552)+4(642), \end{cases}$$

wo wir uns für die L nun noch die früheren Werthe eingetragen denken müssen.

Dies sind die fünf Relationen, welche ich in Aussicht nahm. Dieselben gestatten (nämlich die vier ersten derselben), die Coefficienten (6), $(\bar{6})$, (7), $(\bar{7})$ rational durch die anderen zu berechnen. Tragen wir die entstehenden Werthe in die letzte Relation (57) ein, so erhalten wir eine Gleichung, die in (5) und $(\bar{5})$ bis zum sechsten Grade aufsteigt. *Hiermit sind die bezüglichen Angaben der Einleitung aufs Neue vollständig bewiesen.*

Abschnitt II.

Die Normalformen unserer Gleichungen 7^{ten} Grades.

§ 1.

Die Klein'sche Gleichung siebenten Grades.

Bereits in der Einleitung wurde der ausgezeichneten Gleichungen siebenten Grades gedacht, welche Herr Klein in seinen hierher gehörigen Untersuchungen aufgestellt hat. Betrachten wir insbesondere den speciellen Fall, den wir als *kanonischen* bezeichnen wollten, so lauteten dieselben [Formel (8) der Einleitung]:

$$(1)\quad \begin{cases} x^7+7\cdot\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}\cdot\nabla\cdot x^4-7\cdot\frac{5+\sqrt{-7}}{2}\cdot\nabla^2\cdot x-C=0,\\ \bar{x}^7+7\cdot\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}\cdot\nabla\cdot\bar{x}^4-7\cdot\frac{5-\sqrt{-7}}{2}\cdot\nabla^2\cdot\bar{x}-C=0.\end{cases}$$

Hier ist also $(2)=(\bar{2})=0$, $(4)=0$, $(\bar{4})=0$, $(5)=0$, $(\bar{5})=0$, während (3), $(\bar{3})$, (6), $(\bar{6})$, (7), $(\bar{7})$ in charakteristischer Weise an einander gebunden erscheinen. *Ich will hier zeigen, dass wir genau zu diesen Gleichungen kommen können, wenn wir für's Erste nun* $(2)=0$, $(4)=0$, $(5)=0$ *setzen und dann von den eben aufgestellten fünf Relationen zwischen den* (i), $(\bar{i})$ *Gebrauch machen.*

Es sei also:

$$(2)\qquad (2)=0,\ (4)=0,\ (5)=0.$$

Die Relationen (53)—(57) des vorigen Abschnitts nehmen dann zunächst folgende Gestalt an:

$$(3)\quad 0=2L_0L_2-\sqrt{2}(\bar{3})L_3-\big((6)+2(\bar{3}\bar{3})\big)L_0-14(73),$$

$$(4)\quad 0=-L_0L_2+\big(\sqrt{2}(\bar{3})-3(3)\big)L_3-\big(4(6)+2(\bar{3}\bar{3})+12(\bar{3}\bar{3})\,L_0 \\ +3\sqrt{2}(7\bar{3})+35(73)-8(\bar{5}\bar{5}),$$

$$(5)\quad 0=L_0\big(L_3-7(7)\big)+\big(\sqrt{8}(\bar{3})+(3)\big)L_{2,2}+4\sqrt{2}(6\bar{5}),$$

$$(6)\quad 0=-3L_0\big(L_3+7(7)\big)-\sqrt{8}(\bar{3})L_4+\big(4\sqrt{2}(\bar{3})-9(3)\big)L_{2,2} \\ +12\sqrt{2}(\bar{5})L_2-16\sqrt{2}(5\bar{3}\bar{3}),$$

$$(7)\quad 0=L_2^2-3L_0L_4-2L_0L_{2,2}+3(3)L_{3,2}+3(6)L_2 \\ +28\sqrt{2}(7\bar{5})-18(66).$$

Die hier auftretenden L haben nach Formel (37) des vorigen Abschnitts [in Folge von (2)] nachstehende Werthe:

$$(8)\quad \begin{cases} 3L_0=-4(\bar{4}),\\ 5L_2=-8(\bar{6})+2(6)+4(\bar{3}\bar{3})-(33),\\ L_3=-(3)L_0+8\sqrt{2}(\bar{7})-3(7),\\ 7L_4=-12(\bar{5}\bar{3})+L_0^2,\\ 7L_{2,2}=\ \ 2L_0^2+4(\bar{5}\bar{3}),\\ 7L_{3,2}=-\big(4\sqrt{2}(\bar{3})-3(3)\big)L_2-\sqrt{8}(\bar{5})L_0-8\sqrt{2}(6\bar{3})+9(63)\\ \qquad +\sqrt{8}(\bar{3}\bar{3}\bar{3})-2(\bar{3}\bar{3}\bar{3}).\end{cases}$$

Trägt man die Werthe von L_4 und $L_{2,2}$ in die vorstehenden Formeln (6) und (7) ein; so erhalten wir:

$$(6\text{a})\quad 0 = L_0\left(L_3 - 7(7) + \frac{4\sqrt{2}(\bar{3}) + 2(3)}{7}L_0\right) + 4(\bar{5})\left(\sqrt{2}(6) + \frac{\sqrt{8}(\bar{3}) + (3)}{7}(3)\right),$$

$$(7\text{a})\quad 0 = -L_0\left(L_3 + 7(7) + \frac{6(3) - \sqrt{8}(\bar{3})}{7}L_0\right) + 4(\bar{5})\left(\sqrt{2}L_2 - \tfrac{6}{7}\sqrt{2}(\bar{3}\bar{3}) + \tfrac{3}{7}(\bar{3}3)\right).$$

Durch Combination dieser Formeln ergiebt sich diese:

$$(9)\quad 0 = \begin{cases} \left(L_3 - 7(7) + \frac{4\sqrt{2}(\bar{3}) + 2(3)}{7}L_0\right)\left(\sqrt{2}L_2 - \frac{6}{7}\sqrt{2}(\bar{3}\bar{3}) - \frac{3}{7}(\bar{3}3)\right) \\ + \left(L_3 + 7(7) + \frac{6(3) - \sqrt{8}(\bar{3})}{7}L_0\right)\left(\sqrt{2}(6) + \frac{\sqrt{8}}{7}(\bar{3}3) + \frac{1}{7}(33)\right). \end{cases}$$

Ich füge nun den Bedingungen (2) *noch folgende hinzu:*

$$(10)\qquad (\bar{5}) = 0.$$

Dann entstehen die Formeln:

$$(11)\quad \begin{cases} 0 = 2L_0L_2 - \sqrt{2}(\bar{3})L_3 - \left((6) + 2(\bar{3}\bar{3})\right)L_0 - 14(73), \\ 0 = -L_0L_2 + \left(\sqrt{2}(\bar{3}) - 3(3)\right)L_3 - \left(4(6) + 2(\bar{3}\bar{3}) + \sqrt{2}(\bar{3}3)\right)L_0 \\ \qquad\qquad + 21\sqrt{2}(7\bar{3}) + 35(73), \\ 0 = L_0 . \left(L_3 - 7(7) + \frac{4\sqrt{2}(\bar{3}) + 3(3)}{7}L_0\right), \\ 0 = L_0 . \left(L_3 + 7(7) + \frac{6(3) - \sqrt{8}(\bar{3})}{7}L_0\right), \\ 0 = \begin{cases} \left(L_3 - 7(7) + \frac{4\sqrt{2}(\bar{3}) + 2(3)}{7}L_0\right)\left(\sqrt{2}L_2 - \frac{6\sqrt{2}}{7}(\bar{3}\bar{3}) - \frac{3}{7}(\bar{3}3)\right) \\ + \left(L_3 + 7(7) + \frac{6(3) - \sqrt{8}(\bar{3})}{7}L_0\right)\left(\sqrt{2}(6) + \frac{\sqrt{8}}{7}(\bar{3}3) + \frac{1}{7}(33)\right), \end{cases} \\ 0 = L_2{}^2 - L_0{}^3 + 3(3)L_{3,2} + 3(6)L_2 - 18(66). \end{cases}$$

Hier haben wir nun eine doppelte Möglichkeit vor uns, indem wir die dritte und vierte Gleichung dadurch befriedigen können, dass wir entweder $L_0 = 0$ nehmen oder die resp. zweiten Factoren gleich Null setzen. *Ich werde hier das Erstere thun, also schreiben:*

$$(12)\qquad L_0 = 0,$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt:

$$(12a)\qquad (\bar{4}) = 0.$$

Wir finden dann weiter aus (11):

$$(13)\quad \begin{aligned} &\sqrt{2}(\bar{3})L_3 + 14(73) = 0, \\ &\left(\sqrt{2}(\bar{3}) - 3(3)\right)L_3 + 7(7)\left(3\sqrt{2}(\bar{3}) + 5(3)\right) = 0, \end{aligned}$$

$$(13)\quad \begin{cases} \left(L_3 - 7(7)\right)\left(\sqrt{2}\,L_2 - \tfrac{6}{7}\sqrt{2}(\bar{3}\bar{3}) - \tfrac{3}{7}(\bar{3}3)\right) \\ \qquad + \left(L_3 + 7(7)\right)\left(\sqrt{2}(6) + \tfrac{\sqrt{8}}{7}(\bar{3}\bar{3}) + \tfrac{1}{7}(\bar{3}3)\right) = 0, \\ \left(L_2 + 6(6)\right)\left(L_2 - 3(6)\right) + 3(3)\,L_{3,2} = 0. \end{cases}$$

Aus der zweiten und dritten dieser Formeln folgt:

$$(14)\qquad (\bar{3}\bar{3}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{3}\,3) + (33) = 0$$

oder aufgelöst:

$$(14\text{a})\qquad \sqrt{8}\,\frac{(\bar{3})}{(3)} = -1 - \sqrt{-7}.$$

Ich führe nun diese Bezeichnungen ein (deren erste ich auch schon in Formel (6) der Einleitung gebrauchte):

$$(15)\qquad \begin{cases} \alpha = \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{-7}}{\sqrt{8}}}; & \beta = \sqrt{\dfrac{-1-\sqrt{-7}}{\sqrt{8}}} \\ (3) = 7\sqrt{2}\,\alpha\nabla; & (7) = -\alpha^7 C \end{cases}$$

und erhalte zunächst aus Formel (14):

$$(16)\qquad (\bar{3}) = 7\sqrt{2}\,\beta\nabla$$

und aus der 2[ten] der Formeln (13):

$$(17)\qquad \begin{aligned} L_3 &= 7\sqrt{2}\,\alpha^9 C = -7\sqrt{2}\,\alpha^2(7), \\ L_3 + 7(7) &= 7(7)\left(1 - \alpha^2\sqrt{2}\right), \\ L_3 - 7(7) &= -7(7)\left(1 + \alpha^2\sqrt{2}\right), \end{aligned}$$

$$(18)\qquad \frac{L_3 + 7(7)}{L_3 - 7(7)} = \frac{\alpha^2\sqrt{2} - 1}{\alpha^2\sqrt{2} + 1} = -\sqrt{2}\,\beta^2.$$

Nach Formel (9) ist:

$$L_3 = 8\sqrt{2}\,(\bar{7}) - 3(7),$$

also:

$$\begin{aligned} 8\sqrt{2}\,(\bar{7}) &= \left(-7\sqrt{2}\,\alpha^2 + 3\right)(7) \\ &= C\left(7\sqrt{2}\,\alpha^9 - 3\alpha^7\right) = -8\sqrt{2}\,\beta^7 C, \end{aligned}$$

oder:

$$(19)\qquad (\bar{7}) = -\beta^7 C.$$

Weit schwerer ist die Berechnung von (6) und $(\bar{6})$. Um sie zu bewerkstelligen trage ich zunächst in die 4[te] der Formeln (13) für den Quotienten

$$\frac{L_3 + 7(7)}{L_3 - 7(7)}$$

seinen Werth aus Formel (18) sowie für die Coefficienten (3) und $(\bar{3})$ ihre Werthe aus Formel (15) und (16) ein.

Ich erhalte dann:

$$\sqrt{2}\,L_2 - \frac{12\sqrt{2}}{7}\beta^2 . 49\nabla^2 - \frac{6}{7} . 49\nabla^2$$

$$-\sqrt{2}\,\beta^2\left\{\sqrt{2}(6) + \frac{4\sqrt{2}}{7}\cdot 49\,\beta^2\nabla^2 + \frac{2}{7}\cdot 49\nabla^2\right\} = 0$$

oder:

$$\frac{L_2}{7\Delta^2} - 12\beta^2 - 3\sqrt{2} - \sqrt{2}\,\beta^2\frac{(6)}{7\Delta^2} + 4\sqrt{2}\,\beta^2\left(\alpha^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2\beta^2 = 0,$$

$$\frac{L_2}{7\Delta^2} + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}(6)\beta^2}{7\Delta^2} + 10\beta^2.$$

Ich bezeichne nun den Quotienten:

$$\frac{\frac{L_2}{7\Delta^2} + \sqrt{2}}{\beta\sqrt{2}} = \frac{(6)}{7\Delta^2} + \frac{5\sqrt{2}}{\alpha} = u$$

durch u und suche zunächst u auf.

Es ist:

$$(20) \qquad \frac{L_2}{7\Delta^2} = \sqrt{2}\,(\beta u - 1), \qquad \frac{(6)}{7\Delta^2} = \alpha u - 5\sqrt{2}.$$

Diese Werthe von (6) und L_2 sowie die von $(\bar{3})$ und (3) in Formel (15) trage ich in die letzten der Formeln (13) ein, und erhalte:

$$\frac{L_{3,2}(3)}{49\Delta^2} = \begin{cases}(-8\sqrt{2} + 6\alpha^2)\sqrt{2}(\beta u - 1) + 2(9\alpha^2 - 8\sqrt{2})(\alpha u - 5\sqrt{2}) \\ +56\sqrt{2}\beta^2 - 56\end{cases}$$

$$= (6\alpha^2\sqrt{2} - 16)(\beta u - 1) - (18\beta^2 + 25\sqrt{2})(\alpha u - 5\sqrt{2})$$
$$+56\sqrt{2}\beta^2 - 56$$

$$= 6\sqrt{2}\alpha u - 16\beta u + 6\sqrt{2}\beta^2 + 6 + 16 - 18\beta u - 25\sqrt{2}\alpha u$$
$$+ 90\beta^2\sqrt{2} + 250 + 56\sqrt{2}\beta^2 - 56$$

$$= -(19\sqrt{2}\alpha + 34\beta)u + 152\beta^2 + 216;$$

$$0 = \begin{cases}\{(\sqrt{2}\beta + 6\alpha)u - 31\sqrt{2}\}\{(\sqrt{2}\beta - 3\alpha)u + 14\sqrt{2}\} \\ -(57\sqrt{2}\alpha + 102\beta)u - 456\beta^2 + 648.\end{cases}$$

Somit wird die letzte der Formeln (13):

$$0 = \begin{cases}u^2(2\beta^2 + 3\sqrt{2} + 18\beta^2 + 9\sqrt{2}) \\ +\beta u(28 - 62 - 102) + \alpha u\sqrt{2}(84 + 93 - 52) \\ -868 + 648 - 456 - 456\sqrt{2}\alpha^2,\end{cases}$$

$$0 = u^2(5\beta^2 + 3\sqrt{2}) - 2u(17\beta - 15\sqrt{2}\alpha) - (169 + 114\sqrt{2}\alpha^2).$$

Die Discriminante dieser Gleichung ist merkwürdigerweise 0, die Doppelwurzel hat den Werth:

$$u = \frac{5}{2}\alpha + \frac{9}{2}\beta\sqrt{2}.$$

Trägt man ihn in Formel (20) ein, so wird:

$$(21)\qquad \begin{aligned} (6) &= -\frac{7}{4\sqrt{2}}(9 - 5\sqrt{-7})\nabla^2, \\ L_2 &= -\frac{21}{\sqrt{8}}(1 + 3\sqrt{-7})\nabla^2. \end{aligned}$$

Die Grösse $(\bar{6})$ berechnet man jetzt aus der zweiten Formel (18), indem man in dieselbe für

$$L_2,\quad (6),\quad (3),\quad (\bar{3})$$

ihre Werthe einträgt. Sie wird dann:

$$5\left(-\frac{21}{\sqrt{8}} - \frac{63}{\sqrt{8}}\sqrt{-7}\right)\nabla^2 = -8(\bar{6}) - \frac{7}{\sqrt{8}}(9 - 5\sqrt{-7})\nabla^2$$
$$+ 8.49\left(\frac{-1-\sqrt{-7}}{\sqrt{8}}\right)\nabla^2 - 2.49\left(\frac{-1+\sqrt{-7}}{\sqrt{8}}\right)\nabla^2$$

so dass man für $(\bar{6})$ den Werth erhält:

$$(21\text{ a})\qquad (\bar{6}) = -\frac{7}{4\sqrt{2}}(9 + 5\sqrt{-7})\nabla^2.$$

Fassen wir zusammen, so haben wir für die (i), $(\bar{i})$ nun in der That dieselben Werthe erhalten, welche in (1) vorkommen.

§ 2.

Definition der kanonischen Gleichungen durch Wurzelrelationen.

Um jetzt die Wurzelrelationen zu gewinnen, welche in der Einleitung für die „ausgezeichneten" Gleichungen überhaupt und für die „kanonischen" insbesondere aufgestellt worden sind, berechne ich nach den Formeln (4) des vorigen Abschnittes für unsere Gleichungen (1) zuvörderst die Potenzsummen $s_2, s_3, s_4, \ldots$ und finde:

$$s_2 = 0,\quad s_3 = -21\sqrt{2}\cdot\alpha\cdot\nabla,\quad s_4 = 0,\quad s_5 = 0,$$
$$s_6 = \frac{21}{\sqrt{8}}(-5 + 9\sqrt{-7})\nabla^2,\quad s_7 = 7\alpha^2 C,\quad s_8 = 0.$$

Hierauf bestimmen sich (vermöge des § 9 des vorigen Abschnitts) insbesondere die $C_{\lambda,\mu}$:

$$C_{0,2}=0,\quad C_{1,2}=-21\sqrt{2}\cdot\beta\cdot\nabla,\quad C_{2,2}=0,\quad C_{3,2}=0,$$

$$C_{4,2}=\frac{21}{\sqrt{2}}(17-\sqrt{-7})\,\nabla^2,\quad C_{5,2}=7\sqrt{2}\cdot\alpha^5\cdot C,\quad C_{6,2}=0.$$

Hiernach haben wir für $\varrho=0,1,2,\ldots,6$ die folgenden Relationen:

$$C_{\varrho,2}-\sqrt{2}\cdot\beta^2\cdot s_{\varrho+2}=0,$$

oder:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=6} x_\nu^\varrho\left(\bar{x}_{1-\nu}^2+\bar{x}_{2-\nu}^2+\bar{x}_{4-\nu}^2-\sqrt{2}\cdot\beta^2\cdot x_\nu^2\right)=0.$$

Dies sind sieben homogene lineare Gleichungen für die sieben Grössen:

$$\bar{x}_{1-\nu}^2+\bar{x}_{2-\nu}^2+\bar{x}_{4-\nu}^2-\sqrt{2}\cdot\beta^2\cdot x_\nu^2;$$

da die Determinante dieser Gleichungen nicht verschwindet (indem ihr Quadrat mit der Discriminante der vorgelegten Gleichungen siebenten Grades übereinstimmt), so erschliessen wir das Verschwinden der sieben Grössen. *Wir haben also die Wurzelrelationen:*

$$\alpha\left(\bar{x}_{1-\nu}^2+\bar{x}_{2-4}^2+\bar{x}_{4-\nu}^2\right)-\beta\sqrt{2}\cdot x_\nu^2=0. \tag{22}$$

Ihnen tritt, sofern wir an der *kanonischen* Form der Gleichungen siebenten Grades festhalten, ausser $s_1=0$ dann noch folgende hinzu:

$$s_2=0. \tag{23}$$

Ehe ich weiter gehe, will ich zeigen, dass unsere kanonischen Gleichungen in der That durch (22), (23) charakterisirt sind.

Beweis.

Es ist nur nöthig nachzuweisen, dass aus den Formeln (22) und (23) das Verschwinden der Coefficienten:

$$(4),\quad (5),\quad (\bar{4}),\quad (\bar{5})$$

gefolgert werden kann, denn in diesem Falle lassen sich die übrigen Coefficienten wie oben berechnen. —

Aus den Formeln (22) ergeben sich zunächst diese:

$$\beta\left(x_{1-\nu}^2+x_{2-\nu}^2+x_{4-\nu}^2\right)-\sqrt{2}\,\alpha x_\nu'^2=0,$$

$$\sum x_\nu^\varrho\left(x_{1-\nu}'^2+x_{2-\nu}'^2+x_{4-\nu}'^2-\sqrt{2}\,\beta^2 x_\nu^2\right)=0,$$

$$\sum x_\nu'^\varrho\left(x_{1-\nu}^2+x_{2-\nu}^2+x_{4-\nu}^2-\sqrt{2}\,\alpha^2 x_\nu'^2\right)=0;$$

mithin ist:

$$C_{\varrho,2}=\sqrt{2}\,\beta^2 s_{\varrho+2};\qquad C_{2,\varrho}=\sqrt{2}\,\alpha^2\bar{s}_{\varrho+2}$$

und im Speciellen:

$$C_{2,2}=\sqrt{2}\,\beta^2 s_4=\sqrt{2}\,\alpha^2\bar{s}_4,\quad C_{3,2}=\sqrt{2}\,\beta^2 s_5,\quad C_{2,3}=\sqrt{2}\,\alpha^2\bar{s}_5.$$

Nun ist nach Formel (4) und den Formeltafeln des § 9 und § 5 in Abschnitt I:

$$s_4 = -4(4),\quad \bar{s}_4 = -4(\bar{4}),\quad s_5 = -5(5),\quad \bar{s}_5 = -5(\bar{5}),$$

$$C_{2,2} = P_{2,1,1} = L_0 - (4),\quad C_{3,2} = P_{3,1,1} = \sqrt{8}\,(\bar{5}) + 2(5),$$

$$C_{2,3} = \bar{P}_{3,1,1} = \sqrt{8}(5) + 2\,(\bar{5}),\quad 3L_0 = -4(\bar{4}) - (4);$$

mithin:

$$\begin{aligned}
(\bar{4}) + (1 - 3\sqrt{2}\,\beta^2)(4) &= 0,\\
(1 - 3\sqrt{2}\,\alpha^2)\,(\bar{4}) + \qquad\qquad (4) &= 0,\\
\sqrt{8}(\bar{5}) + (2 + 5\sqrt{2}\,\beta^2)(5) &= 0,\\
(2 + 5\sqrt{2}\,\alpha^2)(\bar{5}) + \qquad\quad \sqrt{8}(5) &= 0,
\end{aligned}$$

und:

$$(4),\quad (5),\quad (\bar{4}),\quad (\bar{5})$$

verschwinden, was zu beweisen war.

Es erübrigt, die Wurzelrelationen (22) mit den Formeln (6) der Einleitung zu vergleichen, was im folgenden Paragraphen geschehen soll.

§ 3.

Umgestaltung der Wurzelrelationen.

Indem wir davon ausgehen, die Uebereinstimmung der Formeln (6) der Einleitung mit unseren jetzigen Relationen (22) zu beweisen, berechnen wir zunächst aus ersteren die Werthe von

$$\lambda_1^2,\ \lambda_2^2,\ \lambda_3^2,\ \lambda_2\,\lambda_3,\ \lambda_3\,\lambda_1,\ \lambda_1\,\lambda_2$$

und finden:

$$7\lambda_1^2 = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}\cdot\sum \varepsilon^{2\nu}\,x_\nu = \frac{\sqrt{2}}{\beta}\sum \varepsilon^{5\nu}\,\bar{x}_\nu,$$

$$7\lambda_2^2 = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}\cdot\sum \varepsilon^{6\nu}\,x_\nu = \frac{\sqrt{2}}{\beta}\sum \varepsilon^{\nu}\,\bar{x}_\nu,$$

$$7\lambda_3^2 = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}\cdot\sum \varepsilon^{4\nu}\,x_\nu = \frac{\sqrt{2}}{\beta}\sum \varepsilon^{3\nu}\,\bar{x}_\nu;$$

$$7\lambda_2\lambda_3 = \frac{\Sigma\varepsilon^{6\nu}\,x_\nu}{\beta} = \frac{\Sigma\varepsilon^{\nu}\,\bar{x}_\nu}{\alpha},$$

$$7\lambda_3\lambda_1 = \frac{\Sigma\varepsilon^{3\nu}\,x_\nu}{\beta} = \frac{\Sigma\varepsilon^{4\nu}\,\bar{x}_\nu}{\alpha},$$

$$7\lambda_1\lambda_2 = \frac{\Sigma\varepsilon^{5\nu}\,x_\nu}{\beta} = \frac{\Sigma\varepsilon^{2\nu}\,\bar{x}_\nu}{\alpha}.$$

Nun haben wir jedenfalls die Relationen

$$(\lambda_2\lambda_3)^2 = \lambda_2^2\cdot\lambda_3^2,\quad \text{etc.};$$

indem wir dieselben ausführen, bekommen wir in der That Beziehungen zwischen den x_ν, $\bar{x}_\nu$, welche Folgen von (22) sind. — Andererseits erfahren wir sofort durch Substitution, dass die Gleichungen (22) erfüllt sind, wenn wir von den Formeln (6) der Einleitung ausgehen.

Wir haben damit zugleich eine neue Art gefunden, um die Wurzelrelationen (22) *auszudrücken.* Wir setzen:

$$(24)\qquad \begin{cases} \alpha v_1 = t_1, & \alpha v_2 = t_2, & \alpha v_4 = t_4, \\ \alpha \bar{v}_1 = \bar{t}_1, & \alpha \bar{v}_2 = \bar{t}_2, & \alpha \bar{v}_4 = \bar{t}_4, \\ \beta v_3 = t_3, & \beta v_5 = t_5, & \beta v_6 = t_6, \\ \beta \bar{v}_3 = \bar{t}_3, & \beta \bar{v}_5 = \bar{t}_5, & \beta \bar{v}_6 = t_6, \end{cases}$$

wo t_ν, $\bar{t}_\nu$ die Lagrange'schen Ausdrücke bezeichnen:

$$(25)\qquad \sqrt{-7}\cdot t_\nu = \sum \varepsilon^\nu x_\nu, \qquad \sqrt{-7}\cdot \bar{t}_\nu = \sum \varepsilon^\nu \bar{x}_\nu,$$

und vermöge der Fundamentalrelation:

$$\sqrt{-2}\cdot \bar{x}_\nu = x_{1-\nu} + x_{2-\nu} + x_{4-\nu}$$

$$(26)\qquad \bar{v}_\nu = v_{-\nu}$$

wird.

Ferner sei:

$$(27)\qquad 2p = \begin{vmatrix} v_1\sqrt{2} & v_5 & v_6 \\ v_5 & v_2\sqrt{2} & v_3 \\ v_6 & v_3 & v_4\sqrt{2} \end{vmatrix}, \quad 2q = \begin{vmatrix} v_6\sqrt{2} & v_2 & v_1 \\ v_2 & v_5\sqrt{2} & v_4 \\ v_1 & v_4 & v_3\sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

Wir können dann unsere Relationen offenbar ausdrücken, indem wir sagen, *dass bei den Klein'schen Gleichungen entweder sämmtliche zweigliedrige Unterdeterminanten von p, oder sämmtliche zweigliedrige Unterdeterminanten von q verschwinden.* Ich werde die Elemente von p, q weiterhin mit $a_{i\varkappa}$, $\bar{a}_{i\varkappa}$, die zweigliedrigen Unterdeterminanten mit $A_{i\varkappa}$, $\bar{A}_{i\varkappa}$ bezeichnen.

§ 4.

Darstellung der Determinanten p, q durch die Coefficienten (3), $(\bar{3})$ und nochmalige Umgestaltung der Wurzelrelationen.

Wir wollen jetzt zeigen, dass die p, q lineare Combinationen der Coefficienten (3), $(\bar{3})$ sind.

Zu dem Zwecke tragen wir zunächst in die Potenzsumme:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=6}\left(x_\nu - \frac{1}{7}\sum_{\nu=0}^{\nu=6} x_\nu\right)^3$$

(die bis auf einen Zahlenfactor mit (3) übereinstimmt) statt der x_ν die t_ν (25) und dann die v_ν (24) ein. Solchergestalt kommt:

$$\frac{\sqrt{-7}}{3}\cdot\sum_{\nu=0}^{\nu=6}\left(x_\nu-\frac{1}{7}\sum_{\nu=0}^{\nu=6}x_\nu\right)^3=t_1^{\,2}t_5+t_2^{\,2}t_3+t_4^{\,2}t_1+t_4^{\,2}t_6+t_5^{\,5}t_4+t_6^{\,2}t_2 \\ +2t_1t_2t_4+2t_3t_5t_6,$$

und hieraus:

$$(28)\quad \frac{\sqrt{2}}{3}(\alpha^2-\beta^2)\sum_{\nu=0}^{\nu=6}\left(x_\nu-\frac{1}{7}\sum_{\nu=0}^{\nu=6}x_\nu\right)^3=\begin{cases}\alpha(v_1^{\,2}v_5+v_2^{\,2}v_3+v_3^{\,2}v_1)\\ +\beta(v_3^{\,2}v_1+v_5^{\,2}v_4+v_6^{\,2}v_2)\\ +2\alpha^3v_1v_2v_4+2\beta^3v_3v_5v_6.\end{cases}$$

Genau so kommt:

$$(28\text{b})\quad \frac{\sqrt{2}}{3}(\alpha^2-\beta^2)\sum_{\nu=0}^{\nu=6}\left(\bar{x}_\nu-\frac{1}{7}\sum_{\nu=0}^{\nu=6}\bar{x}_\nu\right)^3=\begin{cases}\beta(v_1^{\,2}v_5+v_2^{\,2}v_3+v_4^{\,2}v_1)\\ +\alpha(v_3^{\,2}v_1+v_5^{\,2}v_4+v_6^{\,2}v_2)\\ +2\beta^3v_1v_2v_4+2\alpha^3v_3v_5v_6.\end{cases}$$

Nun werden aber die Determinanten p, q, ausgerechnet:

$$2p=-\sqrt{2}(v_3^{\,2}v_1+v_5^{\,2}v_4+v_6^{\,2}v_2)+\sqrt{8}\cdot v_1v_2v_4+2v_3v_5v_6,$$
$$2q=-\sqrt{2}(\bar{v}_2^{\,2}\bar{v}_1+\bar{v}_5^{\,2}\bar{v}_4+\bar{v}_6^{\,2}\bar{v}_2)+\sqrt{8}\cdot\bar{v}_1\bar{v}_2\bar{v}_4+2\bar{v}_3\bar{v}_5\bar{v}_6.$$

Daher werden die p, q in der That lineare Combinationen unserer Potenzsummen und damit der Coefficienten (3), $(\bar{3})$; *wir finden:*

$$(29)\quad \begin{cases} p=-\frac{\alpha}{3}\cdot\sum_{\nu=0}^{\nu=6}\left(\bar{x}_\nu-\frac{1}{7}\sum_{\nu=0}^{\nu=6}\bar{x}_\nu\right)^3+\frac{\beta}{3}\cdot\sum_{\nu=0}^{\nu=6}\left(x_\nu-\frac{1}{7}\sum_{\nu=0}^{\nu=6}x_\nu\right)^3,\\ q=-\frac{\beta}{3}\cdot\sum_{\nu=0}^{\nu=6}\left(\bar{x}_\nu-\frac{1}{7}\sum_{\nu=0}^{\nu=6}\bar{x}_\nu\right)^3+\frac{\alpha}{3}\cdot\sum_{\nu=0}^{\nu=6}\left(x_\nu-\frac{1}{7}\sum_{\nu=0}^{\nu=6}x_\nu\right)^3.\end{cases}$$

Die p, q, welche solchergestalt als Functionen der x_ν, $\bar{x}_\nu$ definirt sind und die als solche mit $p_x^{\,3}$, bez. $q_{\bar{x}}^{\,3}$ abkürzender Weise bezeichnet werden sollen, haben in ihrer Form insofern etwas Willkürliches, als $\sum x_\nu=\sum\bar{x}_\nu$ bei uns gleich Null ist und wir also diese Summen, ohne den Werth unserer Ausdrücke zu ändern, nach Belieben zufügen oder weglassen können. Inzwischen bietet die Art, wie diese Summen in (29) eingefügt sind, einen wesentlichen Vortheil. Vermöge derselben erscheinen nämlich p, q als Functionen allein der *Differenzen* der x_ν (oder $\bar{x}_\nu$) und wir haben Relationen:

$$0=\frac{\partial p}{\partial x_0}+\frac{\partial p}{\partial x_1}+\frac{\partial p}{\partial x_2}+\frac{\partial p}{\partial x_3}+\frac{\partial p}{\partial x_4}+\frac{\partial p}{\partial x_5}+\frac{\partial p}{\partial x_6}\text{ etc.}$$

In Folge dessen verschwinden den Unterdeterminanten $A_{i\varkappa}$, $\bar{A}_{i\varkappa}$ entsprechend die *sämmtlichen* Differentialquotienten:

$$\frac{\partial p}{\partial x_\nu}, \quad \frac{\partial q}{\partial \bar{x}_\nu}$$

einzeln. Wir wollen dies so aussprechen, dass wir diese Differentialquotienten mit willkürlichen Grössen u_ν zusammen addiren und die entstehende Summe gleich Null setzen, was auch die u bedeuten mögen. *Auf solche Weise schreiben sich endlich die Relationen für die x, $\bar{x}$ folgendermassen, wobei ich von einer wohlbekannten abkürzenden Schreibweise Gebrauch mache. Es ist:*

(30) $$p_x^2 p_u = 0, \qquad q_{\bar{x}}^2 q_u = 0.$$

Nehmen wir die u gleich den x, $\bar{x}$, so kommt

(31) $$p_x^3 = 0, \qquad q_{\bar{x}}^3 = 0,$$

was mit der Formel (9) übereinstimmt, durch welche wir in der Einleitung überhaupt die *Normalgleichungen* definirt haben. Diese Normalgleichungen werden *ausgezeichnet*, sobald die Gleichungen (30) erfüllt sind. Sollen sie *kanonisch* sein, so muss überdiess

$$\sum x_\nu^2 = \sum \bar{x}_\nu^2 = 0$$

sein. In die v transformirt ergiebt dies die Bedingung:

(32) $$v_1 v_6 + v_2 v_5 + v_3 v_4 = 0.$$

§ 5.

Functionalgleichungen, denen p_x^3, q_x^3 genügen.

Die Formen p_x^3, q_x^3 werden jetzt das Instrument abgeben, dessen wir uns bedienen, um eine beliebige Gleichung siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen in die kanonische Form zu transformiren. Wir construiren zu dem Zwecke hier zuvörderst gewisse Functionalgleichungen, denen p_x^3, q_x^3 genügen. Dieselben beruhen einfach darauf, dass die p, q ursprünglich dreigliedrige Determinanten sind, auf die wir die Sätze von den adjungirten Determinanten anwenden können. Wir finden auf diese Weise folgenden Hauptsatz:

Ersetzt man die x_ν durch die $\frac{\partial p}{\partial x_\nu}$, so gehen die Grössen

$$t_\nu, \quad v_\nu, \quad \bar{a}_{i\varkappa}, \quad \bar{A}_{i\varkappa}, \quad \frac{\partial q}{\partial v_\nu}, \quad \frac{\partial q}{\partial x_\varrho}$$

in folgende über:

$$-\frac{\partial p}{\partial t_{-\nu}}, \quad -\frac{\partial p}{\partial v_{-\nu}}, \quad -\bar{A}_{i\varkappa}, \quad 2p\bar{a}_{i\varkappa}, \quad 2pv_{-\nu}, \quad 2px_\varrho.$$

Hiernach haben wir die Formeln:

$$(33)\quad \begin{cases} -27\, p_x{}^2 p_x'{}^2 p_q p_q' q_u = 2p\,.\,u_x, \\ -27\, q_x{}^2 q_x'{}^2 q_p q_p' p_u = 2q\,.\,u_x. \end{cases}$$

Aus diesen Formeln lassen sich dadurch andere herleiten, dass man sie nach den x differentiirt und die Incremente durch neue Variable $y, z, \ldots$ ersetzt.

So hat man z. B.

$$(34)\quad \begin{cases} -27 p_q p_q' q_u p_x{}^2 p_x' p_y' = \frac{1}{2}(p_x{}^3 u_y + 3p_x{}^2 p_y u_x), \\ -9 p_q p_q' q_u (p_x{}^2 p_y'{}^2 + 2p_x p_y p_x' p_y') = p_x{}^2 p_y u_y + p_x p_y{}^2 u_x, \\ -27\, q_p q_p' q_u q_x{}^2 q_x' q_y' = \frac{1}{2}(q_x{}^3 u_y + 3q_x{}^2 q_y u_x), \\ -9\, q_p q_p' q_u (q_x{}^2 q_y'{}^2 + 2q_x q_x' q_y q_y') = q_x{}^2 q_y u_y + q_x q_y{}^2 u_x. \end{cases}$$

Auf gleiche Weise finden wir:

$$-54 p_q p_q' p_q'' p_x{}^2 p_x' p_y' p_y''{}^2 = p_x{}^3 \cdot p_y{}^3 + 3p_x{}^2 p_y \cdot p_x p_y{}^2,$$

$$-9 p_q p_q' p_q'' (p_x{}^2 p_y'{}^2 p_x'' p_y'' + 2p_x p_y p_x' p_y' p_x'' p_y'') = 2p_x{}^2 p_y \cdot p_x p_y{}^2,$$

also:

$$(35)\quad 108 p_q p_q' p_q''\, p_x p_y\, p_x' p_y'\, p_x'' p_y'' = p_x{}^3 \cdot p_y{}^3 - 9p_x{}^2 p_y{}^2 \cdot p_x p_y{}^2.$$

§ 6.

Linearformen und Tripel derselben.

Wir haben bereits soeben, um mehrere Gleichungen symbolisch zusammenzufassen, willkürliche Grössen $u_0, u_1, \ldots, u_6$ benutzt. Von derselben Bezeichnungsweise wollen wir jetzt durchgängig Gebrauch machen, wenn es sich um irgend sieben Grössen, wie $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_6$, handelt. Wir bilden uns dann nämlich die *Form* (Linearform):

$$(36)\quad x = u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 + u_5 x_5 + u_6 x_6,$$

und reden von den Beziehungen zwischen den *Formen*, statt von Beziehungen zwischen Grössensystemen.

In Verbindung hiermit gelten noch folgende Verabredungen. Erstlich setzen wir fest, dass der Beziehung $\sum x_\nu = 0$ entsprechend immer folgende Relation bestehen soll:

$$(37)\quad u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 0.$$

Zweitens führen wir den $\bar{x}_\nu$ correspondirende Grössen $\bar{u}_\nu$ durch die Formeln ein:

$$(38)\quad \sqrt{2} \cdot \bar{u}_\nu = u_{1-\nu} + u_{2-\nu} + u_{4-\nu},$$

die wir auch so schreiben können:

$$(39)\quad \sqrt{2} \cdot u_\nu = \bar{u}_{1-\nu} + \bar{u}_{2-\nu} + \bar{u}_{4-\nu}.$$

Man hat dann sofort:

$$\bar{u}_0 + \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3 + \bar{u}_4 + \bar{u}_5 + \bar{u}_6 = 0 \tag{40}$$

und übrigens:

$$\sum u_\nu x_\nu = \sum \bar{u}_\nu \bar{x}_\nu. \tag{41}$$

Dabei unterscheide ich Linearformen $\sum u^\nu x_\nu$ und $\sum \bar{u}_\nu \bar{x}_\nu$ (die, (41) zufolge, immer denselben Werth haben) als Linearformen der ersten und der zweiten Art.

Es seien nun irgend zwei Linearformen gegeben:

$$x = \sum u_\nu x_\nu, \qquad y = \sum u_\nu y_\nu,$$

so kann man unter Benutzung der Formen p, q aus ihnen die weiteren bilden:

$$\left\{\begin{array}{l} p_x^2 p_u = g_1, \quad p_x p_y p_u = g_2, \quad p_y^2 p_u = g_3, \\ \qquad q_{g_1} q_{g_3} q_u = v, \quad q_{g_2}^2 q_u = w. \end{array}\right. \tag{42}$$

Dabei besteht nach der zweiten Formel (34) zwischen

$$x, \; y, \; v, \; w$$

die Relation:

$$-9v + 18w = p_x^2 p_y \cdot y + p_x p_y^2 \cdot x. \tag{43}$$

Die Formen:

$$\xi = c_1 x + c_2 y + c_3 v, \qquad \eta = c_1 g_1 + c_2 g_2 + c_3 g_3$$

bilden, wenn die Coefficienten c variabel sind, im Allgemeinen eine dreifache Mannigfaltigkeit. Ich nenne dieselben *conjugirte Formentripel*. Indem ich diese Tripel der Kürze halber mit A und B benenne, behaupte ich hier zunächst, dass jede Linearform $p_\xi^2 p_u$ dem Tripel B und jede Linearform $q_\eta^2 q_u$ dem Tripel A angehört.

Wir haben nämlich im vorigen Paragraphen unter (34), (35) folgende Formeln gegeben:

$$\begin{aligned}
-27 p_q p'_q q_u p_x^2 p'^2_x &= 2px, \\
-27 p_q p'_q q_u p_x^2 p'_x p'_y &= \tfrac{3}{2} p_x^2 p_y x + \tfrac{1}{2} py, \\
-27 p_q p'_q q_u p_y^2 p'^2_y &= 2p_y^3 x, \\
-27 p_q p'_q q_u p_y^2 p'_x p'_y &= \tfrac{1}{2} p_y^3 x + \tfrac{3}{2} p_x p_y^2 \cdot y.
\end{aligned}$$

Aus der 2ten und 4ten folgen diese:

$$\begin{aligned}
-27 p_q p_q p''_q p''^2_y p_x^2 p'_x p'_u &= \tfrac{3}{2} p_x p_y^2 \cdot p_x^2 p_u + \tfrac{1}{2} p \cdot p_y^2 p_u, \\
-27 p_q p'_q p''_q p''^2_x p_y^2 p_y p'_u &= \tfrac{3}{2} p_x^2 p_y \cdot p_y^2 p_u + \tfrac{1}{2} p_y^3 \cdot p_x^2 p_u, \\
-27 q_p q'_p p_u q_{g_2}^2 q'^2_{g_2} &= 2 q_{g_2}^3 \cdot g_2.
\end{aligned}$$

In unsern Bezeichnungen lauten sie:

$$-27\,q_{g_1}{}^2 q_u = 2px, \qquad -27\,q_{g_1}q_{g_2}q_u = \frac{3}{2}p_x{}^2p_yx + \frac{1}{2}p\cdot y,$$

$$-27\,q_{g_3}{}^2 q_u = 2p_y{}^3y, \qquad -27\,q_{g_2}q_{g_3}q_u = \frac{3}{2}p_xp_y{}^2y + \frac{1}{2}p_y{}^3x,$$

$$-27\,p_xp_up_qq_{g_1}q_{g_3} = -27\,p_xp_up_v = \frac{3}{2}p_xp_y{}^2\cdot p_x{}^2p_u + \frac{1}{2}p\cdot p_y{}^2p_u,$$

$$-27\,p_yp_up_qq_{g_1}q_{g_3} = -27\,p_yp_up_v = \frac{3}{2}p_x{}^2p_y\cdot p_y{}^2p_u + \frac{1}{2}p_y{}^3\cdot p_x{}^2p_u,$$

$$-27\,p_up_w{}^2 = 2q_{g_2}{}^3g_2.$$

Trägt man in die letzte für w seinen Werth aus Formel (43) ein:

$$w = \frac{1}{2}v + \frac{1}{18}p_xp_y{}^2x + \frac{1}{18}p_x{}^2p_y\cdot y,$$

so wird die letzte dieser Formeln:

$$-\frac{2}{27}q_{g_2}{}^3\cdot g_2 = p_u\Big(\frac{1}{4}p_v{}^2 + \frac{1}{18}p'_xp'^2_x\cdot p_x{}^2p_v + \frac{1}{18}p'_x{}^2p'_y\cdot p_yp_v$$

$$+\frac{1}{324}\left\{(p_xp_y{}^2)^2p_x{}^2 + 2(p_x{}^2p_y)(p_xp_y{}^2)p_xp_y + (p_x{}^2p_y)^2p_y{}^2\right\}$$

oder:

$$q_{g_2}{}^3\cdot g_2 = \begin{cases} -\frac{27}{8}p_v{}^2p_u + \frac{1}{36}p_xp_y{}^2\left(\frac{3}{2}p_xp_y{}^2g_4 + \frac{1}{2}p\cdot g_3\right) \\ \qquad\qquad + \frac{1}{36}p_x{}^2p_y\left(\frac{3}{2}p_x{}^2p_yg_3 + \frac{1}{2}pg_1\right) \\ -\frac{1}{24}\left\{(p_xp_y{}^2)^2g_1 + 2p_x{}^2p_y\cdot p_xp_y{}^2\cdot g_2 + (p_x{}^2p_y)^2g_3\right\}. \end{cases}$$

Diese Formeln zeigen, dass die Linearformen:

$$w,\ q_{g_1}{}^2q_u;\ q_{g_1}q_{g_2}q_u;\ q_{g_3}{}^2q_u;\ q_{g_2}q_{g_3}q_u$$

dem Formentripel A und die Formen:

$$p_xp_vp_u,\quad p_yp_vp_u,\quad p_v{}^2p_u$$

dem Tripel B angehören. Die Formen

$$p_\xi{}^2p_u,\quad p_\eta{}^2p_u$$

haben aber die Werthe:

$$p_\xi{}^2p_u = c_1{}^2g_1 + 2c_1c_2g_2 + c_2{}^2g_3 + 2c_1c_3p_xp_vp_u + 2c_2c_3p_yp_vp_u$$
$$+ c_3{}^2p_v{}^2p_u,$$

$$p_\eta{}^2p_u = c_1{}^2q_{g_1}{}^2q_u + 2c_1c_2q_{g_1}q_{g_2}q_u + c_2{}^2w + 2c_1c_3v + 2c_2c_3q_{g_2}q_{g_3}q_u$$
$$+ c_3{}^2q_{g_3}{}^2q_u,$$

womit unser Satz bewiesen ist.

§ 7.

Normale, ausgezeichnete und kanonische Linearformen.

Wir haben wiederholt angegeben, welche Beziehungen zwischen sieben Grössen $x_0, x_1, \ldots, x_6$ bestehen müssen, damit wir die zugehörige Gleichung siebenten Grades der Reihe nach als normale, ausgezeichnete, kanonische Gleichung bezeichnen. Eben diese Ausdrucksweise übertragen wir jetzt auf die Linearform $x = \sum u_\nu x_\nu$ und sprechen also von normalen, ausgezeichneten, kanonischen Linearformen. Diese Linearformen können dann immer noch „von der ersten Art" oder „von der zweiten Art" sein.

Wir notiren zuvörderst nachstehende Folgerungen aus den Formeln des vorigen Paragraphen:

1. Ist $p_x^3 = 0$, so ist $q_{g_1}^2 q_u = 0$, und ist $q_{g_1}^2 q_u = 0$, so ist $p_x^3 = 0$;
2. Ist $g_1 = 0$, so ist $q_{g_1}^3 = 0$;
3. Sind $g_1 = 0$ und $g_3 = 0$, so ist $g_{g_2}^2 q_u = 0$;
4. Ist $g_2 = 0$, so ist $p_x^3 = 0$;
5. Ist $g_1 = \lambda g_3$, so wird: $\lambda^2 p_y^3 \cdot y = p_x^3 \cdot x$;
6. Ist
$$c_1 g_1 + 2c_2 g_2 + c_3 g_3 = 0,$$
so ist:
$$(c_1 p_x + c_2 p_y)^2 p_u = (c_2^2 - c_1 c_3)\, g_3,$$
mithin:
$$(c_1 p_x + c_2 p_y)^3 \cdot (c_1 x + c_2 y) = (c_2^2 - c_1 c_3)^2 p_y^3 \cdot y;$$
7. Gehört g_1 einem Tripel B an, so gehört:
$$q_{g_1}^2 q_u = -\frac{2}{27} p_x^3 \cdot x$$
dem adjungirten Tripel A an;
8. Gehört x einem Tripel A an und g_2 dem adjungirten B, so gehört:
$$p_x^3 \cdot y = -54\, q_{g_1} q_{g_2} q_u - 3 p_x p_y^2 \cdot x$$
dem Tripel A an;
9. Ist $g_1 = 0$, so ist auch:
$$q_u (z_x q_z + 9 p_q p_{q_1} p_x q^2_{1,z})(z_x q_z + 9 p_q' p_{q_2}' p_x' q^2_{2,z}) = 0.$$

Indem wir unsere neue Terminologie aufnehmen, ergeben sich hieraus die folgenden Sätze:

1. Ist x eine Normalform 1ter Art, so ist g_1 eine ausgezeichnete Form 2ter Art, und ist g_1 eine ausgezeichnete Form 2ter Art, so ist x eine Normalform 1ter Art.

2. Ist x eine ausgezeichnete Form 1ter Art, so ist g_2 eine Normalform 2ter Art.
3. Sind x und y ausgezeichnete Formen 1ter Art, so ist g_2 eine ausgezeichnete Form 2ter Art.
4. Ist $g_2 = 0$, so sind x und y Normalformen 1ter Art.
5. Sind x und y zwei Formen, welche durch keine (homogene) lineare Relation verbunden sind, und ist:
$$g_1 = \lambda g_3,$$
so sind x und y Normalformen 1ter Art.
6. Sind x und y zwei nicht durch eine homogene lineare Relation verbundene Formen und ist:
$$c_1 g_1 + 2 c_2 g_2 + c_3 g_3 = 0,$$
so ist $c_1 x + c_2 y$ eine Normalform 1ter Art.
7. Gehört g_1 einem Tripel B an, so ist x entweder Normalform oder es gehört dem adjungirten Tripel A an.
8. Gehört x einem Tripel A an und g_2 dem adjungirten B, so ist entweder x Normalform 1ter Art oder y gehört A an.
9. Ist x eine ausgezeichnete Form 1ter Art und y eine beliebige Form, so ist:
$$y_x u_y + 9 p_x p_q q_y^2 p_u$$
eine ausgezeichnete Form 2ter Art.

Ersetzt man hier y durch $y + \lambda z$, so erhält man eine Reihe ausgezeichneter Formen:
$$(y_x + \lambda z_x)(u_y + \lambda u_z) + 9 p_x p_q p_u (q_y + \lambda q_z)^2.$$
Insbesondere sind diejenigen unter ihnen kanonisch, bei welchen wir λ der Gleichung entnehmen:
$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=6} \left\{(y_x + \lambda z_x)(y_\varkappa + \lambda z_\varkappa) + 9 p_x p_q p_\varkappa (q_y + \lambda q_z)^2\right\}^2.$$

§ 8.

Allgemeine Herstellung kanonischer Linearformen.

Ich werde jetzt die Aufgabe lösen, aus irgendwie gegebenen Linearformen x, y etc. kanonische Linearformen herzustellen. Die Lösung geschieht in der Weise, dass wir zunächst ein Mittel angeben, um durch wiederholte, auf p, q bezügliche Polarisationsprocesse, aus $x, y, \ldots$ eine *normale* Linearform zu gewinnen. Aus dieser leiten wir dann leicht auf analogem Wege (also auch auf rationale Weise) *ausgezeichnete* Linearformen ab. Wie man sodann von letzteren zu *kanonischen* Formen gelangt, wurde am Schluss des vorigen Paragraphen auseinandergesetzt.

Es seien x, y, wie gesagt, beliebige Linearformen (zwischen denen eine homogene lineare Gleichung nicht besteht). Ich untersuche dann zunächst, ob zufällig eine von ihnen Normalform ist. Ist diess der Fall, so ist unsere Aufgabe natürlich von vorneherein gelöst. —

Im anderen Falle bilde ich die drei Formen:

$$g_1 = p_x^2 p_u, \quad g_2 = p_x p_y p_u, \quad g_3 = p_y^2 p_u.$$

Sind dieselben zufällig durch eine Gleichung:

$$c_1 g_1 + c_2 g_2 + c_3 g_3 = 0 \tag{52}$$

verbunden, so ist

$$c_1 x + c_2 y$$

nach § 7, Satz (6), eine Normalform und die Aufgabe gelöst.

Besteht keine Gleichung (52), so bildet das Tripel B:

$$c_1 g_1 + c_2 g_2 + c_3 g_3$$

eine 3fache Mannigfaltigkeit. — In diesem Falle bilde ich die Form:

$$q_{g_1} q_{g_3} q_u = v.$$

Sind dann x, y, v durch eine lineare Relation verbunden:

$$-\frac{2}{27} c_1 p_x^3 x + 2c_2 v - \frac{2}{27} c_3 p_y^3 y = 0, \tag{53}$$

so ist nach Satz (2) von § 7:

$$c_1 q_{g_1}^2 q_u + 2c_2 q_{g_1} q_{g_3} q_u + c_3 q_{g_3}^2 q_u = 0 \tag{54}$$

und nach § 7, Satz (6):

$$c_1 g_1 + c_2 g_3$$

eine Normalform, also unsere Aufgabe gelöst. —

Im andern Falle bildet das Tripel A:

$$c_1 x + c_2 v + c_3 y$$

eine 3fache Mannigfaltigkeit und ist dem Tripel B adjungirt (§ 6).

Ich bilde dann eine beliebige weitere Form r, die nicht dem Tripel A angehört und untersuche sie, ob sie Normalform ist. Ist diess der Fall, so ist unsere Aufgabe wieder an sich gelöst.

Andern Falles stelle ich die 7 Formen

$$p_r^2 p_u, \quad p_r p_x p_u, \quad p_r p_y p_u, \quad p_r p_v p_u, \quad g_1, \quad g_2, \quad g_3$$

auf und bilde durch Determinanten die nothwendigerweise zwischen ihnen bestehende Relation:

$$c_0 p_r^2 p_u + 2c_1 p_r p_x p_u + 2c_2 p_r p_y p_u + 2c_3 p_r p_v p_u + c_4 g_1 + c_5 g_2 + c_6 g_3 = 0.$$

In ihr verschwinden nicht gleichzeitig die 4 ersten Coefficienten, da sonst eine Relation (52) bestehen würde.

Ich unterscheide nun die beiden Fälle:

1) $c_0 = 0$; 2) $c_0 \gtrless 0$.

1. Ist $c_0 = 0$ so gehört $p_r p_u (c_1 p_x + c_2 p_y + c_3 p_v)$ dem Tripel B an; da ferner zwar $c_1 x + c_2 y + c_3 v$, aber nicht r dem Tripel A angehört, so ist nach § 7, Satz (8):
$$c_1 x + c_2 y + c_3 v$$
eine Normalform.

2. Ist $c_0 \gtrless 0$, so gehört die Form:
$$(c_0 p_r + c_1 p_x + c_2 p_y + c_3 p_v)^2 p_u$$
dem Tripel B an; die Form r gehört aber nach Voraussetzung dem Tripel A nicht an, also auch nicht die Form
$$c_0 r + c_1 x + c_2 y + c_3 v;$$
mithin ist letztere Form nach § 7 (7) eine Normalform.

Sowohl im 1^{ten} als im 2^{ten} Falle ist:
$$c_0 r + c_1 x + c_2 y + c_3 v$$
eine Normalform, mithin ist unsere Aufgabe jetzt in allen Fällen gelöst. —

Unser weiterer Process verläuft nun folgendermassen: Haben wir eine Normalform 1^{ter} Art x, so ist nach § 7, Satz (1), $p_x^2 p_u$ eine ausgezeichnete Form zweiter Art, aus der wir mit Hülfe von zwei beliebigen Linearformen nach den Regeln des § 7 (9) eine kanonische herstellen können.

§ 9.

Ueber die Bedeutung unserer Entwickelungen für die Theorie der Gleichungen siebenten Grades.

Die Entwickelungen der letzten Paragraphen gewinnen jetzt unmittelbare Bedeutung für die Theorie unserer Gleichungen siebenten Grades, indem wir annehmen, dass die Coefficienten der Linearformen erster Art, mit denen wir beginnen, immer dieselben Vertauschungen, wie die $x_0, x_1, \ldots, x_6$ erleiden. Es ergiebt sich dann nämlich aus der Natur des Polarisationsprocesses und dem Umstande, dass p_x^3, q_x^3 bei sämmtlichen 168 Substitutionen S unverändert bleiben, *dass das Gleiche für die Coefficienten aller Linearformen erster Art gilt, die wir im Laufe unseres Processes herstellen, während sich die Coefficienten der zwischendurch auftretenden Linearformen zweiter Art allemal wie die* $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_6$ *substituiren.* Anders ausgesprochen: Nehmen wir die Coefficienten der willkürlichen Linearformen erster Art immer so als Functionen der $(x_0, x_1, \ldots, x_6)$ an, dass sie sich bei den Vertauschungen S wie die $x_0, x_1, \ldots, x_6$ selbst permutiren, so gestattet unsere Ableitung in allen Fällen sieben weitere Grössen herzustellen, welche dieselbe Eigenschaft haben, überdiess aber jenen Bedingungen

genügen, durch welche wir die *normalen* Gleichungen, die *ausgezeichneten* Gleichungen, endlich die *kanonischen* Gleichungen definirt haben. *Wir haben also ein Mittel gefunden, um eine beliebig gegebene Gleichung siebenten Grades mit einer Gruppe von* 168 *Substitutionen der Reihe nach in eine der genannten besonderen Gleichungen zu transformiren.*

Eben dieses war aber die Aufgabe, die wir von vorneherein in Aussicht genommen hatten. Es kommt jetzt nur noch darauf an, die gefundenen sieben Grössen, die wir $l_0, l_1, \ldots, l_6$ nennen wollen, in die Gestalt von Tschirnhaus zu setzen:

$$(55)\qquad l_\nu = \xi_0 + \xi_1 x_\nu + \xi_2 x_\nu^2 + \xi_3 x_\nu^3 + \xi_4 x_\nu^4 + \xi_5 x_\nu^5 + \xi_6 x_\nu^6,$$

wo die $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_6$ nothwendig Functionen S sein werden. Wollte man in irgend einem speciellen Falle die $l_0, l_1, \ldots, l_6$ explicite ausrechnen und nun direct die $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_6$ aufsuchen, (was ja in theoretischer Hinsicht ganz einfach ist), so würde man zu Rechnungen von unübersteigbarer Complication kommen. Eben desshalb haben wir den Herstellungsprocess der $l_0, l_1, \ldots, l_6$ so eingerichtet, wie es in den vorigen Paragraphen geschehen ist. Wir werden nämlich zeigen, dass es gestattet ist, gleich die anfänglichen Linearformen in die Gestalt von Tschirnhaus zu setzen, und dass man dann mit den so modificirten Linearformen mutatis mutandis ganz geradeso schrittweise vorgehen kann, wie es in den vorangehenden Paragraphen mit den ursprünglichen Linearformen geschah. Wir übertragen also nicht die *Resultate* der vorigen Paragraphen, sondern die *Methode* derselben in die Form von Tschirnhaus.

Abschnitt III.

Aufstellung der Tschirnhaustransformation.

§ 1.

Präcisirung der Aufgabe.

Wir setzten bereits soeben ((55) des vorigen Abschnitts):

$$(1)\qquad l_\nu = \xi_0 + \xi_1 x_\nu + \xi_2 x_\nu^2 + \cdots + \xi_6 x_\nu^6,$$

oder auch, indem wir

$$(2)\qquad X_k = x_0^k u_0 + x_1^k u_1 + \cdots + x_6^k u_6$$

schreiben:

$$(3)\qquad l_u = \xi_0 X_0 + \xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 \cdots + \xi_6 X_6.$$

Der Symmetrie halber stellen wir neben diese Formeln andere, in denen die x_ν durch die $\bar{x}_\nu$ ersetzt sind. Nach den Verabredungen, die

wir bei Einführung der Linearformen in § 6 des vorigen Abschnitts getroffen haben, ist

$$(4) \qquad l_u = \bar{l}_{\bar{u}}$$

zu setzen. Wir schreiben dann der Formel (2) entsprechend:

$$(5) \qquad \bar{X}_k = \bar{x}_0^k \bar{u}_0 + \bar{x}_1^k \bar{u}_1 + \cdots + \bar{x}_6^k \bar{u}_6$$

und construiren als Analogon zur Formel (3) die nachstehende:

$$(6) \qquad \bar{l}_{\bar{u}} = \bar{\xi}_0 \cdot \bar{X}_0 + \bar{\xi}_1 \bar{X}_1 + \bar{\xi}_2 \bar{X}_2 + \cdots + \bar{\xi}_6 \bar{X}_6.$$

Die Coefficienten ξ, $\bar{\xi}$, welche durch (3), (6) definirt werden, nenne ich die *Moduln* der Linearform l, und zwar beziehungsweise die Moduln *erster* und *zweiter Art*.

Unsere Aufgabe spaltet sich jetzt in zwei Theile.

Wir werden erstlich die elementare Frage behandeln, wie sich die ξ, $\bar{\xi}$ mit Hülfe der Coefficienten (i), $(\bar{i})$ berechnen, sobald wir die $l_0 \ldots l_6$ und $\bar{l}_0 \ldots \bar{l}_6$ als bekannt ansehen dürfen.

Wir werden ferner untersuchen, wie sich die Formen

$$pl^3, \quad ql^3$$

umgestalten, sobald wir statt der l die ξ einführen, und wie dementsprechend die Polarisationsprocesse des vorigen Abschnitts umzugestalten sind, wenn wir die vorkommenden Linearformen durchweg durch ihre Moduln bezeichnen wollen.

§ 2.

Einführung der Moduln ξ, $\bar{\xi}$.

Indem wir uns jetzt dazu wenden, die Moduln ξ aus den linearen Gleichungen (1) (oder die Moduln $\bar{\xi}$ aus den entsprechenden Gleichungen) zu berechnen, bemerken wir vor Allem, dass die Determinante dieser Gleichungen mit dem Differenzenproducte der x_ν (resp. der $\bar{x}_\nu$) übereinstimmt, und dass also unsere Umformung immer bestehen bleibt, da wir besagte Differenzenproducte selbstverständlich von 0 verschieden nehmen.

Wir leiten zunächst aus den Gleichungen (1) die folgende ab:

$$(7) \qquad \sum_{\nu=0}^{\nu=6} l_\nu = 7\xi_0 + \xi_2 s_2 + \xi_3 s_3 + \cdots + \xi_6 s_6,$$

wo die s die Potenzsummen sind, deren Werthe wir in Formel (4) des ersten Abschnitts zusammenstellten. Indem wir subtrahiren, erhalten wir an Stelle der (1) die sechs weiteren Gleichungen:

$$(8)\qquad l_\nu - \frac{1}{7}\sum_{\nu=0}^{\nu=6} l_\nu = \xi_1 x_\nu + \xi_2\left(x_\nu^2 - \frac{s_2}{7}\right) + \cdots + \xi_6\left(x_\nu^6 - \frac{s_6}{7}\right).$$

Ihnen und (7) setzen wir die anderen entsprechend:

$$(9)\qquad \sum_{\nu=0}^{\nu=6} \bar{l}_\nu = 7\bar{\xi}_0 + \bar{\xi}_2\bar{s}_2 + \bar{\xi}_3\bar{s}_3 + \cdots + \bar{\xi}_6\bar{s}_6,$$

$$(10)\qquad \bar{l}_\nu - \frac{1}{7}\sum_{\nu=0}^{\nu=6} \bar{l}_\nu = \bar{\xi}_1\bar{x}_\nu + \bar{\xi}_2\left(\bar{x}_\nu^2 - \frac{\bar{s}_2}{7}\right) + \cdots + \bar{\xi}_6\left(\bar{x}_\nu^6 - \frac{\bar{s}_6}{7}\right).$$

Um nun aus diesen Gleichungen die ξ, $\bar{\xi}$ wirklich zu berechnen, suche ich zunächst Grössen $a_{\nu,\varrho}$, $\bar{a}_{\nu,\varrho}$:

$$(11)\qquad \begin{cases} a_{\nu,\varrho} = s_{\nu+\varrho} - \frac{1}{7}\, s_\nu \cdot s_\varrho, \\ \bar{a}_{\nu,\varrho} = \bar{s}_{\nu+\varrho} - \frac{1}{7}\, \bar{s}_\nu \cdot \bar{s}_\varrho, \end{cases}$$

ferner die $C_{\nu,\varrho}$, die wir in § 9 des ersten Abschnitts ausführlich behandelten:

$$(12)\qquad \begin{cases} C_{\nu,\varrho} = \sum x_0^\nu(\bar{x}_1^\varrho + \bar{x}_2^\varrho + \bar{x}_4^\varrho), \\ C_{\varrho,\nu} = \sum \bar{x}_0^\nu(x_1^\varrho + x_2^\varrho + x_4^\varrho), \end{cases}$$

und aus ihnen die $b_{\nu,\varrho}$, $\bar{b}_{\nu,\varrho}$:

$$(13)\qquad \begin{cases} b_{\nu,\varrho} = C_{\nu,\varrho} - \frac{3}{7}\, s_\nu \cdot \bar{s}_\varrho, \\ \bar{b}_{\nu,\varrho} = C_{\varrho,\nu} - \frac{3}{7}\, \bar{s}_\nu \cdot s_\varrho. \end{cases}$$

Dabei ist:

$$(14)\qquad a_{\nu,\varrho} = a_{\varrho,\nu}, \quad b_{\nu,\varrho} = \bar{b}_{\varrho,\nu}, \quad \bar{a}_{\nu,\varrho} = \bar{a}_{\varrho,\nu}.$$

Schreibt man jetzt der Abkürzung halber:

$$(15)\qquad \begin{cases} N_\varrho = \left(x_0^\varrho - \frac{s_\varrho}{7}\right) l_0 + \left(x_1^\varrho - \frac{s_\varrho}{7}\right) l_1 + \cdots + \left(x_6^\varrho - \frac{s_\varrho}{7}\right) l_6, \\ \bar{N}_\varrho = \left(\bar{x}_0^\varrho - \frac{\bar{s}_\varrho}{7}\right) \bar{l}_0 + \left(\bar{x}_1^\varrho - \frac{\bar{s}_\varrho}{7}\right) \bar{l}_1 + \cdots + \left(\bar{x}_6^\varrho - \frac{\bar{s}_\varrho}{7}\right) \bar{l}_6, \end{cases}$$

so erhalten wir folgende Bestimmungsgleichungen für $\xi_1 \ldots \xi_6$, resp. $\bar{\xi}_1 \ldots \bar{\xi}_6$:

$$(16)\qquad \begin{cases} a_{\varrho,1}\xi_1 + a_{\varrho,2}\xi_2 + \cdots + a_{\varrho,6}\xi_6 \\ = b_{\varrho,1}\bar{\xi}_1 + b_{\varrho,2}\bar{\xi}_2 + \cdots + b_{\varrho,6}\bar{\xi}_6 = N_\varrho, \\ \bar{a}_{\varrho,1}\bar{\xi}_1 + \bar{a}_{\varrho,2}\bar{\xi}_2 + \cdots + \bar{a}_{\varrho,6}\bar{\xi}_6 \\ = \bar{b}_{\varrho,1}\xi_1 + \bar{b}_{\varrho,2}\xi_2 + \cdots + \bar{b}_{\varrho,6}\xi_6 = \bar{N}_\varrho. \end{cases}$$

Hier sind die Determinanten der a, $\bar{a}$ (von numerischen Factoren abgesehen) den Quadraten der Differenzenproducte der x, $\bar{x}$ gleich, die Determinante der b, $\bar{b}$ aber dem Producte der genannten Differenzenproducte. Ich will die betreffenden vier Determinanten der Reihe nach mit

$$\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3,$$

und ihre Unterdeterminanten mit

$$\Delta\alpha_{ik},\quad \Delta_1\bar{\alpha}_{ik},\quad \Delta_2\beta_{ik},\quad \Delta_3\bar{\beta}_{ik}$$

bezeichnen. *Wir haben dann aus* (16) *als Werthe der* ξ, $\bar{\xi}$:

$$(17)\qquad \begin{cases} \xi_\nu = \alpha_{1,\nu}N_1 + \alpha_{2,\nu}N_2 + \cdots + \alpha_{6,\nu}N_6 \\ \quad = \bar{\beta}_{1,\nu}\bar{N}_1 + \bar{\beta}_{2,\nu}\bar{N}_2 + \cdots + \bar{\beta}_{6,\nu}\bar{N}_6, \\ \bar{\xi}_\nu = \bar{\alpha}_{1,\nu}\bar{N}_1 + \bar{\alpha}_{2,\nu}\bar{N}_2 + \cdots + \bar{\alpha}_{6,\nu}\bar{N}_6 \\ \quad = \beta_{1,\nu}N_1 + \beta_{2,\nu}N_2 + \cdots + \beta_{6,\nu}N_6. \end{cases}$$

Es erübrigt noch, Relationen zwischen den Moduln erster und zweiter Art ξ, $\bar{\xi}$ aufzustellen. Zu dem Zwecke trage ich in die vierte und zweite Formel (17) die Werthe von N_ϱ, $\bar{N}_\varrho$ aus der ersten und dritten Formel (16) ein. Schreibt man dann:

$$(18)\qquad \begin{cases} \beta_{1,\nu}a_{\varrho,1} + \beta_{2,\nu}a_{\varrho,2} + \cdots + \beta_{6,\nu}a_{\varrho,6} = c_{\nu,\varrho}, \\ \bar{\beta}_{1,\nu}\bar{a}_{\varrho,1} + \bar{\beta}_{2,\nu}\bar{a}_{\varrho,2} + \cdots + \bar{\beta}_{6,\nu}\bar{a}_{\varrho,6} = \bar{c}_{\nu,\varrho}, \end{cases}$$

so kommt:

$$(19)\qquad \begin{cases} \bar{\xi}_\nu = c_{\nu,1}\xi_1 + c_{\nu,2}\xi_2 + \cdots + c_{\nu,6}\xi_6, \\ \xi_\nu = \bar{c}_{\nu,1}\bar{\xi}_1 + \bar{c}_{\nu,2}\bar{\xi}_2 + \cdots + \bar{c}_{\nu,6}\bar{\xi}_6. \end{cases}$$

§ 3.

Berechnung neuer Moduln aus alten.

Wir behandeln jetzt folgende Aufgabe: *Es sollen die Moduln* ξ, $\bar{\xi}$ *der Linearform* $l = l_{\bar{n}}$ *bereits bekannt sein; es wird verlangt, die Moduln der folgenden Linearform zu berechnen:*

$$(U) = \frac{\partial U}{\partial l_0}\cdot u_0 + \frac{\partial U}{\partial l_1}\cdot u_1 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial l_6}\cdot u_6,$$

wo (U) *eine zu den* S *gehörige Function der Differenzen der Grössen* l *ist* (so dass also

$$\frac{\partial U}{\partial l_0} + \frac{\partial U}{\partial l_1} + \cdots + \frac{\partial U}{\partial l_6} = 0$$

ist).

Unsere Lösung wird sehr einfach, wenn wir beachten, dass sich die Grössen N_ϱ, $\overline{N}_\varrho$ (15), indem wir für die l die $\frac{\partial U}{\partial l}$ eintragen, folgendermassen zusammenziehen:

$$\left(x_0^\varrho - \frac{s_\varrho}{7}\right)\frac{\partial U}{\partial l_0} + \left(x_1^\varrho - \frac{s_\varrho}{7}\right)\frac{\partial U}{\partial l_1} + \cdots + \left(x_6^\varrho - \frac{s_\varrho}{7}\right)\frac{\partial U}{\partial l_6} = \frac{\partial U}{\partial \xi_\varrho},$$

$$\left(\overline{x}_0^\varrho - \frac{\overline{s}_\varrho}{7}\right)\frac{\partial U}{\partial \overline{l}_0} + \left(\overline{x}_1^\varrho - \frac{\overline{s}_\varrho}{7}\right)\frac{\partial U}{\partial \overline{l}_1} + \cdots + \left(\overline{x}_6^\varrho - \frac{\overline{s}_\varrho}{7}\right)\frac{\partial U}{\partial \overline{l}_6} = \frac{\partial U}{\partial \overline{\xi}_\varrho}.$$

Wir finden also einfach als Moduln erster Art von (U):

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha_{1,\nu}\frac{\partial U}{\partial \xi_1} + \alpha_{2,\nu}\frac{\partial U}{\partial \xi_2} + \cdots + \alpha_{6,\nu}\frac{\partial U}{\partial \xi_6}, \\ = \overline{\beta}_{1,\nu}\frac{\partial U}{\partial \overline{\xi}_1} + \overline{\beta}_{2,\nu}\frac{\partial U}{\partial \overline{\xi}_2} + \cdots + \overline{\beta}_{6,\nu}\frac{\partial U}{\partial \overline{\xi}_6} \end{array}\right.$$

und als Moduln zweiter Art:

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{l} \overline{\alpha}_{1,\nu}\frac{\partial U}{\partial \overline{\xi}_1} + \overline{\alpha}_{2,\nu}\frac{\partial U}{\partial \overline{\xi}_2} + \cdots + \overline{\alpha}_{6,\nu}\frac{\partial U}{\partial \overline{\xi}_6}, \\ = \beta_{1,\nu}\frac{\partial U}{\partial \xi_1} + \beta_{2,\nu}\frac{\partial U}{\partial \xi_2} + \cdots + \beta_{6,\nu}\frac{\partial U}{\partial \xi_6}. \end{array}\right.$$

Sei beispielsweise

$$U = \sum_{\nu=0}^{\nu=6}\left(l_\nu - \frac{1}{7}\sum_{\nu=0}^{\nu=6} l_\nu\right)^2 = \sum_{\nu=0}^{\nu=6}\left(\overline{l}_\nu - \frac{1}{7}\sum_{\nu=0}^{\nu=6}\overline{l}_\nu\right)^2.$$

So haben wir zunächst, wenn wir für die l, $\overline{l}$ ihre Werthe aus (1) etc. eintragen:

$$(21\text{a})\quad U = \sum a_{ik}\xi_i\xi_k = \sum b_{ik}\xi_i\overline{\xi}_k = \sum \overline{b}_{ik}\overline{\xi}_i\xi_k = \sum \overline{a}_{ik}\overline{\xi}_i\overline{\xi}_k.$$

Die Linearform (U) hat den Werth:

$$(U) = 2\left(l_0 - \frac{1}{7}\sum_{\nu=0}^{\nu=6} l_\nu\right)u_0 + \cdots + 2\left(l_6 - \frac{1}{7}\sum_{\nu=0}^{\nu=6} l_\nu\right)u_6$$

$$= 2\left(\overline{l}_0 - \frac{1}{7}\sum_{\nu=0}^{\nu=6}\overline{l}_\nu\right)\overline{u}_0 + \cdots + 2\left(\overline{l}_6 - \frac{1}{7}\sum_{\nu=0}^{\nu=6}\overline{l}_\nu\right)\overline{u}_6$$

und wir bekommen aus (20) (21) als zugehörige Moduln:

$$2(\alpha_{1,\nu} a_\xi a_1 + \alpha_{2,\nu} a_\xi a_2 + \cdots + \alpha_{6,\nu} a_\xi a_6),$$
$$2(\bar{\alpha}_{1,\nu} \bar{a}_{\bar{\xi}} \bar{a}_1 + \bar{\alpha}_{2,\nu} \bar{a}_{\bar{\xi}} \bar{a}_2 + \cdots + \bar{\alpha}_{6,\nu} \bar{a}_{\bar{\xi}} \bar{a}_6).$$

Diess aber sind genau die ursprünglichen Moduln, mit 2 multiplicirt:

$$2\xi_\nu,\ 2\bar{\xi}_\nu,$$

wie diess sein muss. (Ich habe dabei der Kürze halber wieder von der Symbolik Gebrauch gemacht, dass ich $\sum a_{ik}\xi_i\xi_k$ durch a_ξ^2 ersetzte).

§ 4.

Anwendung der gewonnenen Regeln auf p_i^3, q_i^3.

Unsere Regeln finden jetzt unmittelbare Anwendung, indem wir an Stelle der gerade betrachteten Formen U die Formen p_i^3, q_i^3 des vorigen Abschnitts treten lassen. In der That waren dieselben lineare Combinationen der folgenden Ausdrücke:

$$u_3 = \sum_{\nu=0}^{\nu=6} \left(l_\nu - \frac{1}{7}\sum_{\nu=0}^{\nu=6} l_\nu\right)^3,$$
$$\bar{u}_3 = \sum_{\nu=0}^{\nu=6} \left(\bar{l}_\nu - \frac{1}{7}\sum_{\nu=0}^{\nu=6} \bar{l}_\nu\right)^3.$$

Tragen wir in diese u_3, $\bar{u}_3$ jetzt zunächst statt der $l, \bar{l}$ die $\xi, \bar{\xi}$ ein, so entstehen zwei Functionen dritten Grades, die wir folgendermassen bezeichnen wollen:

$$(22) \qquad d_\xi^3,\ \bar{d}_{\bar{\xi}}^3.$$

Die Coefficienten derselben sind einfach folgendermassen definirt:

$$(23) \qquad \begin{cases} d_i d_k d_l = s_{i+k+l} - \frac{1}{7}(s_i s_{k+l} + s_k s_{l+i} + s_l s_{i+k}) + \frac{2}{49} s_i s_k s_l, \\ \bar{d}_i \bar{d}_k \bar{d}_l = \bar{s}_{i+k+l} - \frac{1}{7}(\bar{s}_i \bar{s}_{k+l} + \bar{s}_k \bar{s}_{l+i} + \bar{s}_l \bar{s}_{i+k}) + \frac{2}{49} \bar{s}_i \bar{s}_k \bar{s}_l. \end{cases}$$

Hiernach ergeben sich für die Linearform:

$$(24) \quad (U_3) = \left(l_0 - \frac{1}{7}\sum_{\nu=0}^{\nu=6} l_\nu\right)^2 u_0 + \cdots + \left(l_6 - \frac{1}{7}\sum_{\nu=0}^{\nu=6} l_\nu\right)^2 u_6$$

die folgenden Moduln erster Art:

$$(25) \qquad (\alpha_{1,\nu} d_1 + \alpha_{2,\nu} d_2 + \cdots + \alpha_{6,\nu} d_6)\, d_\xi^2$$

und die Moduln zweiter Art:

(26) $$(\beta_{1,\nu} d_1 + \beta_{2,\nu} d_2 + \cdots + \beta_{6,\nu} d_6)\, d_\xi^2.$$

Entsprechend erhält die Linearform:

(27) $$(\overline{U}_3) = \left(\overline{l}_0 - \frac{1}{7}\sum_{\nu=0}^{\nu=6}\overline{l}_\nu\right)^2 u_0 + \cdots + \left(\overline{l}_6 - \frac{1}{7}\sum_{\nu=0}^{\nu=6}\overline{l}_\nu\right)^2 u_6$$

die folgenden Moduln:

(28) $$(\overline{\beta}_{1,\nu}\overline{d}_1 + \overline{\beta}_{2,\nu}\overline{d}_2 + \cdots + \overline{\beta}_{6,\nu}\overline{d}_6)\,\overline{d}_{\overline{\xi}}^2,$$

resp.

(29) $$(\overline{\alpha}_{1,\nu}\overline{d}_1 + \overline{\alpha}_{2,\nu}\overline{d}_2 + \cdots + \overline{\alpha}_{6,\nu}\overline{d}_6)\,\overline{d}_{\overline{\xi}}^2.$$

Jetzt ist nach Formel (29) des vorigen Abschnitts:

(30) $$\begin{cases} p_l^3 = -\frac{\alpha}{3}\cdot\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=6}\left(\overline{l}_\nu - \frac{1}{7}\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=6}\overline{l}_\nu\right)^3 + \frac{\beta}{3}\cdot\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=6}\left(l_\nu - \frac{1}{7}\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=6}l_\nu\right)^3, \\ q_l^3 = -\frac{\beta}{3}\cdot\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=6}\left(\overline{l}_\nu - \frac{1}{7}\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=6}\overline{l}_\nu\right)^3 + \frac{\alpha}{3}\cdot\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=6}\left(l_\nu - \frac{1}{7}\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=6}l_\nu\right)^3, \end{cases}$$

die zugehörigen Linearformen aber, die wir (p_l^3), (q_l^3) nennen könnten, sind symbolisch als $p_l^2 p_u$, $q_l^2 q_u$ zu bezeichnen. *Daher ist mit Rücksicht auf* (24), (27):

(31) $$\begin{cases} p_l^2 p_u = -\frac{\alpha}{3}\cdot(\overline{U}_3) + \frac{\beta}{3}\cdot(U_3), \\ q_l^2 q_u = -\frac{\beta}{3}\cdot(\overline{U}_3) + \frac{\alpha}{3}\cdot(U_3), \end{cases}$$

und wir haben schliesslich dieses Resultat:

Sind ξ, $\overline{\xi}$ *die Moduln erster und zweiter Art einer Linearform* l, *so haben die Linearformen* $p_l^2 p_u$, $q_l^2 q_u$ *die Moduln erster Art:*

(32) $$\begin{cases} -\frac{\alpha}{3}\cdot(\overline{\beta}_{1,\nu}\overline{d}_1 + \cdots + \overline{\beta}_{6,\nu}\overline{d}_6)\,\overline{d}_{\overline{\xi}}^2 + \frac{\beta}{3}\cdot(\alpha_{1,\nu}d_1 + \cdots + \alpha_{6,\nu}d_6)\,d_\xi^2, \\ -\frac{\beta}{3}\cdot(\overline{\beta}_{1,\nu}\overline{d}_1 + \cdots + \overline{\beta}_{6,\nu}\overline{d}_6)\,\overline{d}_{\overline{\xi}}^2 + \frac{\alpha}{3}\cdot(\alpha_{1,\nu}d_1 + \cdots + \alpha_{6,\nu}d_6)\,d_\xi^2, \end{cases}$$

sowie die Moduln zweiter Art:

(33) $$\begin{cases} -\frac{\alpha}{3}\cdot(\overline{\alpha}_{1,\nu}\overline{d}_1 + \cdots + \overline{\alpha}_{6,\nu}\overline{d}_6)\,\overline{d}_{\overline{\xi}}^2 + \frac{\beta}{3}\cdot(\beta_{1,\nu}d_1 + \cdots + \beta_{6,\nu}d_6)\,d_\xi^2, \\ -\frac{\beta}{3}\cdot(\overline{\alpha}_{1,\nu}\overline{d}_1 + \cdots + \overline{\alpha}_{6,\nu}\overline{d}_6)\,\overline{d}_{\overline{\xi}}^2 + \frac{\alpha}{3}\cdot(\beta_{1,\nu}d_1 + \cdots + \beta_{6,\nu}d_6)\,d_\xi^2. \end{cases}$$

§ 5.

Herstellung der gesuchten Tschirnhaustransformation.

Um jetzt die Tschirnhaustransformation zu gewinnen, welche die beliebig vorgelegte Gleichung siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen zu einer ausgezeichneten Gleichung, oder einer kanonischen Gleichung macht, übertragen wir mit Hülfe der nun gewonnenen Formeln alle die einzelnen Schnitte, die wir im § 8 des vorigen Abschnitts aufgestellt haben.

Indem wir die Ausdrücke $X_k(2)$ zu Grunde legen, beginnen wir damit, irgend zwei Linearformen, zwischen denen keine Relation besteht:

$$(34)\qquad \begin{cases} x = \xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \cdots + \xi_6 X_6, \\ y = \eta_1 X_1 + \eta_2 X_2 + \cdots + \eta_6 X_6 \end{cases}$$

beliebig anzunehmen, d. h. derart anzunehmen, dass die Moduln ξ, η irgendwelche Grössen S sind. Sodann berechnen wir die Moduln zweiter Art dieser Formen mittelst (19).

Es gilt dann zunächst aus x, y eine *Normalform* herzustellen. Zu dem Zwecke sehen wir nach, ob unsere ξ, η etwa der Gleichung genügen:

$$\beta d_\xi^3 - \alpha d_{\bar\xi}^3 = 0, \quad \text{oder} \quad \beta d_\eta^3 - \alpha \bar{d}_{\bar\eta}^3 = 0.$$

In dem Falle haben wir an sich eine Normalform gefunden. Im anderen Falle berechnen wir nach (33), (34) die Moduln 1ter und 2ter Art der Formen

$$g_1 = p_x^2 p_u, \quad g_2 = p_x p_y p_u, \quad g_3 = p_y^2 p_u$$

und sehen wieder nach, ob diese Formen nicht etwa durch eine Relation:

$$c_1 g_1 + 2 c_2 g_2 + c_3 g_3 = 0$$

verbunden sind. Ist diess der Fall, dann ist $c_1 x + c_2 y$ eine Normalform.

Andern Falls berechne man die Moduln der Form

$$v = q_{g_1} q_{g_3} q_u$$

und sehe nach, ob nicht etwa x, y, v durch eine lineare Relation:

$$-\frac{2}{27} c_1 p_x^3 x + 2 c_2 v - \frac{2}{27} c_3 p_y^3 \cdot y = 0$$

verbunden sind. Dann ist $c_1 g_1 + c_2 g_3$ Normalform. Findet diess nicht statt, so nehme man ein weiteres beliebiges Grössensystem als Moduln 1ter Art von einer Form r; doch wähle man es so, dass r

nicht zum Tripel A gehört*). Aus den Moduln 1[ter] Art von r berechne man die der 2[ten] Art nach (19) und sehe sodann nach ob diese Moduln nicht die Relation befriedigen:

$$\beta d_\xi^3 - \alpha \bar{d}_\xi^3 = 0;$$

in diesem Falle ist r eine Normalform. Andern Falles berechne man die Moduln 1[ter] Art der Formen:

$$p_r^2 p_u, \quad p_r p_x p_u, \quad p_r p_y p_u, \quad p_r p_v p_u$$

nach (33) und stelle zwischen ihnen und den Formen g_1, g_2, g_3 eine Relation

$$c_0 p_r p_u^2 + 2 c_2 p_r p_x p_u + 2 c_2 p_r p_y p_u + 2 c_3 p_r p_v p_u + c_4 g_1 + c_5 g_2 + c_6 g_3 = 0$$

auf. *Die Form:*

$$c_0 r + c_1 x + c_2 y + c_3 v$$

ist dann eine Normalform. — Aus den Moduln einer Normalform 1[ter] Art x kann man jetzt die der ausgezeichneten Formen 2[ter] Art

$$p_x^2 p_u = g$$

mittelst der Formeln (33) berechnen.

Man nehme nun 2 beliebige Grössensysteme als Moduln 1[ter] Art zweier weiteren Linearformen y und z, doch wähle man sie so, dass zwischen diesen Grössen keine lineare Relation bestehe. Aus diesen Moduln 1[ter] Art berechne man dann nach (29) die Moduln 2[ter] Art, sowie nach (21a) die Grössen:

$$g_y = \sum g_i y_i, \quad g_z = \sum g_i z_i.$$

Hieraus kann man die Moduln ξ, η, ζ der 3 Normalformen berechnen:

$$\begin{aligned} g_y u_y + 9 g_q p_q p_y^2 q_u &= X, \\ g_y u_z + g_z u_y + 18 g_q p_q p_y p_z q_u &= Y, \\ g_z u_z + 9 g_q p_q p_z^2 q_u &= Z. \end{aligned}$$

Die Formen:

$$X + \lambda Y + \lambda^2 Z$$

sind dann sämmtlich ausgezeichnete Formen 1[ter] Art. Unter ihnen sind diejenigen kanonisch, bei denen x Wurzel der biquadratischen Gleichung ist:

$$\sum (X^{(k)} + \lambda Y^{(k)} + \lambda^2 Z^{(k)})^2 = (\lambda^2 a_\zeta + \lambda a_\eta + a_\xi)^2$$

$$= \lambda^4 a_\zeta^2 + 2\lambda^3 a_\eta a_\zeta + \lambda^2 (2 a_\xi a_\zeta + a_\eta^2) + 2\lambda a_\eta a_\xi + a_\xi^2 = 0.$$

Haben wir eine Wurzel dieser biquadratischen Gleichung bestimmt, so ist unsere Aufgabe erledigt. Denn sind ξ, $\bar{\xi}$ die Moduln einer ka-

*) Nämlich zum Tripel der Formen x, y, r.

nonischen Linearform y, so geht die vorgelegte Gleichung siebenten Grades durch die Substitutionen:

$$y_\nu = \xi_1 x_\nu + \xi_2\left(x_\nu^2 - \frac{s_2}{7}\right) + \cdots + \xi_6\left(x_\nu^6 - \frac{s_6}{7}\right),$$

$$\bar{y}_\nu = \bar{\xi}_1 \bar{x}_\nu + \bar{\xi}_2\left(\bar{x}_\nu^2 - \frac{\bar{s}_2}{7}\right) + \cdots + \bar{\xi}_6\left(\bar{x}_\nu^6 - \frac{\bar{s}_6}{7}\right)$$

in kanonische Gleichungen über.

Erscheint die hiermit gefundene Lösungsmethode weitläufig, so wolle man ihren durchaus elementaren Charakter beachten. Abgesehen von der Hülfsgleichung vierten Grades, die ganz zum Schlusse in Betracht kommt, gebrauchen wir ausser kleinen Additionen und Multiplicationen nur einmal (im 3. Abschn. § 2) die Auflösung eines Systems linearer Gleichungen.

Erlangen, im October 1884.

Die Maxima und Minima der einfachen Integrale zwischen festen Grenzen.

Von

LUDWIG SCHEEFFER in München.

Die folgenden Untersuchungen wurden ursprünglich allein zu dem Zwecke in Angriff genommen eine — gleich näher zu bezeichnende — wesentliche Lücke in der allgemeinen Theorie der zweiten Variation einfacher Integrale auszufüllen, welche nach den Arbeiten von Lagrange*), Jacobi**), Spitzer***), Hesse†), Clebsch††), Lipschitz†††), A. Mayer*†), Lundström*††) u. A. noch offen geblieben und auch bisher nicht ergänzt worden ist — abgesehen von einem speciellen Falle, den, wie ich nachträglich gesehen habe, bereits Herr Erdmann*†††) erörtert hat.

Nachdem jedoch dieses erste Ziel erreicht war, zeigte es sich, dass der eingeschlagene Weg weiter verfolgt werden konnte und schliesslich von einer ganz neuen Seite zur vollständigen Theorie der zweiten Variation führte. Die neue Art der Behandlung schien mir, abgesehn davon, dass sie keine wesentliche Lücke liess, in der Einfachheit des zu Grunde liegenden Gedankens und der Natürlichkeit, mit der alle analytischen Operationen sich aus jenem Gedanken ergaben, solche Vorzüge vor den bekannten Methoden zu besitzen, dass ich eine Darstellung derselben nicht für überflüssig hielt.

---

*) Vergl. z. B. Théorie des fonctions analytiques. Paris 1847, p. 280—284.

**) Crelle's Journ. 17, p. 68; auch Vorlesungen über Dynamik.

***) Wiener Ber. 1854, p. 1014.

†) Crelle's Journ. 54, p. 227.

††) Crelle's Journ. 57, p. 254 u. 335.

†††) Crelle's Journ. 65, p. 26.

*†) Beiträge zur Theorie der Maxima und Minima der einf. Integr. Leipzig 1866 (Habilitationsschrift); Crelle's Journ. 69, p. 238; Math. Ann. Bd. XIII, p. 53.

*††) Distinction des Max. et des Min. dans un problème isopérimétrique. Upsala 1869.

*†††) Schlömilch's Zeitschr. f. Math. 23, p. 367.

So entstand diese Arbeit. Derjenige Theil der darin abgeleiteten *Resultate*, welcher nicht die angedeutete Lücke betrifft, kann in *wesentlichen* Punkten keinen Anspruch auf Neuheit machen; die Kriterien des Maximums und Minimums sind eben — abgesehn von jener einen Lücke — den Hauptzügen nach seit Jacobi bekannt, und die Schwierigkeit liegt seither fast nur in der strengen Begründung derselben. Ich möchte daher als *wesentliches* Ergebniss meiner Untersuchung ausser dem anfangs genannten auch nur noch das hinstellen, dass sie — in Folge ihres von dem bisherigen principiell abweichenden Ganges — einiges neue Licht auf die *Begründung* der Theorie und die *innere Bedeutung* der Kriterien des Maximums und Minimums wirft. In *minder wesentlichen* Punkten hoffe ich freilich nebenbei doch noch eine grössere Vollständigkeit der bereits bekannten Resultate erreicht zu haben; dies gilt besonders von dem in § 3 behandelten Problem der *relativen* Maxima und Minima, dessen Untersuchung durch Herrn Mayer noch nicht ganz die wünschenswerthe Allgemeinheit besitzt.

Ich will zunächst, um die mehrfach erwähnte Lücke genauer bezeichnen zu können, einen Ueberblick über den gegenwärtigen Zustand der Theorie der zweiten Variation geben, auf welchen dieselbe besonders durch die Arbeiten von Jacobi, Clebsch, Lipschitz und Mayer gebracht worden ist. Hieran anknüpfend, werde ich einige weitere Mängel dieser Theorie hervorheben, in deren Beseitigung durch meine Untersuchungen ich einen Fortschritt sehe.

Es sei die Aufgabe gestellt, diejenigen Functionen $y_1 y_2 \dots y_n$ zu finden, welche das Integral

$$J = \int_{x^0}^{x^1} F(x\, y_1\, y_1' \dots y_n\, y_n')\, dx \qquad \left(\text{wo } y_i' = \frac{dy_i}{dx}\right)$$

zu einem Maximum oder Minimum machen. Die Grenzen x^0 und x^1, sowie die zu diesen Grenzen gehörenden Werthe von $y_1 y_2 \dots y_n$ seien gegeben. Wir nehmen ferner, da es sich hier nur um Auseinandersetzung der Principien handelt, an, die Functionen $y_1 y_2 \dots y_n$ seien durch keinerlei Bedingungsgleichungen mit einander verbunden.

Es muss dann die erste Variation ΔJ des Integrales J gleich Null sein. Dadurch ergeben sich n Differentialgleichungen zweiter Ordnung für $y_1 y_2 \dots y_n$, aus deren Integration die Grössen $y_1 y_2 \dots y_n$ als Functionen von x mit $2n$ willkürlichen Constanten $c_1 c_2 \dots c_{2n}$ hervorgehen. Diese Constanten bestimmen sich auf eine oder mehrere Arten durch die Bedingung, dass die Functionen $y_1 y_2 \dots y_n$ für $x = x^0$ und $x = x^1$ die vorgeschriebenen Grenzwerthe annehmen sollen.

Ist die Constantenbestimmung vollständig ausgeführt, so tritt die Frage auf, ob die gewonnenen Functionen $y_1\, y_2 \ldots y_n$ das Integral J wirklich zu einem Maximum oder Minimum und eventuell zu welchem von beiden machen. Die Entscheidung dieser Frage hängt ab von dem Vorzeichen der zweiten Variation

$$\Delta^2 J = \frac{1}{2}\int_{x^0}^{x^1} \Omega(\eta, \eta')\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x^0}^{x^1} \sum_{i,k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k} \eta_i \eta_k + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y'_k} \eta_i \eta'_k + \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k} \eta'_i \eta'_k \right) dx,$$

in welcher $\eta_1\, \eta_2 \ldots \eta_n$ beliebige stetige Functionen von x bedeuten, die nur an die Bedingung geknüpft sind, an den Grenzen x^0 und x^1 zu verschwinden. Ist nämlich die zweite Variation immer positiv, so findet ein Minimum, ist sie immer negativ, ein Maximum statt; nimmt sie, je nach der Wahl der Functionen $\eta_1\, \eta_2 \ldots \eta_n$, sowohl positive als negative Werthe an, so findet weder ein Minimum, noch ein Maximum statt; kann sie endlich zwar den Werth Null erhalten, nicht aber das Zeichen wechseln, so lässt sich die Frage nach dem Bestehen des Maximums resp. Minimums nicht mehr durch alleinige Betrachtung der zweiten Variation entscheiden.

Zur Untersuchung des Vorzeichens von $\Delta^2 J$ hat man nun etwa folgende Ueberlegung angestellt.

Enthielte die quadratische Form $\Omega(\eta, \eta')$ nur die Grössen $\eta_1 \eta_2 \ldots \eta_n$, nicht aber ihre Ableitungen $\eta_1'\, \eta_2' \ldots \eta_n'$ (in welchem Falle wir sie kurz mit $\Omega(\eta)$ bezeichnen), so würde die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Nichtnegativwerden von $\Delta^2 J$ darin bestehen, dass der Ausdruck $\Omega(\eta)$ bei beliebiger Wahl der Functionen $\eta_1\, \eta_2 \ldots \eta_n$ für keinen Werth von x zwischen x^0 und x^1 negativ sein dürfte. Denn wäre $\Omega(\eta)$ etwa für $\eta_i = \bar{\eta}_i\, (i = 1, 2, \ldots, n)$ und $x = \bar{x}$ negativ, so würden sich wegen der Stetigkeit von $\Omega(\eta)$ zwei Werthe x^2 und x^3 nahe an $\bar{x}$ so angeben lassen, dass $\Omega(\bar{\eta})$ auf der ganzen Strecke von $x = x^2$ bis $x = x^3$ negativ wäre. Bezeichnete man dann mit λ irgend eine für $x = x^2$ und $x = x^3$ verschwindende, zwischen x^2 und x^3 aber beständig positive Function von x und setzte die Functionen η_i von x^0 bis x^2, sowie von x^3 bis x^1 gleich Null, von x^2 bis x^3 aber gleich $\lambda \bar{\eta}_i$, so würde für dieses System von Functionen auch $\Delta^2 J$ negativ werden. Die angegebene Bedingung würde sich demnach als nothwendig erweisen; andererseits ist unmittelbar klar, dass sie auch hinreichend wäre.

Diese Betrachtung, welche sich nur auf den speciellen Fall erstreckt, dass die quadratische Form Ω die Grössen η' nicht enthält, legt für

den allgemeinen Fall folgenden Gedanken nahe. Da unter den $2n$ Functionen $\eta_1, \eta_1', \eta_2, \eta_2', \ldots, \eta_n, \eta_n'$ sich n ganz willkürliche (nämlich die η) befinden, so werden n aus jenen $2n$ Grössen linear zusammengesetzte Functionen $\omega_1\ \omega_2 \ldots \omega_n$ im Allgemeinen ebenfalls als willkürlich anzusehen sein. Man könnte daher versuchen, die Coefficienten solcher linearen Ausdrücke $\omega_1\ \omega_2 \ldots \omega_n$ als Functionen von x so zu bestimmen, dass die aus den $2n$ Elementen η und η' zusammengesetzte quadratische Form $\Omega(\eta, \eta')$ in eine nur aus den n Elementen ω gebildete quadratische Form $\Omega(\omega)$ übergeht. Gelänge dieser Versuch, so könnte man an der Form $\Omega(\omega)$ die eben von der Form $\Omega(\eta)$ angestellte Betrachtung im Wesentlichen wiederholen und erhielte unmittelbar die Kriterien für das Vorzeichen von $\Delta^2 J$.

Nun ist zwar eine derartige Ueberführung der Form $\Omega(\eta, \eta')$ in eine Form $\Omega(\omega)$ im Allgemeinen nicht möglich. Indessen lässt sich der zu Grunde liegende Gedanke doch realisiren, wenn man vorerst das Integral $\Delta^2 J$ durch eine partielle Integration umformt. Dies hat für den einfachsten Fall ($n = 1$) Lagrange, für den allgemeinen Fall Clebsch nachgewiesen.

Clebsch zeigte, dass man den Ausdruck $\Omega(\eta, \eta')$ immer auf die Form

$$\Omega_1(\eta, \eta') + \frac{d}{dx}\,\Omega_2(\eta)$$

bringen kann, wenn mit $\Omega_2(\eta)$ eine quadratische Form der n Grössen η bezeichnet wird, mit $\Omega_1(\eta, \eta')$ aber eine solche quadratische Form der $2n$ Grössen η und η', welche die Eigenschaft hat, sich in eine quadratische Form $\Omega_1(\omega)$ von n Grössen ω überführen zu lassen. Die Coefficienten von $\Omega_1(\omega)$ konnten dabei sehr einfach durch die Coefficienten von $\Omega(\eta, \eta')$ ausgedrückt werden, es ergab sich nämlich

$$\Omega_1(\omega) = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'}\,\omega_i\,\omega_k.$$

Vermittelst der Formel

$$\Omega(\eta, \eta') = \Omega_1(\omega) + \frac{d}{dx}\,\Omega_2(\eta)$$

kann man nun das Differential $\Omega(\eta, \eta')dx$ partiell integriren und erhält, da $\Omega_2(\eta)$ mit den Grössen η selbst an den Grenzen x^0 und x^1 verschwindet, für $\Delta^2 J$ den Werth

$$\Delta^2 J = \frac{1}{2}\int_{x^0}^{x^1} \Omega_1(\omega)\,dx.$$

In dieser Form lässt die zweite Variation die Anwendung der vorher angestellten Betrachtungen zu, und es ergiebt sich demnach als noth-

wendige und hinreichende Bedingung für das Nichtnegativwerden von $\Delta^2 J$, dass der Ausdruck

$$\Omega_1(\omega) = \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k} \omega_i \omega_k$$

bei beliebiger Annahme der Grössen $\omega_1\ \omega_2 \ldots \omega_n$ für keinen Werth von x zwischen den Grenzen x^0 und x^1 negativ werden darf.*)

Die Ausführung der partiellen Integration, auf welcher der eben gezogene Schluss beruht, setzt noch voraus, dass $\Omega_2(\eta)$ zwischen den Grenzen x^0 und x^1 nicht unendlich werde. Nun enthält $\Omega_2(\eta)$ nach den Untersuchungen von Clebsch und Mayer (vgl. p. 531) als Factor den reciproken Werth der Determinante

$$\Delta(x, x^0) = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1,2n} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2,2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{n,2n} \\ u^0_{11} & u^0_{12} & \ldots & u^0_{1,2n} \\ u^0_{21} & u^0_{22} & \ldots & u^0_{2,2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u^0_{n1} & u^0_{n2} & \ldots & u^0_{n,2n} \end{vmatrix}.$$

In derselben bedeuten die Grössen $u_{i\lambda}$ die Ableitungen der Functionen y_i nach den bei Integration der Differentialgleichungen der ersten Variation auftretenden Constanten c_λ, die Grössen $u^0_{i\lambda}$ dieselben Ableitungen für $x = x^0$. Die angestellten Betrachtungen gelten daher nur unter der Voraussetzung, dass die Determinante $\Delta(x, x^0)$ für keinen Werth der Variabeln x zwischen x^0 und x^1 verschwindet. (Das Verschwinden an der Stelle x_0 selbst ist nämlich, wie eine genauere Untersuchung lehrt, bedeutungslos, da hier auch die Grössen η verschwinden, sodass $\Omega_2(\eta)$ doch endlich bleibt). Ist jene Voraussetzung erfüllt, so kann $\Omega_2(\eta)$ nur noch in gewissen Ausnahmefällen, von denen hier abgesehen werden soll, unendlich gross werden, nämlich dann, wenn entweder die zweiten partiellen Ableitungen von F nach den y und y' oder die Grössen $u_{i\lambda}$ zum Theil unendlich gross werden.**)

*) Die Begründung dieses Satzes ist hier nur in den Hauptzügen angedeutet, lässt sich aber (unter der gleich folgenden Voraussetzung) streng durchführen. Insbesondere lässt sich noch zeigen, dass die Functionen η nicht etwa so gewählt werden können, dass die Ausdrücke ω identisch verschwinden, wodurch auch die zweite Variation $\Delta^2 J$ den Werth 0 erhalten würde. Cf. Mayer, Crelle's J. 69, p. 258—260.

**) Vergl. Erdmann. Schlömilchs Zeitschrift 23.

Durch die Clebsch'sche Transformation der zweiten Variation erhält man also definitiv folgenden Satz: *Verschwindet die Determinante $\Delta(x, x^0)$ für keinen Werth der Variabelen x zwischen x^0 und x^1, so hängt das* ***Maximum*** *oder* ***Minimum*** *des* ***Integrales*** *J davon ab, ob die quadratische Form*

$$\Omega_1(\omega) = \sum_{ik} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'} \omega_i \omega_k$$

bei beliebigen Werthen von $\omega_1\, \omega_2 \ldots \omega_n$ für alle Werthe von x zwischen x^0 und x^1 beständig negativ oder beständig positiv ist oder sowohl positiv als negativ werden kann.

Verschwindet dagegen die Determinante $\Delta(x, x^0)$ irgendwo zwischen x^0 und x^1, so ist die Clebsch'sche Transformation nicht mehr ausreichend, um über das Vorzeichen von $\Delta^2 J$ zu entscheiden.

Nun kann man in dem letzteren Falle direct beweisen, dass die zweite Variation bei einer gewissen Wahl der Functionen η gleich Null wird. Ist nämlich $\bar{x}^0$ die Stelle, an welcher $\Delta(x, x^0)$ verschwindet, und setzt man

$$\eta_i = \sum_{\lambda=1}^{2n} \alpha_\lambda u_{i\lambda}$$

(wo $u_{i\lambda}$, wie vorher, die partielle Ableitung von y_i nach c_λ bedeutet), so lassen sich die $2n$ Constanten $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{2n}$ so bestimmen, dass alle Functionen η_i sowohl für $x = x^0$, als für $x = \bar{x}^0$ gleich Null werden. Nimmt man dann von x^0 bis $\bar{x}^0$ die angegebenen Ausdrücke, von $\bar{x}^0$ bis x^1 aber den Werth Null für die Grössen η an, so wird $\Delta^2 J$ gleich Null. Dasselbe gilt offenbar noch, wenn x^1 mit $\bar{x}^0$ zusammenfällt.

Hieraus hat man geschlossen, dass in solchen Fällen kein Maximum oder Minimum des Integrales J stattfindet. Herr Mayer, dem man die Ausführung und Zusammenstellung der Kriterien des Maximums und Minimums auf Grund der von ihm neu bearbeiteten analytischen Untersuchungen von Clebsch verdankt, begründet (Habilitationsschrift p. 49 und Crelle J. 69, p. 253) jenen Schluss durch folgende Ueberlegung: „Wenn die zweite Variation verschwindet; so wird die Aenderung des Integrales von der dritten Ordnung und kann daher im Allgemeinen sowohl positiv, als auch negativ werden."

Diese Ueberlegung, obschon an sich richtig, kann nicht als ausreichend betrachtet werden. Denn offenbar kann es vorkommen, dass gleichzeitig mit der zweiten immer auch die dritte Variation verschwindet; und wenn auch dieser Fall in gewissem Sinne nicht der „allgemeine" ist, so bleibt doch unter allen Umständen *bei jedem einzelnen Problem* die Unsicherheit bestehen, ob nicht etwa gerade jener Ausnahmefall eintritt, eine Unsicherheit, welche erst durch

Untersuchung der dritten Variation gehoben werden kann. Die Betrachtung einiger der bekanntesten Probleme scheint sogar darauf hinzudeuten, dass jener Fall, der in der *Theorie* eine Ausnahme bildet, *in Wirklichkeit* nicht zu den Seltenheiten gehört. Er tritt beispielsweise bei dem Probleme der kürzesten Linien auf der Kugel ein, was man daraus schliessen darf, dass hier im Falle des Zusammentreffens der oberen Integralgrenze x^1 mit dem kritischen Punkte $\bar{x}^0$, dem Gegenpole des Punktes x^0, noch ein Minimum stattfindet.

Bei dem eben angeführten Probleme hört das Minimum auf, sobald die obere Grenze x^1 über die Stelle $\bar{x}^0$ hinausrückt. Es liegt nun die Frage nahe, ob dieses Verhalten etwa unter einer allgemeinen Regel steht, welche nicht von dem Verhalten an der Stelle $\bar{x}^0$ selbst und der Beschaffenheit der dritten Variation abhängig ist. Auf diese Frage giebt die Deduction des Herrn Mayer keine Antwort. Denn dieselbe zeigt keinen Unterschied, ob der kritische Punkt $\bar{x}^0$ mit x^1 zusammenfällt oder zwischen x^0 und x^1 liegt; in beiden Fällen wird auf die Nichtexistenz des Maximums und Minimums einzig und allein durch Bezugnahme auf die Glieder dritter Ordnung bei solchen Variationen η, welche nur von x^0 bis $\bar{x}^0$ von Null verschieden sind, geschlossen.

Nun hat schon Hesse es als wahrscheinlich bezeichnet, dass, wenn $\bar{x}^0$ *zwischen* x^0 und x^1 liegt, die zweite Variation nicht nur *verschwinden*, sondern *beide Vorzeichen annehmen kann.* Liesse sich dieses nachweisen, so würde mit voller Sicherheit auf das Nichtstattfinden eines Maximums oder Minimums zu schliessen sein. Nun ist die Vermuthung von Hesse in der That richtig; indes ist der Beweis vorläufig erst unter der Voraussetzung, dass nur eine einzige Grösse y in dem Integrale J vorkommt, von Herrn Erdmann erbracht worden.

Wir finden also hier eine Lücke; es ist diejenige, auf welche wir in der Einleitung Bezug genommen haben. Dieselbe wird in unserer Arbeit ausgefüllt werden; aber nicht vermittelst einer eigens zu dem Zwecke angestellten Untersuchung, sondern im Zusammenhange mit der Entwickelung der anderen Kriterien auf Grund eines einzigen Princips.

Die im Vorstehenden skizzirten Deductionen beruhen, soweit sie zutreffend sind, der Hauptsache nach auf der Clebsch'schen Transformationsformel

$$\Omega(\eta, \eta') = \Omega_1(\omega) + \frac{d}{dx}\,\Omega_2(\eta)$$

$$\left(\text{wo } \Omega_1(\omega) = \sum_{ih} \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_h}\,\omega_i \omega_h\right).$$

Die Ableitung dieser Formel ist mit grossen Schwierigkeiten verknüpft

gewesen und erst nach und nach dem Scharfsinne mehrerer grosser Mathematiker gelungen.

Der Nachweis zwar, dass eine solche Formel überhaupt existirt, d. h. dass sich die Coefficienten der quadratischen Form $\Omega_2(\eta)$ und der linearen Ausdrücke $\omega_1\ \omega_2 \ldots \omega_n$ als Functionen von x so bestimmen lassen, dass die obige Formel identisch wird, dieser Nachweis war leicht zu führen. Schon Lagrange hatte ihn für $n = 1$ erbracht, und Clebsch verallgemeinerte ihn für ein beliebiges n, indem er zeigte, dass die Anzahl der Differentialgleichungen, denen jene Coefficienten genügen müssen, wenn die Formel eine identische werden soll, gleich der Anzahl der Coefficienten selbst ist.

Aber es war nöthig, jene Coefficienten wirklich zu berechnen; denn, wie wir sahen, konnte die Formel nur dann mit Erfolg angewendet werden, wenn man sicher war, dass der Ausdruck $\Omega_2(\eta)$ zwischen den Integrationsgrenzen endlich blieb. Es war also nöthig, die für die Coefficienten von Ω_2 aufgestellten Differentialgleichungen zu integriren. Und hierin lag schon für $n = 1$ eine grosse Schwierigkeit.

Es ist das Verdienst Jacobis, den Weg zur Ueberwindung dieser Schwierigkeit gefunden zu haben. Jacobi zeigte nämlich für den Fall $n = 1$, dass die allgemeinen Integrale der Differentialgleichungen, denen die Coefficienten genügen müssen, sich aufstellen lassen, wenn man die von uns vorher mit $u_{i\lambda}$ bezeichneten Functionen, d. h. die partiellen Ableitungen der y_i nach der Integrationsconstanten c_λ einführt. Die hierauf bezüglichen Untersuchungen Jacobis wurden später von Hesse und Spitzer weitergeführt.

Clebsch stellte sich die Aufgabe, jene Differentialgleichungen, denen die Coefficienten genügen müssen, für ein beliebiges n durch Anwendung der Jacobi'schen Hülfsfunctionen zu integriren. Er fand in seiner ersten Arbeit über diesen Gegenstand, dass die Lösungen die Form gewisser analytischer Ausdrücke haben mussten, in denen ausser den $u_{i\lambda}$ noch eine Anzahl von Constanten vorkam. Diese Constanten durften indes nicht sämmtlich beliebig angenommen werden, da ihre Anzahl beträchtlich grösser war, als die Anzahl der willkürlichen Constanten, welche die Integration der Differentialgleichungen liefern konnte. Erst in einer zweiten Arbeit gelang es Clebsch, anzugeben, wie sich ein Theil jener Constanten noch bestimmen liess und gleichzeitig nachzuweisen, dass die übrig gebliebenen Constanten, deren Anzahl scheinbar immer noch zu gross war, sich auf die richtige Anzahl reducirten, da sie nur in einer gewissen Zahl von einander unabhängiger Verbindungen vorkamen.

Dass hiermit das Transformationsproblem gelöst war, d. h. dass die so bestimmten Coefficienten, in die Transformationsformel eingesetzt, dieselbe zu einer identischen machen mussten, konnte, trotz des in-

directen Verfahrens, nach diesen Untersuchungen über die Anzahl der willkürlichen Constanten keinem Zweifel mehr unterliegen. Gleichwohl war noch eine Verification der Transformationsformel resp. eine directe Ueberführung der linken Seite in die Form der rechten wünschenswerth. Eine solche wurde später auf eigenthümliche Art von Herrn Lipschitz geleistet.

Lipschitz benutzte nämlich die Resultate von Clebsch gleichsam nur als Wegweiser und gelangte vermittelst eines geschickten Kunstgriffes direct zu einer mit der Clebsch'schen übereinstimmenden Transformation der quadratischen Form $\Omega(\eta, \eta')$. Leider wird die Anwendung des besagten Kunstgriffes nicht motivirt, und es scheint, dass dieselbe mehr aus der consequenten und scharfsinnigen Ausbeutung eines glücklichen Zufalls, als aus a priori erkennbaren Gründen hervorgegangen ist. Lipschitz giebt selbst an, dass er die Erreichbarkeit der Transformation auf dem von ihm eingeschlagenen Wege zuerst an Beispielen bemerkt und dass allgemeine Verfahren aus denselben empirisch abgezogen habe.

Herr Mayer, welcher in zwei Arbeiten die ganze Theorie der zweiten Variation ausführlich dargestellt hat, giebt in seiner Habilitationsschrift der Methode von Clebsch trotz ihrer Länge und Umständlichkeit den Vorzug vor derjenigen von Lipschitz, weil die letztere — eben wegen jenes Kunstgriffes — weniger durchsichtig sei und sich aus der Natur der Sache nicht ergebe. Später hat Herr Mayer das Verfahren von Lipschitz seiner Kürze und äusseren Eleganz wegen doch angenommen und verallgemeinert, um es den eigenen, auf die Kriterien des Maximums und Minimums bezüglichen Untersuchungen zu Grunde zu legen.

Ich bin der Meinung, dass derselbe Vorwurf, welchen Mayer gegen die Entwickelungen von Lipschitz erhebt, bis zu einem gewissen Grade auch diejenigen von Clebsch und schon die älteren von Jacobi trifft. Es ist *ein allen diesen Untersuchungen gemeinsamer Mangel*, dass Hülfsmittel angewendet werden, deren Zweckmässigkeit zwar durch den Erfolg bewiesen wird, deren Hineinziehung in die Untersuchung aber im Voraus so wenig motivirt erscheint, dass man dieselbe nur als das Ergebniss vielfacher Versuche oder eines glücklichen Zufalles betrachten kann. Es gilt das in erster Linie von der Bildung und Einführung der Functionen $u_{i\lambda}$. Wie kommt man überhaupt dazu, diese Functionen zu bilden? Und welchen Nutzen kann man sich a priori von denselben für die Discussion der zweiten Variation versprechen? Derartige Fragen scheinen bisher noch nicht einmal aufgeworfen zu sein, und dennoch werden jene Functionen seit Jacobi in der Theorie der zweiten Variation angewendet und spielen sogar die wichtigste Rolle.

Hierin liegt nach meiner Meinung ein den Arbeiten von Clebsch und Lipschitz gemeinschaftlicher Mangel, der allerdings bei Lipschitz noch stärker hervortritt. Durch meine neue Behandlung der zweiten Variation hoffe ich denselben beseitigt zu haben. Meine Untersuchungen werden übrigens, indem sie sich in rein analytischer Beziehung einem Haupttheile nach auf die eleganten Entwickelungen von Lipschitz reduciren, den Nachweis liefern, dass die letzteren schliesslich doch in einem viel innigeren Zusammenhange mit den Principien der Variationsrechnung stehen, als man zunächst glauben möchte. Gerade der scheinbar so unmotivirte Kunstgriff, um dessen willen Herr Mayer zuerst das Verfahren von Lipschitz gegen dasjenige von Clebsch zurücksetzte, entspricht, wie wir sehen werden, dem Wesen der Sache viel mehr, als die langwierigen Untersuchungen von Clebsch. Nur wenn man die Transformation der zweiten Variation als Hauptziel in den Vordergrund stellt, erscheint der von Clebsch eingeschlagene Weg folgerichtiger. Jene Transformation ist aber selbst nur ein Hülfsmittel zur Erörterung der Hauptfrage nach dem Vorzeichen der zweiten Variation, und zwar ein Hülfsmittel, welches sich durch die vorhin von uns skizzirten Betrachtungen nicht gerade auf sehr natürliche Weise aus jener Hauptfrage ergiebt. Wir werden nur diese Frage selbst als Ziel ins Auge fassen und auf dem directen Wege dahin ohne besondere Bemühung unter anderem zur Transformation gelangen. In Folge des glücklichen Umstandes, dass die dabei auszuführenden Rechnungen, wie gesagt, in einem Haupttheile mit den kurzen Entwickelungen von Lipschitz zusammenfallen, erhält unsere Theorie auch in rein äusserlicher Beziehung die grösste Eleganz, die bisher erreicht worden ist.

Die Transformationen von Clebsch und Lipschitz sind allgemeiner, als es zur Ziehung endgültiger Schlüsse über das Stattfinden des Maximums oder Minimums nöthig und wünschenswerth erscheint. Herr Mayer musste über einen Theil der in der Transformationsformel vorkommenden willkürlichen Constanten eine bestimmte Verfügung treffen, um zu dem Satze zu gelangen, dass für das Vorzeichen der zweiten Variation dasjenige des Ausdruckes $\Omega_1(\omega)$ so lange massgebend ist, als die Determinante $\Delta(x, x^0)$ im Intervalle $x^0\, x^1$ nicht verschwindet. Nur bei einer bestimmten Verfügung nämlich wurde der Nenner der Transformation mit jener Determinante identisch, welche Identität überdies noch eines besonderen Beweises bedurfte. Aus diesem Grunde müssen wir die Ableitung der Transformationsformel in ihrer vollen *Allgemeinheit* als einen unnützen Umweg für die Untersuchung der Kriterien des Maximums oder Minimums betrachten. Freilich konnte

bei der von Clebsch eingeführten Fragestellung, wonach die Transformation selbst ein vorläufiges Ziel der Untersuchung war, jener Umweg nicht zwanglos vermieden werden. Auf unserem Wege wird sich die Transformation direct in derjenigen speciellen Form ergeben, welche Mayer zum Zwecke seiner Deductionen aus der allgemeinen Form abscheiden musste. Hierin scheint mir ebenfalls eine — allerdings mehr nebensächliche — Verbesserung der Theorie zu liegen.

Es sind mehrfach Versuche gemacht worden, die von Jacobi ohne Beweis aufgestellten Kriterien des Maximums und Minimums mit einfacheren Hülfsmitteln, als den von Clebsch, Lipschitz und Mayer angewendeten, zu begründen. Diese Versuche können indes, soweit sie mir bekannt geworden sind, sämmtlich nicht als befriedigend bezeichnet werden. Denn entweder führen sie, wie die Untersuchungen von Zmurko*), zu ganz unvollständigen Resultaten, oder sie entbehren, wie die Entwickelungen von Lundström**), der nothwendigen Strenge. Ich sehe daher von einer Darstellung derselben ab.

Indem ich nun zur Entwickelung meiner eigenen Theorie übergehe, beginne ich damit, in Kürze den allgemeinen Gedankengang, den ich innehalten werde, zu skizziren (§ 1). Ich behandele darauf (§ 2) zunächst den speciellen Fall $n = 1$, d. h. den Fall, wo das Integral J nur *eine* unbekannte Function y nebst ihrer Ableitung enthält, da unter dieser Bedingung die Theorie einen Grad der Abrundung erreicht, den ich ihr unter allgemeineren Voraussetzungen nicht zu geben vermochte. In § 3 folgt sodann die Untersuchung für ein beliebiges n, wobei noch angenommen wird, dass zwischen den Functionen y_i Bedingungsgleichungen (endliche und Differentialgleichungen) bestehen. In § 4 endlich wird die vollständige Theorie des Minimums eines Integrales J (einschliesslich der ersten Variation) unter der Voraussetzung entwickelt, dass die Functionen $y_1\, y_2 \ldots y_n$ durch endliche Gleichungen mit einander verknüpft sind, und dass ausserdem gewisse bestimmte Integrale, welche jene Functionen nebst ihren ersten Ableitungen enthalten, vorgeschriebene Werthe annehmen sollen.

---

*) Wiener Berichte 36, p. 235 (cf. Mayer in Ohrtmanns Jahrbuch f. 1876, pag. 220).

**) a. a. O. Lundström hat das Verdienst, zuerst die genauen Kriterien des Maximums und Minimums bei den isoperimetrischen Problemen im engeren Sinne aufgestellt zu haben, wenn auch ohne ausreichende Begründung.

§ 1.

Darstellung des Gedankenganges im Allgemeinen.

Es handle sich um das Maximum oder Minimum des Integrales

$$J = \int_{x^0}^{x^1} F(x\, y_1 y_1' \cdots y_n y_n')\, dx,$$

in welchem die Functionen $y_1 \ldots y_n$ (nicht ihre Ableitungen $y_1' \ldots y_n'$) stetig sein und an den Grenzen x^0 und x^1 vorgeschriebene Werthe erhalten sollen. Wir wollen uns auf den Fall des Minimums beschränken, da das Maximum als Minimum von $-J$ betrachtet werden kann. Ferner nehmen wir zunächst der grösseren Uebersichtlichkeit wegen an, es bestünden keinerlei Bedingungsgleichungen zwischen den unbekannten Functionen $y_1 y_2 \ldots y_n$.

Soll ein Minimum stattfinden, so muss die erste Variation

$$\Delta J = \int_{x^0}^{x^1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} \eta_i + \frac{\partial F}{\partial y_i'} \eta_i' \right) dx$$

für jedes beliebige System von Functionen η_i gleich Null sein, vorausgesetzt nur, dass dieselben stetig sind und an den Grenzen x^0 und x^1 verschwinden. Die Ableitungen η_i' brauchen nicht stetig zu sein.

Der Ausdruck ΔJ kann nun durch partielle Integration auf die Form

$$\Delta J = \int_{x^0}^{x^1} \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_i'} \right) \eta_i\, dx$$

gebracht werden; denn das Integral

$$\int_{x^0}^{x^1} \frac{d}{dx} \left(\sum_i \frac{\partial F}{\partial y_i'} \eta_i \right) dx,$$

welches die Differenz der beiden für ΔJ angegebenen Ausdrücke darstellt, ist immer gleich Null*) (auch wenn die Grössen η_i' im Integrationsintervalle beliebig oft unstetig sind). Aus der zweiten Form

*) Es wird hierbei — wie im Folgenden überall — stillschweigend vorausgesetzt, dass die dem Minimum entsprechenden Functionen $y_1 y_2 \ldots y_n$ nicht nur, wie es die Bedingungen der Aufgabe verlangen, selbst stetig sind, sondern auch durchweg stetige Ableitungen $y_1' y_2' \ldots y_n'$ besitzen. Ohne diese Voraussetzung sind die oben angegebenen Bedingungen für das Verschwinden der ersten Variation zwar noch nothwendig, aber nicht mehr hinreichend.

von ΔJ ergeben sich dann in bekannter Weise als nothwendige und hinreichende Bedingungen für das Verschwinden dieses Ausdruckes bei beliebiger Annahme der η_i die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dieselben reichen hin, auch wenn die Ableitungen der η_i nicht stetig sind; wir heben diess besonders hervor, weil wir im Folgenden gerade solche Functionen η_i mit unstetigen Ableitungen mehrfach in Betracht ziehen werden.

Aus der Integration jener Differentialgleichungen gehen die Grössen $y_1 y_2 \ldots y_n$ als Functionen von x mit $2n$ willkürlichen Constanten $c_1 c_2 \ldots c_{2n}$ hervor:

$$y_i = \varphi_i(x c_1 c_2 \ldots c_{2n}). \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Hat man die Constanten $c_1 c_2 \ldots c_{2n}$ vermittelst der Grenzbedingungen vollständig bestimmt, so tritt die Frage auf, ob das Integral J wirklich zu einem Minimum wird, d. h., da die erste Variation identisch verschwindet, ob die zweite Variation

$$\Delta^2 J = \frac{1}{2}\int_{x^0}^{x^1} \sum_{i,k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k} \eta_i \eta_k + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k'} \eta_i \eta_k' + \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'} \eta_i' \eta_k' \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x^0}^{x^1} \Omega(\eta, \eta') \, dx$$

beständig positiv resp. nie negativ ist.

Wir können uns für $n = 1$ und $n = 2$ die Grössen $y_1 y_2 \ldots$ als Functionen von x durch eine ebene oder räumliche Curve dargestellt denken. Für $n > 2$ ist diess zwar nicht mehr möglich, indess hoffen wir keinem Missverständnisse zu begegnen, wenn wir uns im Folgenden der Kürze wegen auch für den allgemeinen Fall einiger aus der graphischen Darstellung entlehnter Bezeichnungen bedienen.

Die zweite Variation $\Delta^2 J$ ist, wenn wir für $y_1 y_2 \ldots$ die Functionen $\varphi_1 \varphi_2 \ldots$ einsetzen und die Grenzen x^0 und x^1 ein für alle Male als fest betrachten, nur von der Wahl der Functionen η_i und der Constanten c_λ abhängig. Ist $\Delta^2 J$ für das durch die gegebenen Grenzbedingungen bestimmte System der Constanten c_λ bei jeder Wahl der Functionen η_i positiv, so wird $\Delta^2 J$ im Allgemeinen auch dann noch bei jeder Wahl der Functionen η_i positiv sein, wenn wir den Constanten c_λ andere, von den ursprünglichen genügend wenig verschiedene Werthe $c_\lambda + \gamma_\lambda$ geben. Es wird daher im Allgemeinen auch das Integral

$$J' = \int_{x^0}^{x^1} F(xy_1y_1' \cdots y_ny_n')\,dx,$$

wenn darin, zum Unterschiede von J, den Functionen y_i für $x = x^0$ und $x = x^1$ nicht die Grenzwerthe $\varphi_i(x^0 c_1 c_2 \ldots c_{2n})$ und $\varphi_i(x^1 c_1 c_2 \ldots c_{2n})$, sondern die Grenzwerthe $\varphi_i(x^0, c_1 + \gamma_1, c_2 + \gamma_2 \cdots c_{2n} + \gamma_{2n})$ und $\varphi_i(x^1, c_1 + \gamma_1, c_2 + \gamma_2 \cdots c_{2n} + \gamma_{2n})$ vorgeschrieben gedacht werden, durch die Functionen

$$y_i = \varphi_i(x, c_1 + \gamma_1, c_2 + \gamma_2 \cdots c_{2n} + \gamma_{2n}), \quad (i = 1, 2 \cdots n)$$

einen Minimalwerth erhalten.

Man könnte diesen Satz, welcher die Grundlage der folgenden Entwickelungen bildet, vielleicht durch Stetigkeitsbetrachtungen streng beweisen. Da wir jedoch vorläufig nur einen Ueberschlag über die anzustellenden Untersuchungen machen wollen, möchten wir auf den strengen Beweis zunächst verzichten, indem wir darauf rechnen, dass dem Leser die Richtigkeit des Satzes ohne Weiteres einleuchten wird. Später werden wir sehen, dass der Beweis in Folge anderer, sich von selbst ergebender Thatsachen überhaupt überflüssig wird, da der aufgestellte Satz schliesslich doch nur die Rolle eines Wegweisers für die Theorie der zweiten Variation spielt und nirgends zur strengen Begründung der Resultate benutzt werden wird.

Um indess vor der Hand ganz correct im Ausdrucke zu sein, geben wir dem Satze die folgende vorsichtig gehaltene Formulirung:

„Ist das Integral J ein Minimum, so lässt sich erwarten, dass das Integral J', welches aus J durch eine genügend kleine Veränderung der Constanten $c_1 c_2 \ldots c_{2n}$ entsteht, im Allgemeinen ebenfalls ein Minimum ist. Genauer: Wenn das Integral J, längs der durch die Gleichungen $y_i = \varphi_i(xc_1 c_2 \ldots c_{2n})$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ definirten Curve c genommen, kleiner ist, als durch Integration auf jeder anderen, zwischen denselben Endpunkten beschriebenen, genügend nahe verlaufenden Curve, so lässt sich erwarten, dass auch das Integral J' auf der durch Variation der Constanten $c_1 c_2 \ldots c_{2n}$ aus c entstehenden Curve c' kleiner wird, als auf jeder anderen, genügend nahe gelegenen Curve, welche dieselben Endpunkte hat."

Ja noch mehr. Da das Stattfinden des Minimums von J voraussetzt, dass nach Annahme zweier beliebigen Werthe x^2 und x^3 zwischen x^0 und x^1 und Bestimmung der diesen Werthen entsprechenden Punkte der Curve c, A^2 und A^3, die Integration des Differentials

$$F(xy_1y_1' \ldots y_ny_n')\,dx$$

von A^2 bis A^3 längs c einen kleineren Werth giebt, als längs jeder anderen genügend nahen Curve, so lässt sich erwarten, dass, wenn $A^{2'}$ und $A^{3'}$ die beiden entsprechenden Punkte der Curve c' sind, die

Integration jenes Differentials zwischen $A^{2'}$ und $A^{3'}$ ebenfalls längs der Curve c' einen kleineren Werth geben wird, als längs jeder anderen nahegelegenen Curve.

Wir wollen alle Curven, welche aus c durch Veränderung der Constanten $c_1 c_2 \ldots c_{2n}$ entstehen, welche also die Differentialgleichungen der ersten Variation befriedigen, kurz „*Minimalcurven*" nennen. Dieselben haben im Allgemeinen die Eigenschaft, durch zwei ihrer Punkte bestimmt zu sein. Es möge ferner die Bezeichnung J_c für das über eine Curve c genommene Integral J eingeführt werden. Aus den eben angestellten Betrachtungen geht dann folgendes Princip hervor:

Princip.

Macht die zwischen den gegebenen Punkten A^0 und A^1 beschriebene Curve c das Integral J zu einem Minimum, so ist, wenn b irgend eine andere, genügend nahegelegene, aus mehreren Stücken $b', b'' \ldots$ bestehende Verbindungslinie jener beiden Punkte bedeutet, nicht nur

$$J_{b'+b''+\cdots} - J_c > 0 \quad \text{(vergl. Fig.)}$$

und, wenn man die Stücke $b', b'', \ldots$ durch Minimalcurven $c', c'' \ldots$ zwischen denselben Endpunkten ersetzt

$$J_{c'+c''+\cdots} - J_c > 0,$$

sondern es lässt sich ausserdem noch erwarten, dass auch

$$J_{b'} - J_{c'} > 0,$$
$$J_{b''} - J_{c''} > 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

sein wird.

Umgekehrt ist ohne Weiteres klar, dass die Relationen der letzten Gruppe, wenn sie für jede Curve b und jede Zerlegung einer solchen in einzelne Stücke gelten, für sich allein hinreichend sind, um das Bestehen des Minimums zu erweisen; denn setzen wir speciell $b' = b$, $b'' = 0$, $b''' = 0 \ldots$, so erhalten wir die für das Minimum charakteristische Relation

$$J_b - J_c > 0.$$

Dies ist der in allgemeinster Weise ausgesprochene Grundgedanke, dessen Durcharbeitung uns zu endgültigen Criterien des Minimums führen wird. In versteckter Weise ist derselbe bereits in den älteren Arbeiten über die zweite Variation enthalten. Insbesondere ist die

von Clebsch vorgenommene Transformation, wie wir später sehen werden, nichts anderes, als eine analytische Verification jenes Grundgedankens.

Um das Princip mit Erfolg anzuwenden, müssen wir die Curve b mindestens in zwei Stücke zerlegen. Denn nähmen wir nur ein Stück $b'(=b)$ an, so würde die Curve c' mit der Curve c die beiden Endpunkte A^0 und A^1 gemein haben und daher im Allgemeinen mit ihr zusammenfallen. Wir würden dann wieder bloss auf die Gleichung $J_b > J_c$ zurückgeführt werden. Durch Zerlegung in zwei Stücke dagegen erhält man schon neue Resultate.

Es ist indess zweckmässig, gleich eine Zerlegung in vier Stücke vorauszusetzen, und zwar auf besondere Weise. Wir wollen nämlich annehmen, die Curve b falle von A^0 bis zu einem gewissen Punkte A^2, und ebenso von einem gewissen anderen Punkte A^3 bis A^1, mit der Curve c zusammen und entferne sich nur zwischen A^2 und A^3 von derselben. Offenbar liegt hierin keine Beschränkung der Allgemeinheit, da wir die Punkte A^2 und A^3 unbestimmt lassen und die Möglichkeit nicht ausschliessen wollen, dass dieselben resp. mit A^0 und A^1 zusammenfallen. Auf dem zwischen A^2 und A^3 gelegenen Theile von b

fixiren wir einen beliebigen Punkt A und bezeichnen (s. Figur) das Stück A^2A der Curve mit b', das Stück AA^3 mit b'', die Stücke A^0A^2 und A^3A^1 resp. mit c''' und c^{IV}.

Die Curve c ist bestimmt durch die n Functionen $y_1 y_2 \dots y_n$; wir wollen diese Functionen kurz Ordinaten, die Variabele x Abscisse nennen. Die Curve b, und speciell der Punkt A, habe die Coordinaten $x, y_1 + \eta_1, y_2 + \eta_2 \cdots y_n + \eta_n$. Die resp. zwischen A^2 und A und zwischen A und A^3 sich erstreckenden Curven c' und c'' sollen Minimalcurven sein. Dieselben mögen aus der Curve c durch Vermehrung der in den y_i enthaltenen Constanten $c_1 c_2 \dots c_{2n}$ resp. um die Grössen $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2n}$ und $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{2n}$ entstehen. Wir bezeichnen die laufenden Coordinaten dieser Curven c' und c'' zum Unterschiede von den Coordinaten der Curve b und speciell des Punktes A mit überstrichenen Buchstaben und wählen überdiess die Zeichen u (*für* c') und v (für c'') statt des für den Punkt A zu verwendenden Zeichens η, so dass c' die Coordinaten $\bar{x}, \bar{y}_1 + \bar{u}_1, \bar{y}_2 + \bar{u}_2 \dots \bar{y}_n + \bar{u}_n$, c'' die Coordinaten $\bar{x}, \bar{y}_1 + \bar{v}_1, \bar{y}_2 + \bar{v}_2 \dots \bar{y}_n + \bar{v}_n$ besitzt.

Definiren wir nun die Functionen $\bar{u}_{i\lambda}$ durch die Gleichungen

$$\bar{u}_{i\lambda} = \left[\frac{\partial y_i}{\partial c_\lambda}\right]_{x=\bar{x}} \quad (i = 1, 2 \cdots n; \;\; \lambda = 1, 2 \cdots 2n),$$

so haben wir mit Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}_i &= \sum_{\lambda=1}^{2n} \alpha_\lambda \bar{u}_{i\lambda}\\ \bar{v}_i &= \sum_{\lambda=1}^{2n} \beta_\lambda \bar{u}_{i\lambda}\end{aligned}\right\} (i = 1, 2 \cdots n)$$

zu setzen und die $4n$ Grössen α_λ und β_λ so zu bestimmen, dass die beiden Curven c' und c'' resp. durch A^2 und A und durch A und A^3 gehen, d. h., analytisch ausgedrückt, so, dass $\bar{u}_{i\lambda}$ für $\bar{x} = x^2$ gleich Null, für $\bar{x} = x$ aber gleich η_i, und $\bar{v}_i$ für $\bar{x} = x$ gleich η_i, für $\bar{x} = x^3$ aber gleich Null wird*). Dies ist immer möglich, wenn der Punkt A so gewählt ist, dass keine der Determinanten

$$\Delta(x, x^2) = \sum \pm u_{11} u_{22} \cdots u_{nn} \overset{2}{u}_{1,n+1} \overset{2}{u}_{2,n+2} \cdots \overset{2}{u}_{n,2n}$$

und

$$\Delta(x, x^3) = \sum \pm u_{11} u_{22} \cdots u_{nn} \overset{3}{u}_{1,n+1} \overset{3}{u}_{2,n+2} \cdots \overset{3}{u}_{n,2n}$$

$$\left(\text{wo} \quad u_{i\lambda} = [\bar{u}_{i\lambda}]_{\bar{x}=x}, \quad \overset{2}{u}_{i\lambda} = [\bar{u}_{i\lambda}]_{\bar{x}=x^2}, \quad \overset{3}{u}_{i\lambda} = [\bar{u}_{i\lambda}]_{\bar{x}=x^3}\right)$$

den Werth Null hat. Dass nämlich diese Determinante nicht identisch, d. h. für jeden Werth von x, verschwindet, lässt sich beweisen.

Das zwischen A^2 und A^3 gelegene Stück der Curve c kann mit $c - c''' - c^{IV}$ bezeichnet werden. Die Relation

$$J_{c'+c''} - J_{c-c'''-c^{IV}} > 0$$

stellt nun jedenfalls eine *nothwendige* Bedingung des Minimums dar. Der Ausdruck auf der linken Seite ist aber, wenn nur die Glieder zweiter Ordnung berücksichtigt werden (die Glieder erster Ordnung verschwinden ja identisch!), gleich

$$\frac{1}{2}\int_{x^2}^{x} \bar{\Omega}(\bar{u}, \bar{u}')\, d\bar{x} + \frac{1}{2}\int_{x}^{x^3} \bar{\Omega}(\bar{v}, \bar{v}')\, d\bar{x}.$$

---

*) Was die Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung betrifft, so könnte man zeigen, dass dieselbe auf das Vorzeichen gewisser im Folgenden zu untersuchenden Differenzen ohne Einfluss ist. Jedoch ist es zweckmässiger, wenn man die Wirkung jener Vernachlässigung einfach darin setzt, dass die Curven c' und c'', wie sie hier mit Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung definirt werden, nicht mehr eigentliche Minimalcurven, sondern solche Curven werden, die sich nahe an die zwischen A^2 und A und zwischen A und A^3 verlaufenden Minimalcurven anschliessen. Wir werden nämlich die Eigenschaft der Curven c' und c'', *Minimalcurven* zu sein, nicht zur strengen Begründung von Resultaten, sondern nur zur durchsichtigen Darstellung des leitenden Gedankens benutzen.

Hier sind $\overline{\Omega}(\overline{u}, \overline{u}')$ und $\overline{\Omega}(\overline{v}, \overline{v}')$ diejenigen Ausdrücke, welche aus $\Omega(\eta, \eta')$ für $x = \overline{x}$ und $\eta_i = \overline{u}_i$ resp. $= \overline{v}_i$ hervorgehen. Wir bezeichnen die vorstehenden Integrale, da sie als zweite Variationen des Integrales J betrachtet werden können, mit $(\Delta^2 J)_{c'}$ und $(\Delta^2 J)_{c''}$, ihre Summe auch mit $(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ *).

Der Ausdruck $(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ darf also, wenn ein Minimum stattfinden soll, keinenfalls negativ sein. Nun haben die Functionen $\overline{u}_1\, \overline{u}_2 \ldots \overline{u}_n$ und $\overline{v}_1\, \overline{v}_2 \ldots \overline{v}_n$, da sie linear aus den Functionen $\overline{u}_{i\lambda}$ zusammengesetzt sind, Eigenschaften, welche die unmittelbare Integration der Differentiale $\frac{1}{2}\, \overline{\Omega}(\overline{u}, \overline{u}')\, d\overline{x}$ und $\frac{1}{2}\, (\overline{\Omega}(\overline{v}, \overline{v}')\, d\overline{x}$ ganz allgemein ermöglichen. Bezeichnen wir die Integralfunctionen resp. mit $\overline{W}(\overline{u}, \overline{u}')$ und $\overline{W}(\overline{v}, \overline{v}')$, so wird

$$(\Delta^2 J)_{c'} = \Big[\overline{W}(\overline{u}, \overline{u}')\Big]_{\overline{x}=x^2}^{\overline{x}=x},$$

$$(\Delta^2 J)_{c''} = \Big[\overline{W}(\overline{v}, \overline{v}')\Big]_{\overline{x}=x}^{\overline{x}=x^3}.$$

Die Ausdrücke rechts sind abhängig von der Lage der drei Punkte A^2, A und A^3, d. h. von den Grössen x^2; $x, \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$; x^3. Wir wollen dies dadurch andeuten, dass wir diese Grössen als Argumente hinzufügen, sodass schliesslich, wenn wir neue Functionszeichen W_1 und W_2 einführen

$$(\Delta^2 J)_{c'} = W_1(x^2, x, \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_n)$$

und

$$(\Delta^2 J)_{c''} = W_2(x^3, x, \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_n)$$

wird. Durch die Relation

$$(\Delta^2 J)_{c'+c''} = W_1(x^2, x, \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_n) + W_2(x^3, x, \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_n) \geq 0$$

wird dann die vorher genannte *nothwendige* Bedingung des Minimums analytisch dargestellt. Die Functionen W_1 und W_2 sind übrigens quadratische Formen von $\eta_1 \ldots \eta_n$.

Aus der vorstehenden Relation lässt sich nun — was man freilich erst nach Ausführung der Rechnung erkennen kann — die *Nothwendigkeit* der folgenden beiden, ihrem wesentlichen Inhalte nach zuerst von Jacobi aufgestellten Bedingungen des Minimums direct ableiten:

„*Die quadratische Form* $\sum\limits_{i,h=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i'\, \partial y_h'}\, \eta_i \eta_h$ *darf im Intervalle* $x^0 x^1$ *für*

*) Die Vernachlässigung der Glieder von höherer, als der zweiten Ordnung an dieser Stelle ist dadurch motivirt, dass die Glieder zweiter Ordnung, wenn man die Curve b und mit ihr den Punkt A nahe genug an der Curve c, d. h. die Grössen $\eta_1 \eta_2 \ldots \eta_n$ klein genug annimmt, das Vorzeichen der Differenz $J_{c'+c''} - J_{c-c'''-c^{IV}}$ bestimmen.

kein System von Werthen der Grössen $\eta_1 \eta_2 \ldots \eta_n$ *negativ werden*", und „*die Determinante* $\Delta(x, x^0)$ *darf in demselben Intervalle nicht ihr Zeichen wechseln*".

Es zeigt sich nämlich *erstens*, dass, wenn die drei Punkte A^2, A und A^3 sich in inf. einander nähern, d. h. wenn die drei Grössen x^2, x, x^3 demselben Grenzwerthe x zustreben, der Ausdruck $(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ abgesehen von einem positiven Factor, in die quadratische Form $\sum_{i,k} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'} \eta_i \eta_k$, die Bedingung $(\Delta^2 J)_{c'+c''} \geqq 0$ also in das *erste* Jacobi'sche Criterium (I) übergeht. Es zeigt sich *ferner*, dass der Ausdruck $(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ das Zeichen ändert, wenn man dem Punkte A nach einander zwei Lagen zu verschiedenen Seiten einer Stelle x giebt, an welcher eine der Determinanten $\Delta(x, x^2)$ und $\Delta(x, x^3)$ verschwindet. Hiermit ist, da wir der Abscisse x^2 jeden beliebigen Werth und auch den Werth x^0 geben können, die Nothwendigkeit des *zweiten* Jacobischen Criteriums (II) nachgewiesen und so gleich hier diejenige Lücke in der Theorie der zweiten Variation ausgefüllt, welche die erste Veranlassung zu unseren Untersuchungen gab.

In dem speciellen Falle $n = 1$ lässt sich endlich noch drittens direct nachweisen, dass die beiden Voraussetzungen „$\sum_{i,k} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'} \eta_i \eta_k$ *ist für beliebige Werthe der Veränderlichen x und der Grössen η_i positiv*" und „$\Delta(x, x^0)$ *verschwindet zwischen x^0 und x^1 nicht*" hinreichend sind, damit unter allen Umständen die Relation $(\Delta^2 J)_{c'+c''} \geqq 0$ stattfinde. Für $n > 1$ ist zwar der Satz auch noch richtig, doch scheint ein directer Nachweis schwierig zu sein.

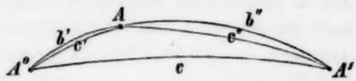
Wir halten daher vorläufig nur fest, dass aus der Relation $(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ die Jacobi'schen Bedingungen I und II als *nothwendige* Bedingungen des Minimums folgen, und bezeichnen die übrigen Bedingungen, von denen jene Relation etwa noch abhängen könnte, in ihrer Gesammtheit mit III, ohne zunächst weitere Untersuchungen über dieselben anzustellen.

Es folgt nun der *zweite Theil* der durch unser allgemeines Princip vorgezeichneten Entwickelungen, nämlich die Verification der Beziehungen

$$J_{b'} - J_{c'} > 0,$$
$$J_{b''} - J_{c''} > 0.$$

Es sind dieses diejenigen Beziehungen, von denen wir, ohne die Nothwendigkeit zunächst streng nachzuweisen, sagen konnten, ihr Bestehen im Falle des Minimums sei *zu erwarten*.

Wir wollen bei der Verification jener Beziehungen der Einfachheit wegen annehmen, der Punkt A^2 falle mit A^0, der Punkt A^3 mit A^1 zusammen, so dass sich die Curve b ganz und gar auf die beiden Stücke b' und b'' reducirt (vergl. Fig.)



Berücksichtigen wir dann wieder nur die Glieder bis zur zweiten Ordnung, so erhalten wir

$$J_{b'} - J_{c'} = (\Delta^2 J)_{b'} - (\Delta^2 J)_{c'}.$$

Die Glieder erster Ordnung nämlich, $(\Delta J)_{b'}$ und $(\Delta J)_{c'}$ sind zwar im Allgemeinen von Null verschieden, aber beide gleich $\sum_i \frac{\partial F}{\partial y_i'} \eta_i$, und heben sich daher aus der Differenz $J_{b'} - J_{c'}$ heraus.

$$(\Delta^2 J)_{b'} \text{ ist gleich } \frac{1}{2}\int_{x^0}^{x} \Omega(\eta, \eta')\, dx.$$

Den Ausdruck

$$(\Delta^2 J)_{c'} = W_1(x^0 x \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_n)$$

wollen wir als Function von x allein betrachten, indem wir uns für die Grössen η_i die der Curve b' entsprechenden Functionen von x eingeführt denken. Dann ist, falls die bereits als nothwendig erkannte Bedingung II erfüllt ist,

$$(\Delta^2 J)_{c'} = \int_{x^0}^{x} \frac{d}{dx}(\Delta^2 J)_{c'}\, dx.$$

Man kann nämlich unter der genannten Voraussetzung leicht zeigen, dass $(\Delta^2 J)_{c'}$ erstens für $x = x^0$ verschwindet und zweitens im Integrationsintervalle durchweg endlich und stetig ist (auch wenn die Ableitungen der η_i beliebig oft unstetig sind; denn die Function W_1 enthält nur die Grössen η_i selbst, und nicht ihre Ableitungen).

Es wird daher ganz allgemein (auch wenn die Curve b' Ecken hat):

$$J_{b'} - J_{c'} = \int_{x^0}^{x}\Big(\frac{1}{2}\,\Omega(\eta, \eta') - \frac{d}{dx}(\Delta^2 J)_{c'}\Big)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x^0}^{x} \Omega_2(\eta, \eta')\, dx,$$

wo zur Abkürzung

$$\Omega_2(\eta, \eta') = \Omega(\eta, \eta') - 2\,\frac{d}{dx}\,(\Delta^2 J)_{c'}$$

gesetzt ist. Die Function Ω_2 ist eine quadratische Form von $\eta_1\eta_1' \ldots \eta_n\eta_n'$.

Nach unserem allgemeinen Principe steht zu erwarten, dass das vorstehende Integral in dem Falle, wo ein Minimum stattfindet, nicht negativ sei, wie auch die Curve b' und ihr Endpunkt A gewählt sein mag. Man kann indessen — und das ist von grösster Wichtigkeit — auf Grund desselben Principes noch weiter gehen und sagen, es sei geradezu zu erwarten, *dass die unter dem Integralzeichen stehende Function* $\Omega_2(\eta, \eta')$ *selbst für beliebige Werthe von* x *und von den* $2n$ *Grössen* $\eta_1\eta_1'\eta_2\eta_2' \ldots \eta_n\eta_n'$ *nicht negativ sei.* Hierin liegt zugleich die eigentliche Motivirung für die vorgenommene Transformation des Ausdrucks $(\Delta^2 J)_{c'}$ in ein bestimmtes Integral.

Nehmen wir nämlich auf der Curve b' nahe an dem Endpunkte A einen anderen Punkt A_1 an und nennen (vergl. Fig.) b_1 das Curvenstück von A^0 bis A_1, d das Stück von A_1 bis A, c' und c_1 die von A^0 resp. nach A und A_1 gezogenen Minimalcurven, so ist

$$\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x} \Omega_2(\eta, \eta')\,dx = \frac{1}{2}\int_{x^0}^{x} \Omega_2(\eta, \eta')\,dx - \frac{1}{2}\int_{x^0}^{x_1} \Omega_2(\eta, \eta')\,dx$$
$$= (J_{b'} - J_{c'}) - (J_{b_1} - J_{c_1})$$
$$= \big(J_{c_1} + (J_{b'} - J_{b_1}) - J_{c'}\big)$$
$$= (J_{c_1} + J_d) - J_{c'}.$$

Nun ist, da c' eine Minimalcurve ist, nach unserem Principe zu erwarten, dass $(J_{c_1} + J_d) - J_{c'}$ positiv sei. Es wird daher auch $\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x} \Omega_2(\eta, \eta')\,dx$ positiv werden. Dies ist aber, da die Punkte A_1 und A beliebig nahe an einander rücken können, nur möglich, wenn die Function $\Omega_2(\eta, \eta')$ selbst positiv (oder höchstens gleich Null) ist. Die in derselben vorkommenden $2n + 1$ Grössen $x\eta_1\eta_1'\eta_2\eta_2' \ldots \eta_n\eta_n'$ können dabei offenbar, je nach der Wahl der Curve b', *ganz willkürliche* Werthe annehmen.

Wir sind hiermit an diejenige Stelle der Untersuchung gelangt, wo ein strenger Beweis des Grundprincipes nothwendig zu werden scheint. Wäre derselbe geliefert, so würden wir unmittelbar schliessen können, die Relation $\Omega_2(\eta\eta') \geqq 0$, die wir für den Augenblick mit

IV bezeichnen wollen, sei eine *nothwendige* Bedingung des Minimums, während wir jetzt nur sagen dürfen, die Erfüllung derselben *sei zu erwarten*. Wir würden dann im Ganzen vier *nothwendige* Bedingungen des Minimums gewonnen haben, nämlich die früher mit I, II, III bezeichneten und die jetzt abgeleitete Bedingung IV. Von diesen würden aber die beiden Bedingungen II und IV, zusammengenommen, (mit einem kleinen Zusatze, durch welchen das *Verschwinden* der zweiten Variation *ohne Zeichenwechsel* ausgeschlossen wird) bereits hinreichen, umgekehrt das Stattfinden des Minimums zu erweisen. Denn bei Ableitung der Formel

$$J_{b'} - J_{c'} = \frac{1}{2}\int_{x^0}^{x} \Omega_2(\eta, \eta')\, dx$$

wurde nur die Bedingung II vorausgesetzt, und diese Formel geht, wenn wir den Punkt A mit A^1 zusammenfallen lassen, über in die Formel

$$J_b - J_c = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x^1} \Omega_2(\eta, \eta')\, dx.$$

Ist also II und IV erfüllt, so ist $J_b - J_c$ für keine zwischen A^0 und A^1 verlaufende Curve b negativ, (soweit wenigstens, als dies von den Gliedern zweiter Ordnung abhängt), und es ist daher J_c (vorbehaltlich einer Untersuchung über das *Verschwinden* der zweiten Variation) ein Minimalwerth des Integrals J. Wir hätten also in den Bedingungen II und IV im Wesentlichen die *nothwendigen* und zugleich *hinreichenden* Bedingungen des Minimums gewonnen.

Der Beweis des Grundprincips, welcher hiernach zur endgültigen Feststellung der Criterien des Minimums unentbehrlich erscheint, so lange man nur den allgemeinen Gedankengang verfolgt, zeigt sich nun aber thatsächlich überflüssig, wenn man die angedeuteten Rechnungen ausführt. Man findet dann nämlich, dass die Bedingung IV, die wir jetzt direct aus dem Grundprincipe abgeleitet haben, in der zuvor streng begründeten Bedingung I bereits vollständig enthalten ist und somit eines neuen Beweises nicht mehr bedarf.

Die Function $\Omega_2(\eta, \eta')$ lässt sich nämlich auf die Form bringen:

$$\Omega_2(\eta, \eta') = \sum_{i,h=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_h'}\, \omega_i \omega_h,$$

wo die Grössen $\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n$ linear aus den η_i und η_i' zusammengesetzt sind. Da nun diese Form in Folge der Bedingung I für beliebige Werthe von x und von $\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n$ niemals negativ ist, wenn ein Minimum stattfindet, so folgt, dass auch $\Omega_2(\eta, \eta')$ niemals negativ

ist, d. h. dass die Bedingung IV wirklich eine *nothwendige* Bedingung des Minimums darstellt.

Umgekehrt zeigten wir eben, dass die Bedingungen II und IV, zusammengenommen, *hinreichen*, das Eintreten des Minimums nachzuweisen. Ersetzen wir noch die Bedingung IV durch die Bedingung I, in der jene enthalten ist, so können wir schliesslich *die Bedingungen I und II als die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen des Minimums bezeichnen.* Es ist nur noch etwa eine kleine Modification, betreffend die Möglichkeit des Verschwindens der zweiten Variation ohne Zeichenwechsel hinzuzufügen, wodurch keine erheblichen Schwierigkeiten entstehen. Damit ist die Untersuchung beendet.

Die Gleichung

$$(\Delta^2 J)_{b'} - (\Delta^2 J)_{c'} = \frac{1}{2}\int_{x^0}^{x} \Omega_2(\eta, \eta')\, dx,$$

auf die Form gebracht

$$\frac{1}{2}\int_{x^0}^{x} \Omega(\eta, \eta')\, dx - W_1(x^0 x \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n) = \frac{1}{2}\int_{x^0}^{x} \sum_{i,h} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_h'}\, \omega_i \omega_h \right) dx,$$

ist nichts anderes, als die Clebsch'sche Transformation der zweiten Variation bei derjenigen Wahl gewisser bei Clebsch willkürlicher Constanten, welche Herr Mayer vornehmen musste, um aus der Transformation endgültige Schlüsse über das Maximum oder Minimum zu ziehen. Wir konnten daher mit Recht sagen, jene Transformation sei eine analytische Verification des von uns an die Spitze der Untersuchung gestellten Princips.

Aber durch unser Princip haben wir *erstens* eine wesentliche Lücke ausgefüllt, indem wir die bisher nicht ausreichend begründete *Nothwendigkeit* des zweiten Jacobi'schen Criteriums, die Determinante $\Delta(x, x^0)$ betreffend, streng nachwiesen. Wir haben *zweitens* den inneren Grund für die Hineinziehung der Grössen $\frac{\partial y_i}{\partial c_\lambda}$ in die Discussion erkannt, welche bei Clebsch und den späteren Bearbeitern der Theorie willkürlich erscheinen musste. Wir haben endlich *drittens* eine neue Einsicht in die Bedeutung des ersten Jacobi'schen Criteriums gewonnen. Dasselbe ist bei uns zweimal in ganz verschiedenem Zusammenhange, als Bedingung I und als Bedingung IV, aufgetreten. Beide Male gewannen wir eine quadratische Form (einmal der n Grössen η_i allein, das andere Mal der $2n$ Grössen η_i und η_i'), von der wir aus inneren Gründen a priori annehmen mussten, dass ihr Positivsein für

beliebige Werthe der n resp. $2n$ Argumente eine nothwendige Bedingung des Minimums sei. Es stellte sich heraus, dass die zweite jener beiden Formen sich auf die erste reduciren liess, indem die $2n$ Grössen η_i und η_i' nur in n linearen Verbindungen $\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n$ vorkamen. Nichtsdestoweniger hing die Einsicht, dass die zweite Form für alle Werthe ihrer $2n$ Argumente positiv sein müsse, nicht, wie bei Clebsch, von der Möglichkeit jener Reduction auf n Argumente ab, sondern ergab sich unmittelbar aus inneren Gründen.

Es ist bisher der Einfachheit wegen nur der Fall von uns in Betracht gezogen worden, dass die Functionen $y_1 y_2 \ldots y_n$ völlig unbeschränkt sind. Der Gedankengang bleibt im Wesentlichen derselbe, wenn jene Functionen im Voraus durch gewisse endliche Gleichungen oder Differentialgleichungen mit einander verknüpft sind. Wir halten daher eine besondere Darstellung jenes Falles an dieser Stelle für überflüssig und verweisen in der Beziehung auf den speciellen Theil unserer Arbeit (§ 3), in welchem die hier nur angedeuteten Gedanken wirklich durchgeführt werden.

---

§ 2.

Das Minimum des Integrales

$$\int_{x^0}^{x^1} F(xyy')\,dx.$$

Ich verificire den in § 1 angegebenen Gedankengang zunächst an dem einfachsten Beispiele, nämlich dem Integrale

$$J = \int_{x^0}^{x^1} F(xyy')\,dx,$$

theils weil sich hier ein gewisser, auf Seite 540 angedeuteter Beweis direct führen lässt, wodurch die Theorie einen höheren Grad der Abrundung erhält, theils weil ich glaube, dass eine besondere Behandlung dieses weitaus häufigsten Falles manchem Leser, namentlich auch für Vorlesungszwecke, erwünscht sein wird.

Von der Function y wird verlangt, dass sie stetig sei und für $x = x^0$ und $x = x^1$ gegebene Werthe y^0 und y^1 annehme.

Soll dann J einen Minimalwerth erhalten, so muss die erste Variation ΔJ gleich Null werden. Nun ist

$$\Delta J = \int_{x^0}^{x^1} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\,\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\eta' \right) dx,$$

und durch partielle Integration

$$=\int_{x_0}^{x^1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta\,dx+\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\,\eta\right]_{x^0}^{x^1},$$

und da η (als Variation von y) an den Grenzen x^0 und x^1 verschwindet,

$$=\int_{x^0}^{x^1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta\,dx.$$

Dieser Ausdruck ist aber nur dann für *beliebiges* η gleich Null, wenn die Function y der Differentialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0 \tag{1}$$

genügt. Wäre nämlich $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}$ auf irgend einer Strecke $a<x<b$ beständig positiv (resp. negativ), so würde auch ΔJ positiv (resp. negativ) werden, falls man η zwischen x^0 und a, sowie zwischen b und x^1, gleich Null, zwischen a und b aber gleich $(x-a)(b-x)$ setzte.

Die Differentialgleichung (1) ist demnach eine *nothwendige* Bedingung des Minimums. Man sieht leicht, dass sie überdies die *hinreichende* Bedingung für das *Verschwinden der ersten Variation* darstellt, vorausgesetzt, dass man sich — was wir thun wollen — auf solche Lösungen y beschränkt, deren erste Ableitungen y', wie y selbst, überall stetig sind (ohne diese Voraussetzung wird nämlich die vorher angestellte partielle Integration des Integrales ΔJ zweifelhaft.*)

Ist $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ nicht identisch gleich Null, so wird die Differentialgleichung (1) von der zweiten Ordnung sein. Man erhält dann durch Integration derselben y als Function von x mit zwei willkürlichen Constanten:

$$y=\varphi(x, c_1, c_2).$$

Letztere werden durch die Grenzbedingungen

$$\varphi(x^0\,c_1\,c_2)=y^0,\qquad \varphi(x^1\,c_1\,c_2)=y^1$$

bestimmt.

Wir nehmen an, dass $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ auch nach Einsetzung der gefundenen Werthe für y und y' nicht identisch verschwindet und speciell für $x=x^0$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt.

---

*) Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Verschwinden der *ersten* Variation *ohne* jene Voraussetzung sind von Herrn Erdmann entwickelt worden (Vergl. Crelle's Journ. 82, p. 21—30).

Es sei

$$\frac{\partial \varphi(x, c_1, c_2)}{\partial c_1} = u_1,$$

$$\frac{\partial \varphi(x, c_1, c_2)}{\partial c_2} = u_2,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\eta^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}\eta\eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\eta'^2 = \Omega(\eta, \eta').$$

Die Functionen u_1 und u_2, so wie die in $\Omega(\eta, \eta')$ enthaltenen zweiten partiellen Ableitungen von F mögen im Intervalle $x^0\,x^1$ durchaus endlich sein.

Durch Differentiation der Differentialgleichung 1) nach c_1 und c_2 erhält man nun zunächst, wie leicht ersichtlich ist, die Gleichung

$$(2)\qquad \frac{\partial \Omega(u, u')}{\partial u} - \frac{d}{dx}\,\frac{\partial \Omega(u, u')}{\partial u'} = 0,$$

in welcher u eine der Grössen u_1 und u_2, oder auch eine beliebige linear aus diesen zusammengesetzte Function bedeutet.

Setzt man in der Differentialgleichung (2) u_1 für u und multiplicirt mit u_2, so ergiebt sich

$$\frac{\partial \Omega(u_1\,u_1')}{\partial u_1}u_2 + \frac{\partial \Omega(u_1\,u_1')}{\partial u_1'}u_2' - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Omega(u_1\,u_1')}{\partial u_1'}u_2\right) = 0,$$

und ebenso

$$\frac{\partial \Omega(u_2\,u_2')}{\partial u_2}u_1 + \frac{\partial \Omega(u_2\,u_2')}{\partial u_2'}u_1' - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Omega(u_2\,u_2')}{\partial u_2'}u_1\right) = 0.$$

Durch Subtraction der letzten Gleichung von der vorhergehenden findet man mit Benutzung einer bekannten Eigenschaft quadratischer Formen

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Omega(u_2\,u_2')}{\partial u_2'}u_1 - \frac{\partial \Omega(u_1\,u_1')}{\partial u_1'}u_2\right) = 0,$$

und durch Integration

$$\frac{\partial \Omega(u_2\,u_2')}{\partial u_2'}u_1 - \frac{\partial \Omega(u_1\,u_1')}{\partial u_1'}u_2 = 2C$$

oder

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(u_1 u_2' - u_2 u_1') = C.$$

Die Constante C kann nicht den Werth Null haben. Dies wird unmittelbar deutlich, wenn man bei Integration der Differentialgleichung (1) als Integrationsconstanten c_1 und c_2 die Werthe von y und y' für $x = x^0$ einführt. Dann lässt sich nämlich y aus der Differentialgleichung sogleich in eine nach Potenzen von $x - x^0$ fortschreitende Reihe entwickeln, deren erste Glieder folgende sind

$$y = c_1 + c_2(x - x^0) + \cdots$$

Es wird daher

$$u_1 = 1 + \cdots, \qquad u_2 = (x - x^0)\,(1 + \cdots),$$

also

$$[u_1\, u_2' - u_2\, u_1']_{x=x^0} = 1$$

und

$$C = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right]_{x=x^0}.$$

Da

$$u_1\, u_2' - u_2\, u_1' = u_1^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{u_2}{u_1}\right)$$

ist, folgt aus dem Vorhergehenden zugleich, dass $\frac{u_2}{u_1}$ nicht constant sein und daher die Determinante

$$\Delta(x, x^0) = u_2^0\, u_1 - u_1^0\, u_2$$

nicht identisch verschwinden kann.

Nach diesen Vorbereitungen treten wir in die Untersuchung der zweiten Variation

$$\Delta^2 J = \frac{1}{2}\int_{x^0}^{x^1} \Omega(\eta, \eta')\, dx$$

ein, und zwar geben wir — entsprechend dem in § 1 skizzirten Gedankengange — der willkürlichen Function η zunächst eine gewisse specielle Form, was wir dadurch andeuten wollen, dass wir die Integrationsvariable x durch $\bar{x}$ und die von x abhängigen Functionen y, Ω, η resp. durch $\bar{y}$, $\bar{\Omega}$, $\bar{\eta}$ ersetzen; wodurch $\Delta^2 J$ übergeht in

$$(\Delta^2 J)_{c'+c''} = \frac{1}{2}\int_{x^0}^{x^1} \bar{\Omega}(\bar{\eta}\, \bar{\eta}')\, d\bar{x}.$$

Wir fixiren nämlich zwei beliebige Punkte A^2 und A^3 mit den Coordinaten $x^2\, y^2$ und $x^3\, y^3$ auf der Curve $y = \varphi(x\, c_1\, c_2)$, und einen dritten Punkt A mit den Coordinaten $x, y + \eta$ zwischen jenen beiden *in der Nähe* derselben Curve. Darauf ersetzen wir in u_1 und u_2 das Argument x durch $\bar{x}$, wodurch diese beiden Functionen resp. in $\bar{u}_1$ und $\bar{u}_2$ übergehen, und bestimmen die Coefficienten zweier linearen Functionen $\bar{u} = \alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2$ und $\bar{v} = \beta_1 \bar{u}_1 + \beta_2 \bar{u}_2$ so, dass $\bar{u}$ für $x = x^2$ den Werth 0, für $\bar{x} = x$ den Werth η, $\bar{v}$ für $\bar{x} = x$ ebenfalls den Werth η und für $\bar{x} = x^3$ den Werth 0 annimmt. D. g.

$$(4) \qquad \begin{cases} \bar{u} = \dfrac{u_2^2\, \bar{u}_1 - u_1^2\, \bar{u}_2}{u_2^2 u_1 - u_1^2 u_2}\, \eta, \\[2ex] \bar{v} = \dfrac{u_2^3\, \bar{u}_1 - u_1^3\, \bar{u}_2}{u_2^3 u_1 - u_1^3 u_2}\, \eta \end{cases}$$

und durch Differentiation nach $\bar{x}$

$$(4\text{a})\quad \begin{cases} \dfrac{d\bar{u}}{d\bar{x}} = \dfrac{u_2{}^2\bar{u}_1{}' - u_1{}^2\bar{u}_2{}'}{u_2{}^2u_1 - u_1{}^2u_2}\,\eta, \\[2ex] \dfrac{d\bar{v}}{d\bar{x}} = \dfrac{u_2{}^3\bar{u}_1{}' - u_1{}^3\bar{u}_2{}'}{u_2{}^3u_1 - u_1{}^3u_2}\,\eta. \end{cases}$$

Durch die Ordinaten $\bar{y}+\bar{u}$ und $\bar{y}+\bar{v}$, betrachtet als Functionen von $\bar{x}$, werden diejenigen beiden resp. zwischen A^2 und A und zwischen A und A^3 verlaufenden Curven charakterisirt, die wir c' und c'' genannt haben. Wir müssen demnach den im Ausdrucke $(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ auftretenden Functionen $\bar{\eta}$ von x^0 bis x^2 den Werth 0, von x^2 bis x den Werth $\bar{u}$, von x bis x^3 den Werth $\bar{v}$, von x^2 bis x^1 wieder den Werth 0 geben. Dadurch wird

$$\begin{aligned}(\Delta^2 J)_{c'+c''} &= (\Delta^2 J)_{c'} + (\Delta^2 J)_{c''} \\ &= \frac{1}{2}\int_{x^2}^{x}\bar{\Omega}(\bar{u}\bar{u}')\,d\bar{x} + \frac{1}{2}\int_{x}^{x^3}\bar{\Omega}(\bar{v}\bar{v}')\,d\bar{x}.\end{aligned}$$

Nun ist identisch

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}(\bar{\eta}\bar{\eta}') &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{\Omega}(\bar{\eta}\bar{\eta}')}{\partial\bar{\eta}}\,\bar{\eta} + \frac{\partial\bar{\Omega}(\bar{\eta}\bar{\eta}')}{\partial\bar{\eta}'}\,\bar{\eta}'\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{\Omega}(\bar{\eta}\bar{\eta}')}{\partial\bar{\eta}} - \frac{d}{d\bar{x}}\,\frac{\partial\bar{\Omega}(\bar{\eta}\bar{\eta}')}{\partial\bar{\eta}'}\right)\bar{\eta} + \frac{1}{2}\,\frac{d}{d\bar{x}}\left(\frac{\partial\bar{\Omega}(\bar{\eta}\bar{\eta}')}{\partial\bar{\eta}'}\,\bar{\eta}\right),\end{aligned}$$

also mit Rücksicht auf die Differentialgleichung (2)

$$\bar{\Omega}(\bar{u}\bar{u}') = \frac{1}{2}\,\frac{d}{d\bar{x}}\left(\frac{\partial\bar{\Omega}(\bar{u}\bar{u}')}{\partial\bar{u}'}\,\bar{u}\right),$$

und ebenso

$$\bar{\Omega}(\bar{v}\bar{v}') = \frac{1}{2}\,\frac{d}{d\bar{x}}\left(\frac{\partial\bar{\Omega}(\bar{v}\bar{v}')}{\partial\bar{v}'}\,\bar{v}\right).$$

Es wird daher

$$(5)\quad \begin{cases} (\Delta^2 J)_{c'} = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{\partial\bar{\Omega}(\bar{u}\bar{u}')}{\partial\bar{u}'}\,\bar{u}\right]_{\bar{x}=x^2}^{\bar{x}=x}, \\[2ex] (\Delta^2 J)_{c''} = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{\partial\bar{\Omega}(\bar{v}\bar{v}')}{\partial\bar{v}'}\,\bar{v}\right]_{\bar{x}=x}^{\bar{x}=x^3}, \end{cases}$$

und mit Benutzung von (4) und (4a)

$$(\Delta^2 J)_{c'+c''} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\left(\frac{u_2{}^2u_1{}' - u_1{}^2u_2{}'}{u_2{}^2u_1 - u_1{}^2u_2} - \frac{u_2{}^3u_1{}' - u_1{}^3u_2{}'}{u_2{}^3u_1 - u_1{}^3u_2}\right)\eta^2,$$

und schliesslich

$$(6)\quad (\Delta^2 J)_{c'+c''} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\,\frac{(u_1u_2{}' - u_2u_1{}')\,(u_1{}^2u_2{}^3 - u_2{}^2u_1{}^3)}{(u_1{}^2u_2 - u_2{}^2u_1)\,(u_1u_2{}^3 - u_2u_1{}^3)}\,\eta^2,$$

oder auch mit Rücksicht auf (3)

$$(7)\qquad (\Delta^2 J)_{c'+c''} = \frac{1}{2}\, C \frac{u_1{}^2 u_2{}^3 - u_2{}^2 u_1{}^3}{(u_1{}^2 u_2 - u_2{}^2 u_1)\,(u_1 u_2{}^3 - u_2 u_1{}^3)}\, \eta^2.$$

Die Gleichungen (6) und (7) lassen folgende Schlüsse zu.

Der Ausdruck $u_1 u_2' - u_2 u_1'$ kann im Hinblick auf die Relation (3) höchstens an einzelnen Stellen x — nämlich da, wo $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ unendlich wird — den Werth 0 besitzen. Sehen wir von diesen Stellen ab, so können wir offenbar den Punkt A^3 so nahe an A (d. h. den Werth x^3 so nahezu gleich x) annehmen, dass $u_1 u_2{}^3 - u_2 u_1{}^3$ gleiches Vorzeichen, wie $u_1 u_2' - u_2 u_1'$ besitzt. Dies folgt unmittelbar aus der Identität

$$\frac{u_1 u_2{}^3 - u_2 u_1{}^3}{x^3 - x} = u_1 \frac{u_2{}^3 - u_2}{x^3 - x} - u_2 \frac{u_1{}^3 - u_1}{x^3 - x},$$

da der Ausdruck auf der rechten Seite für $x^3 = x$ den Grenzwerth $u_1 u_2' - u_2 u_1'$ annimmt. Rückt auch x^2 sehr nahe an x heran, so werden die beiden Ausdrücke $u_1{}^2 u_2 - u_2{}^2 u_1$ und $u_1{}^2 u_2{}^3 - u_2{}^2 u_1{}^3$ ebenfalls das Vorzeichen von $u_1 u_2' - u_2 u_1'$ erhalten. Der Coefficient von $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ in der Gleichung (6) wird also in diesem Falle positiv, und daraus folgt, dass, wenn $(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ nicht negativ werden soll, auch $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ nicht negativ sein darf. Hierin liegt demnach eine nothwendige Bedingung für das Minimum des Integrales J. In Folge der gleich anfangs gemachten Voraussetzung, dass $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ nicht identisch verschwindet, kann diese Bedingung auch so formulirt werden: „$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ *muss, ausgenommen höchstens einzelne Werthe von x, positiv sein.*"

Wir nehmen an, diese Bedingung sei erfüllt. Die Gleichung (7) zeigt dann weiter, dass keiner der Ausdrücke

$$u_1{}^2 u_2{}^3 - u_2{}^2 u_1{}^3,\quad u_1{}^2 u_2 - u_2{}^2 u_1,\quad u_1 u_2{}^3 - u_2 u_1{}^3,$$

wenn wir die 3 Werthe x^2, x, x^3 (unter Festhaltung ihrer Reihenfolge) zwischen den Grenzen x^0 und x^1 beliebig verändern, sein Vorzeichen wechseln darf. Sonst würde nämlich auch $(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ das Vorzeichen wechseln können; denn der Ausnahmefall, dass etwa zwei jener drei Ausdrücke gleichzeitig das Zeichen wechseln, lässt sich durch Abänderung *einer* der drei Grössen x^2, x, x^3 sogleich auf den Fall, dass nur *einer* der Ausdrücke das Zeichen wechselt, zurückführen.

Jene drei Ausdrücke müssen also, wenn $(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ nicht negativ werden soll, jedenfalls beständig dasselbe Vorzeichen haben. Nun giebt folgende von Jacobi herrührende Betrachtung Aufschluss über die Umstände, unter welchen ein Zeichenwechsel jener Ausdrücke überhaupt nur eintreten kann.

Aus (3) folgt:
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u_2}{u_1}\right) = \frac{C}{u_1^2\,\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}}.$$

Der Quotient $\frac{u_2}{u_1}$ wird also, da $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ positiv ist, mit x entweder beständig wachsen oder beständig abnehmen, d. h. er wird entweder ins Unendliche wachsen, dann (für $u_1 = 0$) auf den Werth $-\infty$ springen und wiederum ins Unendliche wachsen; oder umgekehrt ins Unendliche abnehmen, dann nach $+\infty$ springen und wiederum ins Unendliche abnehmen. Daraus folgt, dass sich im Intervall $x^0\,x^1$, die Grenzen selbst eingeschlossen, zwei von einander verschiedene Werthe x^2 und x^3, welche der Gleichung $u_1{}^2 u_2{}^3 - u_2{}^2 u_1{}^3 = 0$ oder, was dasselbe ist, der Gleichung $\frac{u_2{}^3}{u_1{}^3} - \frac{u_2{}^2}{u_1{}^2} = 0$ genügen, dann und *nur* dann bestimmen lassen werden, wenn der Quotient $\frac{u_2}{u_1}$ den Werth $\frac{u_2{}^0}{u_1{}^0}$ entweder irgendwo zwischen x^0 und x^1 oder an der Stelle x^1 selbst von Neuem annimmt, d. h. wenn die Function
$$\Delta(x, x^0) = u_2{}^0 u_1 - u_1{}^0 u_2$$
irgendwo im Intervalle $x^0 < x \leqq x^1$ verschwindet.

Ist die Gleichung $\Delta(x, x^0) = 0$ schon für einen zwischen x^0 und x^1 gelegenen Werth von x erfüllt, so wird $\Delta(x, x^0)$ an dieser Stelle das Vorzeichen wechseln, wie aus dem Vorhergehenden folgt, und es kann daher $(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ sowohl positiv als negativ werden. Verschwindet dagegen $\Delta(x, x^0)$ weder zwischen x^0 und x^1 noch für $x = x^1$ selbst, so werden auch die drei in der Gleichung (7) auftretenden Ausdrücke ihr Vorzeichen bei beliebiger Verschiebung der drei Punktr x^2, x, x^3 nicht ändern können, und es wird daher $(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ beständig positiv, da dies für nahezu gleiche Werthe der drei Grössen x^2, x, x^3 der Fall ist. Wird endlich $\Delta(x^1, x^0)$ gleich Null, so kann $(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ zwar nicht beide Vorzeichen erhalten, wohl aber zum Verschwinden gebracht werden. Man braucht zu dem Zwecke nur in der Formel (7) $x^2 = x^0$ und $x^3 = x^1$ zu setzen und die Werthe x und η beliebig anzunehmen.

Wir erhalten also schliesslich folgendes Resultat: *Damit* $(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ *bei willkürlicher Wahl der Punkte* $A^2\ A\ A^3$ *niemals negativ werde, muss I)* $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ *beständig positiv sein, abgesehen von einzelnen Stellen, wo der Ausdruck verschwinden kann; und darf II)* $\Delta(x, x^0)$ *für* $x^0 < x < x^1$ *nicht verschwinden. Verschwindet* $\Delta(x, x^0)$ *auch nicht für* $x = x^1$, *so ist* $(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ *immer positiv; ist dagegen* $\Delta(x^1, x^0) = 0$, *so kann* $(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ *zwar nicht beide Zeichen erhalten, aber zum Verschwinden gebracht werden.*

Wir kommen jetzt zum zweiten Theile der Untersuchung, nämlich zur Discussion der zweiten Variation

$$(\Delta^2 J)_b = \frac{1}{2}\int\limits_{x^0}^{x^1} \Omega(\eta\,\eta')\,dx$$

für eine ganz beliebige Function η, von der wir nur voraussetzen, dass sie überall stetig ist und einen endlichen Differentialquotienten besitzt. Wir führen die Untersuchung nach der in § 1 gegebenen Vorschrift, indem wir zunächst die Differenzen

$$(\Delta^2 J)_{b'} - (\Delta^2 J)_{c'}) \quad \text{und} \quad (\Delta^2 J)_{b''} - (\Delta^2 J)_{c''}$$

einer näheren Betrachtung unterziehen.

Es mögen nämlich jetzt die im Vorhergehenden mit A^2 und A^3 bezeichneten Punkte resp. mit A^0 und A^1 zusammenfallen. Auf der zwischen diesen beiden Punkten beliebig verlaufenden Curve b, deren Ordinate, als Function von x, gleich $y + \eta$ sei, werde dann der Punkt A beliebig angenommen und unter

b' das Stück der Curve b von A^0 bis A, unter b'' das Stück von A bis A^1, unter c' und c'' aber wieder die durch die Functionen $\bar{y} + \bar{u}$, $\bar{y} + \bar{v}$ definirten, resp. zwischen A^0 und A und zwischen A und A^1 sich erstreckenden Curven verstanden. Es ist dann ohne Weiteres klar, was unter $(\Delta^2 J)_{b'}$ und $(\Delta^2 J)_{b''}$ zu verstehen sei.

Nach (5) ist

$$(8) \qquad (\Delta^2 J)_{c'} = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial\bar{\Omega}(\bar{u}\,\bar{u}')}{\partial\bar{u}'}\,\bar{u}\right]_{\bar{x}=x^0}^{\bar{x}=x}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2\bar{F}}{\partial\bar{y}\,\partial\bar{y}'}\,\bar{u} + \frac{\partial^2\bar{F}}{\partial\bar{y}'^2}\,\bar{u}'\right)\bar{u}\right]_{\bar{x}=x^0}^{\bar{x}=x}.$$

Führen wir für $\bar{u}$ und $\bar{u}' = \dfrac{d\bar{u}}{d\bar{x}}$ die Ausdrücke (4) und (4a) ein und setzen dann auf der rechten Seite der Gleichung (8), wie verlangt wird, $\bar{x}$ der Reihe nach gleich x und gleich x^0, so erhalten wir

$$(\Delta^2 J)_{c'} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}(u_2{}^0 u_1 - u_1{}^0 u_2) + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(u_2{}^0 u_1' - u_1{}^0 u_2')\right)\frac{\eta^2}{u_2{}^0 u_1 - u_1{}^0 u_2}$$

$$= \frac{1}{2}\,P\,.\,Q \text{ (zur Abkürzung).}$$

$(\Delta^2 J)_{c'}$ ist hiermit als Function von x dargestellt, indem auch die Grösse η als Function von x (entsprechend der Curve b) zu betrachten ist. Behufs Bildung der Differenz $(\Delta^2 J)_{b'} - (\Delta^2 J)_{c'}$ wollen wir, entsprechend der in § 1 gegebenen Vorschrift, $(\Delta^2 J)_{c'}$ durch Differen-

tiation und Integration in ein bestimmtes Integral verwandeln, damit der Subtrahendus dieselbe Form erhält, welche der Minuendus bereits besitzt. Zu dem Zwecke haben wir *erstens* denjenigen Werth von x festzustellen, für welchen $(\Delta^2 J)_{c'}$ verschwindet, *zweitens* zu prüfen, ob $(\Delta^2 J)_{c'}$ im Integrationsintervall nicht unstetig (unendlich) wird.

Offenbar ist $(\Delta^2 J)_{c'}$ gleich Null für $x = x^0$. Es folgt dieses sowohl aus der Bedeutung des Ausdruckes $(\Delta^2 J)_{c'}$, der ursprünglich durch ein über die Curve c' erstrecktes Integral definirt wurde, als auch direct daraus, dass für $x = x^0$ der Factor Q verschwindet, während P endlich bleibt. Denn der Zähler von Q wird, da η' als endlich vorausgesetzt wurde, mindestens von der zweiten Ordnung Null; der Nenner aber kann nur in erster Ordnung verschwinden, da seine Ableitung nach (3) von Null verschieden ist.

Ferner bleiben P und Q endlich, wenn der Ausdruck

$$\Delta(x, x^0) = u_2{}^0 u_1 - u_1{}^0 u_2$$

im Intervalle $x^0\, x$ nicht verschwindet. Wir dürfen aber hier annehmen, dass diese Bedingung erfüllt sei, da für den entgegengesetzten Fall die Unmöglichkeit des Minimums bereits vorher nachgewiesen wurde.

Es wird daher

$$(\Delta^2 J)_{c'} = \int_{x^0}^{x} \frac{d}{dx} (\Delta^2 J)_{c'}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{x^0}^{x} \left(\frac{dP}{dx} Q + \frac{dQ}{dx} P \right) dx.$$

Auf die in P enthaltene Function $u = u_2{}^0 u_1 - u_1{}^0 u_2$ kann man die Differentialgleichung (2) anwenden und erhält, da

$$P = \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega(u\, u')}{\partial u'}$$

ist,

$$\frac{dP}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega(u\, u')}{\partial u},$$

und daher

$$\frac{dP}{dx} Q = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \eta^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial y'} \frac{u_2{}^0 u_1' - u_1{}^0 u_2'}{u_2{}^0 u_1 - u_1{}^0 u_2} \eta^2.$$

Ferner ergiebt sich direct

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dx} P = - \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial y'} \frac{u_2{}^0 u_1' - u_1{}^0 u_2'}{u_1 u_2{}^0 - u_2 u_1{}^0} \eta^2 &- \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \left(\frac{u_2{}^0 u_1' - u_1{}^0 u_2'}{u_2{}^0 u_1 - u_1{}^0 u_2} \right)^2 \eta^2 \\ + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial y'} \eta \eta' \qquad &+ 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \frac{u_2{}^0 u_1' - u_1{}^0 u_2'}{u_2{}^0 u_1 - u_1{}^0 u_2} \eta \eta'. \end{aligned}$$

Es wird also

$$\frac{dP}{dx}\,Q + \frac{dQ}{dx}\,P = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,\eta^2 + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}\,\eta\eta'$$
$$- \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\left(\left(\frac{u_2{}^0 u_1' - u_1{}^0 u_2'}{u_2{}^0 u_1 - u_1{}^0 u_2}\right)^2 \eta^2 - 2\,\frac{u_2{}^0 u_1' - u_1{}^0 u_2'}{u_2{}^0 u_1 - u_1{}^0 u_2}\,\eta\,\eta'\right),$$

$$\Omega(\eta\eta') - \left(\frac{dP}{dx}\,Q + \frac{dQ}{dx}\,P\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\left(\eta' - \frac{u_2{}^0 u_1' - u_1{}^0 u_2'}{u_2{}^0 u_1 - u_1{}^0 u_2}\,\eta\right)^2,$$

und schliesslich

$$(9) \quad (\Delta^2 J)_{b'} - (\Delta^2 J)_{c'} = \frac{1}{2}\int_{x^0}^{x} \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\left(\eta' - \frac{u_1' u_2{}^0 - u_2' u_1{}^0}{u_1 u_2{}^0 - u_2 u_1{}^0}\,\eta\right)^2 dx.$$

Diese Gleichung konnte nur unter der Voraussetzung abgeleitet werden, dass $\Delta(x, x^0)$ im Intervalle $x^0\,x$ nicht verschwand. Ist aber diese Voraussetzung erfüllt und ausserdem $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ im ganzen Intervalle $x^0\,x$ (abgesehen höchstens von einzelnen Punkten) positiv, so wird die Differenz $(\Delta^2 J)_{b'} - (\Delta^2 J)_{c'}$, wie aus (9) ersichtlich ist, niemals negativ.

Offenbar kann man ähnliche Betrachtungen auf die Differenz $(\Delta^2 J)_{b''} - (\Delta^2 J)_{c''}$ anwenden und findet, dass auch diese nicht negativ werden kann, wenn $\Delta(x x^1)$ im Intervalle $x\,x^1$ nicht verschwindet und $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ in demselben Intervalle beständig positiv ist.

Nun sind aber die hier auftretenden Bedingungen sämmtlich bereits früher als *nothwendige Bedingungen* für das Nichtnegativwerden des Ausdruckes $(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ von uns erkannt worden. Da, wie wir jetzt gesehen haben, unter Voraussetzung derselben die Differenzen $(\Delta^2 J)_{b'} - (\Delta^2 J)_{c'}$ und $(\Delta^2 J)_{b''} - (\Delta^2 J)_{c''}$, und mithin auch die Differenz $(\Delta^2 J)_b - (\Delta^2 J)_{c'+c''}$ niemals negativ wird, so folgt unmittelbar, dass, wenn $(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ nie negativ werden kann, auch $(\Delta^2 J)_b$ es nicht wird, und wenn $(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ immer positiv ist, um so mehr $(\Delta^2 J)_b$ immer positiv sein muss.

Die früher gefundenen Kriterien für das Positivbleiben resp. Nichtnegativwerden der *speciellen* zweiten Variation $(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ gelten daher unverändert auch in Bezug auf den *allgemeinen* Ausdruck $(\Delta^2 J)_b$.

Hiermit ist die Untersuchung, genau genommen, beendet. Trotzdem ist vielleicht als eine Art Controlle der gefundenen Resultate die folgende kurze Betrachtung nicht uninteressant.

Lassen wir den Punkt A mit A^1) (d. h. x mit x^1) zusammenfallen, so wird $(\Delta^2 J)_{c'} = 0$, $(\Delta^2 J)_{b'} = (\Delta^2 J)_b$. In diesem Falle zeigt die Gleichung (9) *direct*, dass, wenn die früher als *nothwendig* erkannten beiden Bedingungen des Minimums erfüllt sind, der allgemeine Ausdruck für die zweite Variation niemals negativ wird. Es fragt sich noch, ob derselbe verschwinden kann. Offenbar ist das nur möglich, wenn der Ausdruck unter dem Integralzeichen beständig Null, d. h.

(10) $$\eta' - \frac{u_2^0 u_1' - u_1^0 u_2'}{u_2^0 u_1 - u_1^0 u_2}\,\eta = 0,$$

und folglich

$$\eta \begin{cases} = 0 \text{ oder (streckenweise)} \\ = \text{const.}\ (u_2^0 u_1 - u_1^0 u_2) \end{cases}$$

ist. Da nun η für $x = x^1$ den Werth Null haben muss, $u_2^0 u_1 - u_1^0 u_2$ (d. i. $\Delta(x, x^0)$) aber zwischen x^0 und x^1 nach Voraussetzung nicht verschwindet, muss überall const. $= 0$, d. h. $\eta = 0$ sein, *ausgenommen den Fall*, dass $\Delta(x^1, x^0) = 0$ ist. Wir sehen also von Neuem, dass nur in diesem Ausnahmefalle ein Verschwinden der zweiten Variation ohne Zeichenwechsel möglich ist.

Die gefundenen Resultate lassen sich folgendermassen zusammenfassen:

Das Minimum des Integrales J ist an die beiden Bedingungen geknüpft, dass I. $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ zwischen x^0 und x^1 nicht negativ werden, und dass II. $\Delta(x, x^0) = u_2^0 u_1 - u_1^0 u_2$ im Inneren des Intervalles $x^0\, x^1$ nicht verschwinden darf. Diese beiden Bedingungen sind nothwendig; denn ist eine derselben nicht erfüllt, so kann die zweite Variation sowohl positiv als negativ werden. Ist $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ beständig positiv, und verschwindet $\Delta(x, x^0)$ auch für $x = x^1$ noch nicht, so ist die zweite Variation immer positiv und es findet sicher ein Minimum statt; verschwindet $\Delta(x, x^0)$ zwar nicht zwischen x^0 und x^1, wohl aber für $x = x^1$, so kann die zweite Variation den Werth Null annehmen, ohne negativ zu werden, das Minimum ist also unsicher.

---

§ 3.

Das Minimum des Integrales

$$\int_{x^0}^{x^1} F(x y_1 y_1' y_2 y_2' \ldots y_n y_n')\, dx,$$

wenn die Grössen $y_1 y_2 \ldots y_n$ an gegebene endliche Gleichungen und Differentialgleichungen erster Ordnung gebunden sind.

Es sei die Aufgabe gestellt, das Minimum des Integrales

$$\int_{x^0}^{x^1} F(x y_1 y_1' y_2 y_2' \ldots y_n y_n')\, dx$$

zu finden, in welchem die unbekannten Functionen $y_1\, y_2 \ldots y_n$ an gewisse endliche Gleichungen

(11a) $\Phi_\alpha(xy_1y_2\ldots y_n)=0$ $(\alpha=1,2,\ldots,m')$

und an gewisse Differentialgleichungen erster Ordnung

(11b) $\Psi_\beta(xy_1y_1'\ldots y_ny_n')=0$ $(\beta=1,2,\ldots,m'')$

gebunden sind. Dass der Ausdruck F alle n Grössen y_i oder ihre Ableitungen y_i' enthalte, setzen wir nicht voraus. Dagegen soll von *allen* Functionen y_i verlangt werden, dass sie durchweg stetig sind, und ebenso sollen *allen* jenen Functionen für $x=x^0$ und $x=x^1$ bestimmte Werthe vorgeschrieben sein, die natürlich mit den Bedingungen (11a) vereinbar sein müssen. Hinsichtlich der Beschaffenheit der Differentialgleichungen (11b) machen wir noch die Voraussetzung, dass nach Annahme zweier beliebigen Werthsysteme $a\,b_1\,b_2\ldots b_n$ und $a'\,b_1'\,b_2'\ldots b_n'$ im Allgemeinen Functionen $y_1\,y_2\ldots y_n$ existiren, welche jenen Differentialgleichungen genügen und an den Stellen $x=a$ und $x=a'$ resp. die Werthe $b_1\,b_2\ldots b_n$ und $b_1'\,b_2'\ldots b_n'$ erhalten; mit anderen Worten, wir setzen voraus, dass sich aus den Ausdrücken (11b) auf keine Weise ein vollständiger Differentialquotient bilden lässt, dessen Integralfunction, gleich einer Constanten gesetzt, eine *endliche* Gleichung zwischen den Grössen $x\,y_1\,y_2\ldots y_n$ darstellen würde.

Zunächst einige Worte über die etwas umständliche Formulirung des Problems. Man könnte dasselbe dadurch vereinfachen, dass man aus den m' Gleichungen (11a) durch Differentiation ebensoviele Differentialgleichungen erster Ordnung ableitete und diese mit den Differentialgleichungen (11b) zu einer einzigen Gruppe vereinigte. Dadurch würden nämlich die Gleichungen (11a) überflüssig, da die bei einmaliger Integration der Differentialgleichungen $\frac{d\Phi_\alpha}{dx}=0$ auftretenden additiven Constanten schon durch die vorgeschriebenen Grenzwerthe der y_i für $x=x^0$ eindeutig bestimmt sind. Wenn wir diese Vereinfachung nicht acceptirt haben, so geschah es deshalb, weil wir sonst auf die ausdrücklich genannte Voraussetzung hätten verzichten müssen, dass die gegebenen Differentialgleichungen *keine einzige allgemeine Integralgleichung besitzen.* Die Erfüllung dieser Voraussetzung ist aber, wie wir später sehen werden, eine wesentliche Bedingung für einige der wichtigsten Schlüsse.

In die von uns angenommene Form lassen sich fast alle Aufgaben der Variationsrechnung kleiden.*) So vor Allem die Probleme vom Typus der kürzesten Linien auf einer gegebenen Fläche (in diesem Falle ist $\Phi=0$ die Gleichung der letzteren) und die isoperimetrischen Probleme (in diesem Falle werden, wenn

---

*) Ueber eine Gruppe von Problemen, welche nicht auf diese Form gebracht werden können, vergl. Mayer in den Leipz. Ber. 1878.

$$J_\beta = \int_{x^0}^{x^1} f_\beta(x y_1 y_1' \ldots y_n y_n')\, dx$$

die Integrale sind, welche vorgeschriebene Werthe annehmen sollen, nach Lagrange neue Functionen $y_{n+\beta}$ durch die Gleichungen

$$y_{n+\beta} = \int_{x^0}^{x} f_\beta(x y_1 y_1' \ldots y_n y_n')\, dx \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, m'')$$

eingeführt; dieselben sind mit den ursprünglichen durch die Differentialgleichungen

$$\Psi_\beta = y_{n+\beta}' - f_\beta(x y_1 y_1' \ldots y_n y_n') = 0$$

verknüpft und müssen den Grenzbedingungen genügen, für $x = x^0$ zu verschwinden und für $x = x^1$ die für die Integrale J_β vorgeschriebenen Werthe zu erhalten). Auch das Problem, das Minimum eines Integrales zu finden, welches ausser den unbekannten Functionen y und ihren ersten Ableitungen y' noch beliebige höhere Ableitungen $y'' y''' \ldots y^{(p)}$ enthält, wird unmittelbar auf die gestellte Aufgabe zurückgeführt (wenn man die Ableitungen bis zur $p - 1^{\text{ten}}$ als neue Functionen $y_1 y_2 \ldots y_{p-1}$ einführt, welche alsdann an die $p - 1$ Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\Psi_1 = y' - y_1 = 0, \;\; \Psi_2 = y_1' - y_2 = 0, \;\; \ldots, \;\; \Psi_{p-1} = y_{p-1}' - y_p = 0$$

gebunden sind).

Lagrange hat zur Behandlung der ersten Variation für alle Probleme, welche unter unsere Formulirung fallen, eine allgemeine Regel, die sogenannte *Methode der Multiplicatoren*, aufgestellt*). Die von Lagrange gegebene Ableitung dieser Regel ist aber — abgesehen von speciellen Fällen — durchaus unzulänglich, und es ist auch bisher nicht gelungen, eine bessere Begründung *in voller Allgemeinheit* durchzuführen.**) Unter den speciellen Problemen, für welche der strenge Beweis erbracht ist, befinden sich allerdings die weitaus wichtigsten: insbesondere alle diejenigen, bei denen es sich nur um die Erfüllung *endlicher* Bedingungsgleichungen handelt; ferner diejenigen, bei denen weiter verlangt wird, dass gewisse bestimmte Integrale vorgeschriebene Werthe erhalten sollen. Es wird im folgenden Paragraphen gezeigt werden, wie sich für die Probleme dieser Art der Beweis der Lagrangeschen Regel gestaltet.

---

*) Theorie des fonctions analytiques. Paris 1847, pag. 292; Lecons sur le calcul des fonctions. Paris 1806, pag. 460.

**) In diesem Sinne äussert sich auch Herr Mayer in der seiner Habilitationsschrift beigefügten These 5.

In diesem Paragraphen, wo die Discussion der *zweiten* Variation im Vordergrunde steht, werden wir die Allgemeingültigkeit der Lagrange'schen Regel voraussetzen, da die Beschränkung auf diejenigen Aufgaben, für welche sie wirklich erwiesen ist, keine Vereinfachung unserer Betrachtungen nach sich ziehen würde. Man wird dabei nur nicht vergessen dürfen, dass alle Entwickelungen schliesslich doch bloss für diejenigen Fälle einen Sinn haben, für welche die Richtigkeit jener Regel zuvor gezeigt ist.

Der Gedankengang von Lagrange ist etwa folgender. Man bilde den Ausdruck

$$(12)\quad F_1(xy_1y_1'y_2y_2'\dots y_ny_n') = F(xy_1y_1'\dots y_ny_n') + \sum_{\alpha=1}^{m'} P_\alpha \Phi_\alpha(xy_1\dots y_n) + \sum_{\beta=1}^{m''} Q_\beta \Psi_\beta(xy_1y_1'\dots y_ny_n'),$$

in welchem die P_α und Q_β vorläufig unbestimmte Functionen von x bedeuten. Ferner denke man sich, das Problem sei durch ein *bestimmtes* System von Functionen $y_1 y_2 \dots y_n$, die nebst ihren ersten Ableitungen durchweg stetig sind, gelöst, es werde also das Integral $\int_{x^0}^{x^1} F(xy_1y_1'\dots y_ny_n')\,dx$ für dieses System kleiner, als für jedes andere, nur wenig davon verschiedene, welches ebenfalls den Gleichungen (11a) und (11b), sowie den vorgeschriebenen Grenzbedingungen genügt. Dann lassen sich nach Lagrange die Functionen P_α und Q_β so bestimmen, dass die erste Variation des Integrales $J = \int_{x^0}^{x^1} F_1\,dx$,

$$(14)\qquad \Delta J = \int_{x^0}^{x^1} \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_i}\eta_i + \frac{\partial F_1}{\partial y_i'}\eta_i'\right) dx,$$

nachdem darin statt $y_1 y_1' \dots y_n y_n'$ die gefundenen Ausdrücke eingesetzt sind, bei ganz beliebiger Wahl der Functionen η_i den Werth Null hat, vorausgesetzt nur, dass diese letzteren an den Grenzen x^0 und x^1 selbst verschwinden. Nun wird ΔJ durch partielle Integration auf die Form

$$(15)\qquad \Delta J = \int_{x^0}^{x^1} \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F_1}{\partial y_i'}\right)\eta_i\,dx$$

gebracht, und dieser Ausdruck kann, wie leicht einzusehen ist, nur dann bei ganz beliebiger Wahl der η_i verschwinden, wenn die einzelnen Coefficienten der η_i unter dem Integralzeichen identisch gleich Null sind, d. h. wenn die Differentialgleichungen

$$(16) \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\,\frac{\partial F_1}{\partial y_i'} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gelten. Diese Differentialgleichungen drücken demnach, wenn die darin vorkommenden Functionen P_α und Q_β zuvor richtig bestimmt sind, *nothwendige* Bedingungen des Minimums aus.

Kehrt man jetzt den Gedankengang um, so gelangt man durch Ausnutzung jener Differentialgleichungen leicht dazu, alle möglichen Lösungen der Aufgabe zu finden. Man betrachtet nämlich ausser den Functionen $y_1 y_2 \ldots y_n$ auch noch die Functionen $P_1 \ldots P_{m'}$, $Q_1 \ldots Q_{m''}$ als Unbekannte und bestimmt dieselben durch die Differentialgleichungen (16) in Verbindung mit den Gleichungen (11a) und (11b). In den so gewonnenen Ausdrücken für $y_1\, y_2 \ldots y_n$, die noch eine Anzahl willkürlicher Integrationsconstanten in sich schliessen, sind dann jedenfalls alle Lösungen des Problemes enthalten. Dies ist die Lagrange'sche Regel.

Wir machen einen Ueberschlag über die Anzahl der bei der Integration auftretenden Constanten.*)

Das aus den Gleichungen (16), den m' Gleichungen $\frac{d^2\Phi_\alpha}{dx^2} = 0$ und den m'' Gleichungen $\frac{d\Psi_\alpha}{dx} = 0$ zusammengesetzte System ist linear in Bezug auf die $n + m' + m''$ Grössen $y_i''\; P_\alpha\; Q_\beta'$. Ist daher die Determinante

$$R = \begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1'^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1' \partial y_n'} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \cdot & \frac{\partial \Phi_{m'}}{\partial y_1} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_1'} & \cdot & \frac{\partial \Psi_{m''}}{\partial y_1'} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_n' \partial y_1'} & \cdots & \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_n'^2} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n} & \cdot & \frac{\partial \Phi_{m'}}{\partial y_n} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_n'} & \cdot & \frac{\partial \Psi_{m''}}{\partial y_n'} \\
\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n} & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\partial \Phi_{m'}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_{m'}}{\partial y_n} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\frac{\partial \Psi_1}{\partial y_1'} & \cdots & \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_n'} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\partial \Psi_{m''}}{\partial y_1'} & \cdots & \frac{\partial \Psi_{m''}}{\partial y_n'} & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0
\end{vmatrix}$$

nicht identisch Null — was wir voraussetzen wollen —, so kann man jenes System nach den $y_i''\; P_\alpha\; Q_\beta$ auflösen. Bezeichnet man die Lösungen

*) Vergl. Mayer's Habilitationsschrift p. 3, 4 und Crelle's J. 69, p. 240, 241.

mit (y_i'') (P_α) (Q_β'), so kann man in dem folgenden System simultaner Differentialgleichungen

$$(17) \qquad \frac{dy_i}{dx} = y_i'; \quad \frac{dy_i'}{dx} = (y_i''); \quad \frac{dQ_\beta}{dx} = (Q_\beta')$$

$$(i=1,2,\ldots,n; \quad \beta=1,2,\ldots,m'')$$

die $2n + m''$ Grössen $y_i\, y_i'\, Q_\beta$ als unbekannte Functionen von x betrachten. Dieses System hat die sogenannte canonische Form und liefert bei der Integration $2n + m''$ willkürliche Constanten. Ist die Integration ausgeführt, so erhält man schliesslich die Functionen P_α direct aus den Gleichungen $P_\alpha = (P_\alpha)$.

Von den $2n + m''$ Constanten aber bestimmen sich m'' durch die Gleichungen (11b), so dass am Ende nur $2(n - m')$ übrig bleiben. Dieselben reichen gerade aus, um den Grenzbedingungen zu genügen; denn letztere müssen in Uebereinstimmung mit den Gleichungen (11a) gegeben sein und reduciren sich daher für jede Grenze auf die Anzahl $n - m'$. Man könnte auch umgekehrt — und dies ist vielleicht noch übersichtlicher — die Constanten durch die Gleichungen (11b) und die $2n$ Grenzbedingungen bestimmen, wodurch alsdann den Gleichungen (11a) von selbst genügt würde.*)

Wir wollen die $2n$ Constanten, welche nach Befriedigung der Gleichungen (11b) übrig bleiben und durch die Grenzbedingungen zu bestimmen sind, künftig $c_1\, c_2 \ldots c_{2n}$ nennen.

Ist $m'' = 0$, d. h. bestehen nur *endliche* Bedingungsgleichungen zwischen den y_i, so bietet für manche Betrachtungen folgende Wahl der Constanten $c_1\, c_2 \ldots c_{2n}$ besondere Vortheile: es werde allgemein mit c_i der Werth von y_i, mit c_{n+i} der Werth von y_i' für $x = a$ bezeichnet. Dann lassen sich vermittelst der Differentialgleichungen (17) die Werthe aller höheren Ableitungen der y_i für $x = a$ berechnen (vorausgesetzt, dass die Determinante R für $x = a$ nicht verschwindet),

*) Wäre eine der Differentialgleichungen (11b) durch eine endliche Gleichung zwischen $x\, y_1\, y_2 \ldots y_n$, $\psi = \text{const.}$, ersetzbar — welchen Fall wir ausdrücklich ausgeschlossen haben —, so müssten die Grenzwerthe y_i^0 und y_i^1 der Relation $\psi^1 = \psi^0$ genügen, wenn die Constantenbestimmung überhaupt möglich sein sollte; es bliebe dann aber offenbar mindestens eine der Integrationsconstanten noch willkürlich. Uebrigens ist die Ausführbarkeit der Constantenbestimmung auf die oben angegebene Weise noch an andere Bedingungen geknüpft, wie ich einer mündlichen Mittheilung von Herrn Mayer entnehme; beispielsweise daran, dass die Function F kein vollständiger Differentialquotient sein darf. Wir müssen daher die Möglichkeit jener Bestimmung ausdrücklich als eine *Voraussetzung* bezeichnen, deren Erfüllung im Folgenden immer angenommen werden soll. Cf. Mayer in Crelle's J. 69, p. 240.

und man kann daher die Functionen y_i nach Potenzen von $x - a$ entwickeln, wobei folgende Anfangsglieder auftreten:

$$y_i = c_i + c_{n+i}(x-a) + \cdots.$$

Setzt man für $y_i\, P_\alpha\, Q_\beta$ die gefundenen Functionen in den Ausdruck

$$\Delta J = \int\limits_{x^0}^{x^1} \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_i} \eta_i + \frac{\partial F_1}{\partial y_i'} \eta_i' \right) dx$$

$$= \int\limits_{x^0}^{x^1} \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F_1}{\partial y_i'} \right) \eta_i \, dx + \left[\sum_i \frac{\partial F_1}{\partial y_i'} \eta_i \right]_{x=x^0}^{x=x^1}$$

ein, so wird derselbe bei *beliebiger* Wahl der Variationen η_i, wenn dieselben nur an den Grenzen x^0 und x^1 verschwinden, *identisch* gleich Null. Dieser Umstand ist von grösster Wichtigkeit für die nun folgende Erörterung der Frage, ob die gefundenen Functionen y_i das Integral $\int\limits_{x^0}^{x^1} F\, dx$ wirklich zu einem Minimum machen.

Zur directen Entscheidung dieser Frage wäre es nothwendig, bei Entwickelung der unter dem Integralzeichen stehenden Function

$$F(xy_1 + \eta_1 y_1' \ldots y_n + \eta_n y_n' + \eta_n')$$

nach Potenzen der η_i und η_i' die Glieder bis einschliesslich zur zweiten Ordnung zu berücksichtigen und dementsprechend auch in den aus (11a) und (11b) durch Potenzentwickelung hervorgehenden Bedingungsgleichungen zwischen den η_i und η_i' die Glieder zweiter Ordnung nicht zu vernachlässigen. Wollte man die Untersuchung auf diesem Wege durchführen, so würde man fortwährend mit gemischten (aus Gliedern ersten und zweiten Grades zusammengesetzten) Ausdrücken zu operiren haben, wodurch erhebliche Schwierigkeiten entstehen würden.

Nun kann man aber statt der Frage, ob das Integral $\int\limits_{x^0}^{x^1} F\, dx$ einen Minimalwerth erhält, auch die folgende stellen: Wird das Integral $J = \int\limits_{x^0}^{x^1} F_1\, dx$, nachdem darin die Zeichen P_α und Q_β vorweg durch die Lösungen der Differentialgleichungen (17) ersetzt, die Zeichen y_i und y_i' aber zunächst beibehalten sind, für das aufgestellte System der Functionen y_i ein Minimum, d. h. kleiner, als für jedes beliebige andere System y_i, welches ebenfalls den Gleichungen (11a) und (11b) und den gegebenen Grenzbedingungen genügt? Diese Frage ist mit

der ursprünglichen deshalb völlig gleichbedeutend, weil offenbar für alle überhaupt in Betracht kommenden Systeme y_i identisch $F_1 = F$ wird. Die neue Formulirung der Frage bietet aber den Vortheil, dass bei der Variation des Integrales $J = \int\limits_{x^0}^{x^1} F_1\,dx$ die Glieder erster Ordnung, wie wir sahen, identisch verschwinden, wodurch zugleich die Glieder zweiter Ordnung in den zwischen den η_i bestehenden Bedingungsgleichungen überflüssig werden. Das Minimum hängt daher bei dieser Fragestellung schliesslich nur von dem Vorzeichen der *zweiten* Variation

$$(18)\quad \Delta^2 J = \frac{1}{2}\int\limits_{x^0}^{x^1} \Omega(\eta\,\eta')\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{x^0}^{x^1} \sum_{i,k}\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i\,\partial y_k}\eta_i\eta_k + 2\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i'\,\partial y_k'}\eta_i\eta_k' + \frac{\partial^2 F}{\partial y_i'\,\partial y_k'}\eta_i'\eta_k'\right)dx$$

ab, wo die Functionen $\eta_1\ \eta_2 \ldots \eta_n$ an die aus (11a) und (11b) hervorgehenden *linearen* Gleichungen und Differentialgleichungen

$$(19\mathrm{a})\qquad \sum_i \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i}\eta_i = 0 \qquad\qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m'),$$

$$(19\mathrm{b})\qquad \sum_i\left(\frac{\partial \Psi_\beta}{\partial y_i}\eta_i + \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial y_i'}\eta_i'\right) = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, m'')$$

gebunden sind.

Für die Uebersichtlichkeit der folgenden Untersuchungen ist es zweckmässig, der zweiten Variation noch eine etwas andere Gestalt zu geben. Offenbar nämlich wird für alle Functionen η_i, welche den Bedingungen (19a) und (19b) genügen,

$$(20)\qquad \Omega(\eta\,\eta') = \Omega(\eta\,\eta'\,\pi\,\chi),$$

wo $\Omega(\eta\,\eta'\,\pi\,\chi)$, durch die Gleichung

$$(21)\quad \Omega(\eta\,\eta'\,\pi\,\chi) = \sum_{i,k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i\,\partial y_k}\eta_i\eta_k + 2\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i\,\partial y_k'}\eta_i\eta_k' + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i'\,\partial y_k'}\eta_i'\eta_k'\right)$$

$$+ 2\sum_{\alpha=1}^{m'}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i}\eta_i\pi_\alpha + 2\sum_{\beta=1}^{m''}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \Psi_\beta}{\partial y_i}\eta_i + \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial y_i'}\eta_i'\right)\chi_\beta$$

definirt ist, während π_α und χ_β willkürliche Functionen von x bedeuten. Man kann daher geradezu

$$(22)\qquad \Delta^2 J = \frac{1}{2}\int\limits_{x^0}^{x^1}\Omega(\eta\,\eta'\,\pi\,\chi)\,dx$$

setzen.

Wir treffen, bevor wir in die Untersuchung des Vorzeichens von $\Delta^2 J$ eintreten, noch einige Vorbereitungen, um später den Gang der Entwickelung nicht unterbrechen zu dürfen.

Die aus der Integration des simultanen Systems

$$(23)\qquad \begin{cases} 1)\ \dfrac{\partial F_1}{\partial y_i} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F_1}{\partial y_i'} = 0 & (i=1,2,\ldots,n), \\ 2)\ \dfrac{d^2\Phi_\alpha}{dx^2} = 0 & (\alpha=1,2,\ldots,m'), \\ 3)\ \Psi_\beta = 0 & (\beta=1,2,\ldots,m'') \end{cases}$$

hervorgegangenen Functionen $y_i\, P_\alpha\, Q_\beta$ waren, wie wir sahen, mit $2n$ Integrationsconstanten $c_1\, c_2 \ldots c_{2n}$ behaftet. Dieselben lassen sich — in Folge der über die Natur der Differentialgleichungen (23_3) gemachten Voraussetzung — im Allgemeinen so bestimmen, dass die Functionen y_i an zwei Stellen x^0 und x beliebig gewählte Werthe annehmen.

Führen wir die Bezeichnungen

$$(24)\qquad \left.\begin{cases} u_{i\lambda} = \dfrac{\partial y_i}{\partial c_\lambda} & (i=1,2,\ldots,n) \\ p_{\alpha\lambda} = \dfrac{\partial P_\alpha}{\partial c_\lambda} & (\alpha=1,2,\ldots,m') \\ q_{\beta\lambda} = \dfrac{\partial Q_\beta}{\partial c_\lambda} & (\beta=1,2,\ldots,m'') \end{cases}\right\}\ \lambda=1,2,\ldots,2n$$

ein, so genügen diese neuen Functionen $u\,p\,q$ den folgenden Differentialgleichungen, welche aus (23) durch Differentiation nach den Constanten c_λ entstehen:

$$(25)\qquad \begin{cases} 1)\ \dfrac{\partial\Omega(u_\lambda u_\lambda' p_\lambda q_\lambda)}{\partial u_{i\lambda}} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial\Omega(u_\lambda u_\lambda' p_\lambda q_\lambda)}{\partial u_{i\lambda}'} = 0, \\ 2)\ \dfrac{d^2}{dx^2}\left(\sum_i \dfrac{\partial\Phi_\alpha}{\partial y_i} u_{i\lambda}\right) = 0, \\ 3)\ \sum_i\left(\dfrac{\partial\Psi_\beta}{\partial y_i} u_{i\lambda} + \dfrac{\partial\Psi_\beta}{\partial y_i'} u_{i\lambda}'\right) = 0. \end{cases}$$

Bilden wir dann ein System linearer Functionen

$$(26)\qquad u_i = \sum_{\lambda=1}^{2n} \gamma_\lambda u_{i\lambda};\quad p_\alpha = \sum_{\lambda=1}^{2n} \gamma_\lambda p_{\alpha\lambda};\quad q_\beta = \sum_{\lambda=1}^{2n} \gamma_\lambda q_{\beta\lambda},$$

so werden sich auch die $2n$ Constanten γ_λ im Allgemeinen so bestimmen lassen, dass die Functionen $u_1\, u_2 \ldots u_n$ an *zwei* Stellen x^0 und x beliebig gegebene Werthe annehmen. Daraus ist zu schliessen, dass die Determinante

$$\text{(27)} \qquad \Delta(x, x^0) = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1,2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{n,2n} \\ \overset{0}{u}_{11} & \overset{0}{u}_{12} & \dots & \overset{0}{u}_{1,2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{0}{u}_{n1} & \overset{0}{u}_{n2} & \dots & \overset{0}{u}_{n,2n} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet. — Dieser für die Folge äusserst wichtige Umstand lässt sich übrigens für den Fall $m'' = 0$ direct nachweisen, wenn man das auf Seite 560 definirte System von Constanten $c_1 c_2 \dots c_{2n}$ zu Grunde legt und a gleich x^0 annimmt (wobei nur vorausgesetzt werden muss, dass die Determinante R für $x = x^0$ nicht verschwindet); es wird dann nämlich offenbar

$$\Delta(x, x^0) = (x^0 - x)^n (1 + \cdots).$$

Wir erinnern uns nun zweier Identitäten, welche bekannte Eigenschaften quadratischer Formen ausdrücken, nämlich der folgenden

$$\sum_i \left(\frac{\partial \Omega(\eta \eta' \pi \chi)}{\partial \eta_i} \eta_i + \frac{\partial \Omega(\eta \dots)}{\partial \eta_i'} \eta_i' \right) + \sum_\alpha \frac{\partial \Omega(\eta \dots)}{\partial \pi_\alpha} \pi_\alpha + \sum_\beta \frac{\partial \Omega(\eta \dots)}{\partial \chi_\beta} \chi_\beta$$
$$= 2\Omega(\eta \eta' \pi \chi),$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial \Omega(\eta \eta' \pi \chi)}{\partial \eta_i} (\eta_i) + \frac{\partial \Omega(\eta \dots)}{\partial \eta_i'} (\eta_i') \right) + \sum_\alpha \frac{\partial \Omega(\eta \dots)}{\partial \pi_\alpha} (\pi_\alpha)$$
$$+ \sum_\beta \frac{\partial \Omega(\eta \dots)}{\partial \chi_\beta} (\chi_\beta)$$
$$= \sum_i \left(\frac{\partial \Omega((\eta)(\eta')(\pi)(\chi))}{\partial (\eta_i)} \eta_i + \frac{\partial \Omega((\eta) \dots)}{\partial (\eta_i')} \eta_i' \right) + \sum_\alpha \frac{\partial \Omega((\eta) \dots)}{\partial (\pi_\alpha)} \pi_\alpha$$
$$+ \sum_\beta \frac{\partial \Omega((\eta) \dots)}{\partial (\chi_\beta)} \chi_\beta.$$

Verstehen wir unter η_i und (η_i) speciell solche Functionen, welche den Gleichungen (19) genügen, so gehen diese beiden Identitäten in die folgenden einfacheren Relationen über:

$$\text{(28)} \qquad \sum_i \left(\frac{\partial \Omega(\eta \eta' \pi \chi)}{\partial \eta_i} \eta_i + \frac{\partial \Omega(\eta \dots)}{\partial \eta_i'} \eta_i' \right) = 2\Omega(\eta \eta' \pi \chi),$$

$$\text{(28 a)} \qquad \sum_i \left(\frac{\partial \Omega(\eta \eta' \pi \chi)}{\partial \eta_i} (\eta_i) + \frac{\partial \Omega(\eta \dots)}{\partial \eta_i'} (\eta_i') \right)$$
$$= \sum_i \left(\frac{\partial \Omega((\eta)(\eta')(\pi)(\chi))}{\partial (\eta_i)} \eta_i + \frac{\partial \Omega((\eta) \dots}{\partial (\eta_i')} \eta_i' \right).$$

Wir wollen in der Folge immer unter $u_i\, p_\alpha\, q_\beta$ ein System von der

Form (26) verstehen, in welchem die Constanten γ_λ so bestimmt sind, dass die Gleichungen

$$\sum_i \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i} u_i = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m'')$$

an *zwei* Stellen x erfüllt werden. Dann gelten diese Gleichungen überhaupt für *beliebige* Werthe von x (wegen (25_2)), sodass man schliesslich dem für die $u_{i\lambda} p_{\alpha\lambda} q_{\beta\lambda}$ gültigen Systeme der Gleichungen (25) das folgende System für die $u_i p_\alpha q_\beta$ zur Seite stellen kann:

$$(29) \quad \begin{cases} 1) \ \dfrac{\partial \Omega(uu'pq)}{\partial u_i} - \dfrac{d}{dx} \dfrac{\partial \Omega(uu'pq)}{\partial u_i'} = 0 & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ 2) \ \displaystyle\sum_i \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i} u_i = 0 & (\alpha = 1, 2, \ldots, m'), \\ 3) \ \displaystyle\sum_i \left(\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial y_i} u_i + \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial y_i'} u_i' \right) = 0 & (\beta = 1, 2, \ldots, m''). \end{cases}$$

Aus (29_1) erhält man durch Multiplication mit u_i und Summirung über i mit Rücksicht auf die Gleichung (28) (wenn darin $u\,p\,q$ statt $\eta\,\pi\,\chi$ gesetzt wird):

$$(30) \qquad 2\Omega(uu'pq) = \frac{d}{dx} \sum_i \frac{\partial \Omega(uu'pq)}{\partial u_i'} u_i.$$

Bezeichnet man mit $(u_i)\,(p_\alpha)\,(q_\beta)$ ein zweites System von der Beschaffenheit des Systems $u_i\,p_\alpha\,q_\beta$, so ergiebt sich ferner durch Multiplication der Gleichung (29_1) mit (u_i) und Summirung über i:

$$\sum_i \left(\frac{\partial \Omega(uu'pq)}{\partial u_i} (u_i) + \frac{\partial \Omega(u\ldots)}{\partial u_i'} (u_i') \right) - \frac{d}{dx} \sum_i \frac{\partial \Omega(u\ldots)}{\partial u_i'} (u_i) = 0,$$

und hieraus durch Vertauschung von $u_i\,p_\alpha\,q_\beta$ mit $(u_i)\,(p_\alpha)\,(q_\beta)$:

$$\sum_i \left(\frac{\partial \Omega((u)(u')(p)(q))}{\partial (u_i)} u_i + \frac{\partial \Omega((u)\ldots)}{\partial (u_i')} u_i' \right) - \frac{d}{dx} \sum_i \frac{\partial \Omega((u)\ldots)}{\partial (u_i')} u_i = 0.$$

Die Subtraction der letzten Gleichung von der vorletzten liefert dann mit Benutzung der Relation (28a) (wenn darin wiederum $\eta\,\pi\,\chi\,(\eta)\,(\pi)\,(\chi)$ durch $upq\,(u)\,(p)\,(q)$ ersetzt werden), die folgende Gleichung

$$\frac{d}{dx} \sum_i \left(\frac{\partial \Omega((u)(u')(p)(q))}{\partial (u_i')} u_i - \frac{\partial \Omega(uu'pq)}{\partial u_i'} (u_i) \right) = 0,$$

und durch Integration schliesslich die Gleichung:

$$(31) \qquad \sum_i \left(\frac{\partial \Omega((u)(u')(p)(q))}{\partial (u_i')} u_i - \frac{\partial \Omega(uu'pq)}{\partial u_i'} (u_i) \right) = \text{const.}$$

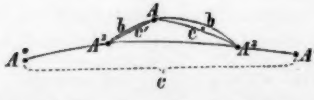
Nach diesen Vorbereitungen treten wir in die Discussion der zweiten Variation

$$\Delta^2 J = \frac{1}{2}\int_{x^0}^{x^1} \Omega(\eta\eta'\varkappa\chi)\,dx$$

ein. Dabei setzen wir voraus, dass die Grössen $u_{i\lambda}\, u_{\alpha\lambda}\, u_{\beta\lambda}$, sowie die in Ω enthaltenen partiellen Ableitungen von $F_1\, \Phi_\alpha\, \Psi_\beta$ im Intervalle $x^0 x^1$ durchaus endlich bleiben.

Wir folgen dem in § 1 angegebenen Gedankengange und wollen uns auch wieder der aus der graphischen Darstellung für $n = 1$ entnommenen Begriffe zur abgekürzten Bezeichnung bedienen. Demnach fixiren wir zunächst auf der Curve c, welche durch die Functionen y_i definirt ist, zwei Punkte A^2 und A^3 resp. mit den Coordinaten $x^2 y_i^2$ und $x^3 y_i^3$. Zwischen diesen beiden Punkten denken wir uns eine nahe bei c verlaufende Curve b construirt, deren Ordinaten als Functionen von x gleich $y_i + \eta_i$ sein mögen. Die Functionen η_i, durch welche diese Curve bestimmt ist, müssen für $x = x^2$ und $x = x^3$ verschwinden und überdies den Gleichungen (19a) und (19b) genügen, sind aber im Uebrigen willkürlich zu wählen; auch brauchen ihre Ableitungen η_i' *nicht* stetig zu sein. Schliesslich fixiren wir auf der Curve b einen beliebigen Punkt A, dessen Coordinaten im Folgenden vorzugsweise mit $x,\, y_i + \eta_i$ bezeichnet werden sollen. Wir verbinden denselben durch die beiden Minimalcurven c' und c'' respective mit den Punkten A^2 und A^3. Die laufenden Coordinaten dieser letzteren Curven bezeichnen wir mit überstrichenen Buchstaben: $\bar{x},\, \bar{y}_i + \bar{u}_i$ (für die Curve c') und $\bar{x},\, \bar{y}_i + \bar{v}_i$ (für die Curve c''). Wir haben dann

$$(32)\qquad \begin{cases} \bar{u}_i = \sum\limits_{\lambda=1}^{2n} \alpha_\lambda\, \bar{u}_{i\lambda}, \\ \bar{v}_i = \sum\limits_{\lambda=1}^{2n} \beta_\lambda\, \bar{v}_{i\lambda} \end{cases}$$



zu setzen und die $4n$ Constanten α_λ und β_λ so zu bestimmen, dass $\bar{u}_i$ für $\bar{x} = x^2$ verschwindet und für $\bar{x} = x$ den Werth η_i annimmt, während $\bar{v}_i$ für $\bar{x} = x^3$ verschwindet und für $\bar{x} = x$ ebenfalls den Werth η_i annimmt. Die Bestimmung der Constanten wird offenbar nur in dem Falle unmöglich, wenn der Punkt A (genauer der zu diesem Punkte gehörende Werth von x) so gewählt ist, dass eine der beiden

nach (27) zu definirenden Determinanten $\Delta(x, x^2)$ und $\Delta(x, x^3)$ verschwindet (dass nämlich diese Determinanten nicht *identisch* verschwinden, haben wir auf Seite 563 gesehen). Schliessen wir diesen Fall aus und bezeichnen die Determinante $\Delta(x, x^2)$ kurz mit U, die zu $u_{i\lambda}$ gehörende Subdeterminante von U mit $U_{i\lambda}$, ebenso die Determinante $\Delta(x, x^3)$ mit V, die zu $v_{i\lambda}$ gehörende Subdeterminante von V mit $V_{i\lambda}$, so erhalten wir für die Constanten $\alpha_\lambda\,\beta_\lambda$ folgende Werthe

$$(33)\qquad \begin{cases} \alpha_\lambda = \sum\limits_{h=1}^{n} \dfrac{U_{h\lambda}}{U}\,\eta_h, \\ \beta_\lambda = \sum\limits_{h=1}^{n} \dfrac{V_{h\lambda}}{V}\,\eta_h. \end{cases}$$

Es wird daher

$$(34)\qquad \begin{cases} \bar{u}_i = \sum\limits_{\lambda=1}^{2n} \alpha_\lambda \bar{u}_{i\lambda} = \sum\limits_{\lambda=1}^{2n} \sum\limits_{h=1}^{n} \dfrac{U_{h\lambda}\bar{u}_{i\lambda}}{U}\,\eta_h; \\ \bar{v}_i = \sum\limits_{\lambda=1}^{2n} \beta_\lambda \bar{u}_{i\lambda} = \sum\limits_{\lambda=1}^{2n} \sum\limits_{h=1}^{n} \dfrac{V_{h\lambda}\bar{u}_{i\lambda}}{V}\,\eta_h, \end{cases}$$

und ferner

$$(34\text{a})\qquad \begin{cases} \dfrac{d\bar{u}_i}{d\bar{x}} = \bar{u}_i' = \sum\limits_{\lambda=1}^{2n} \alpha_\lambda \bar{u}_{i\lambda}' = \sum\limits_{\lambda=1}^{2n} \sum\limits_{h=1}^{n} \dfrac{U_{h\lambda}\bar{u}_{i\lambda}'}{U}\,\eta_h; \\ \dfrac{d\bar{v}_i}{d\bar{x}} = \bar{v}_i' = \sum\limits_{\lambda=1}^{2n} \beta_\lambda \bar{u}_{i\lambda}' = \sum\limits_{\lambda=1}^{2n} \sum\limits_{h=1}^{n} \dfrac{V_{h\lambda}\bar{u}_{i\lambda}'}{V}\,\eta_h. \end{cases}$$

Um zunächst $(\Delta^2 J)_{c'}$ zu finden, definiren wir gewisse nach Analogie der Grössen $\bar{u}_i$ zusammengesetzte Functionen $\bar{p}_\alpha$ und $\bar{q}_\beta$ durch die Gleichungen

$$(34\text{b})\qquad \begin{cases} \bar{p}_\alpha = \sum\limits_{\lambda=1}^{2n} \alpha_\lambda \bar{p}_{\alpha\lambda} = \sum\limits_{\lambda=1}^{2n} \sum\limits_{h=1}^{n} \dfrac{U_{h\lambda}\bar{p}_{\alpha\lambda}}{U}\,\eta_h, \\ \bar{q}_\beta = \sum\limits_{\lambda=1}^{2n} \alpha_\lambda \bar{q}_{\beta\lambda} = \sum\limits_{\lambda=1}^{2n} \sum\limits_{h=1}^{n} \dfrac{U_{h\lambda}\bar{q}_{\beta\lambda}}{U}\,\eta_h. \end{cases}$$

Dann können wir nach (22) setzen:

$$(35)\qquad (\Delta^2 J)_{c'} = \frac{1}{2}\int\limits_{x^2}^{x} \bar{\Omega}(\bar{u}\,\bar{u}'\,\bar{p}\,\bar{q})\,d\bar{x},$$

und wegen der Relation (30) (wenn darin überstrichene Buchstaben substituirt werden):

$$-\frac{1}{4}\int\limits_{x^2}^{x}\frac{d}{d\bar{x}}\left(\sum_i \frac{\partial\bar{\Omega}(\bar{u}\bar{u}'\bar{p}\bar{q})}{\partial\bar{u}_i'}\,\bar{u}_i\right)d\bar{x},$$

und da für $\bar{x}=x^2$ die Grössen $\bar{u}_i$ verschwinden:

$$(36)\qquad (\Delta^2 J)_{c'} = \frac{1}{4}\left[\sum_i \frac{\partial\bar{\Omega}(\bar{u}\bar{u}'\bar{p}\bar{q})}{\partial\bar{u}_i'}\,\bar{u}_i\right]^{\bar{x}=x}.$$

Führen wir in die Gleichung (36) die durch (34), (34a) und (34b) gegebenen Werthe von $\bar{u}_i\bar{u}_i'\bar{p}_\alpha\bar{q}_\beta$ ein und bedenken, dass $\dfrac{\partial\bar{\Omega}(\bar{u}\bar{u}'\bar{p}\bar{q})}{\partial\bar{u}_i'}$ eine lineare Function der $\bar{u}_i\bar{u}_i'\bar{p}_\alpha\bar{q}_\beta$ ist und daher die Relation:

$$\frac{\partial\bar{\Omega}(\bar{u}\bar{u}'\bar{p}\bar{q})}{\partial\bar{u}_i'} = \sum_{\mu=1}^{2n}\alpha_\mu\,\frac{\partial\bar{\Omega}(\bar{u}_\mu\bar{u}_\mu'\bar{p}_\mu\bar{q}_\mu)}{\partial\bar{u}_{i\mu}'}$$

gilt, so finden wir

$$(37)\qquad (\Delta^2 J)_{c'} = \frac{1}{4}\sum_{\lambda,\mu=1}^{2n}\alpha_\lambda\alpha_\mu\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\bar{\Omega}(\bar{u}_\mu\bar{u}_\mu'\bar{p}_\mu\bar{q}_\mu)}{\partial\bar{u}_{i\mu}'}\,\bar{u}_{i\lambda}\right]^{\bar{x}=x}.$$

Diese Formel wird später zur Anwendung kommen.

Die Gleichung (36) kann mit Anwendung der Definition (21) auch folgendermassen geschrieben werden:

$$(\Delta^2 J)_{c'} = \frac{1}{2}\left[\sum_{i,k}\frac{\partial^2\bar{F}_1}{\partial\bar{y}_i'\partial\bar{y}_k}\,\bar{u}_i\bar{u}_k + \frac{\partial^2\bar{F}_1}{\partial\bar{y}_i'\partial\bar{y}_k'}\,\bar{u}_i\bar{u}_k'\right]^{\bar{x}=x}$$

$$+\frac{1}{2}\left[\sum_{i,\beta}\frac{\partial\bar{\Psi}_\beta}{\partial\bar{y}_i'}\,\bar{u}_i\bar{q}_\beta\right]^{\bar{x}=x},$$

und da $\left[\bar{u}_i\right]^{\bar{x}=x}=\eta_i$, $\left[\bar{u}_k\right]^{\bar{x}=x}=\eta_k$ ist,

$$(\Delta^2 J)_c = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i'\partial y_k}\,\eta_i\eta_k + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i'\partial y_k'}\,\eta_i\left[\bar{u}_k'\right]^{\bar{x}=x}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,\beta}\frac{\partial\Psi_\beta}{\partial y_i'}\,y_i\left[\bar{q}_\beta\right]^{\bar{x}=x}.$$

Fügt man hierzu die entsprechende Gleichung für $(\Delta^2 J)_{c''}$ — wobei für den Augenblick die den $\bar{q}_\beta$ entsprechenden Functionen mit $\bar{\bar{q}}_\beta$ bezeichnet werden mögen — und addirt beide Gleichungen zu einander, so erhält man schliesslich

$$(38)\quad (\Delta^2 J)_{c+c'} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i' \partial y_k'} \eta_i \left(\left[\bar{u}_k'\right]^{\bar{x}=x} - \left[\bar{v}_k'\right]^{\bar{x}=x} \right)$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,\beta} \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial y_i'} \eta_i \left(\left[\bar{q}_\beta\right]^{\bar{x}=x} - \left[\bar{\bar{q}}_\beta\right]^{\bar{x}=x} \right),$$

und mit Rücksicht auf (34a) und (34b):

$$(39)\quad (\Delta^2 J)_{c'+c''} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i' \partial y_k'} \eta_i \left(\sum_{h,\mu} \frac{U_{h\mu} u_{k\mu}'}{U} \eta_h - \sum_{h,\mu} \frac{V_{h\mu} u_{k\mu}'}{V} \eta_h \right)$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,\beta} \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial y_i'} \eta_i \left(\sum_{h,\mu} \frac{U_{h\mu} q_{\beta\mu}}{U} \eta_h - \sum_{h,\mu} \frac{V_{h\mu} q_{\beta\mu}}{V} \eta_h \right).$$

Aus den Formeln (38) und (39) lassen sich *nothwendige* Bedingungen für das Minimum von J ableiten.

Wir wollen, um zunächst die Schlussweise klarzulegen, für den Augenblick den speciellen Fall betrachten, dass gar keine Bedingungsgleichungen (weder endliche noch Differentialgleichungen) zwischen den y_i gegeben sind. Wir haben alsdann $m' = 0$, $m'' = 0$, $F_1 = F$ zu setzen und erhalten aus der Formel (39) die einfachere:

$$(40)\quad (\Delta^2 J)_{c'+c''} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'} \eta_i \left(\sum_{h,\mu} \frac{U_{h\mu} u_{k\mu}'}{U} \eta_h - \sum_{h,\mu} \frac{V_{h\mu} u_{k\mu}'}{V} \eta_h \right).$$

Die Curve b und mit ihr die drei Punkte $A^2 A A^3$, d. h. die Grössen $x^2, x \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_n, x^3$ können in diesem Falle ganz willkürlich gewählt werden.

Halten wir nun den Punkt A fest und bewegen die Punkte A^2 und A^3 gegen A hin; mit anderen Worten, geben wir den Grössen $x \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_n$ unveränderliche Werthe und lassen die Grössen x^2 und x^3 sich gegen den Grenzwerth x verändern, erstere wachsend, letztere abnehmend: so nähert sich gleichzeitig der Ausdruck

$$\frac{(x - x^2)(x^3 - x)}{x^3 - x^2} (\Delta^2 J)_{c'+c''}$$

dem Grenzwerthe

$$(41)\quad \lim \left(\frac{(x - x^2)(x^3 - x)}{x^3 - x^2} (\Delta^2 J)_{c'+c''} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'} \eta_i \eta_k.$$

Es ist nämlich $u_{k\mu}' = \dfrac{u_{k\mu} - u_{k\mu}^2}{x - x^2} + \delta_{k\mu}$, wo $\delta_{k\mu}$ eine mit $x - x^2$ verschwindende Grösse bedeutet, und folglich

$$(42)\qquad (x-x^2)\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{U_{h\mu}u'_{k\mu}}{U}=\sum_{\mu}\frac{U_{h\mu}u_{k\mu}}{U}-\sum_{\mu}\frac{U_{h\mu}u^2_{k\mu}}{U}+\sum_{\mu}\frac{U_{h\mu}(x-x^2)}{U}\,\delta_{k\mu}.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung ist gleich 1 oder 0, jenachdem $h=k$ oder $h \gtrless k$; das zweite ist nach einem bekannten Satze identisch gleich 0; das dritte wird im Allgemeinen, d. h. abgesehen von speciellen Werthen x, mit $x-x^2$ unendlich klein, da die Grössen $\delta_{k\mu}$ unendlich klein werden, während die Quotienten $\frac{U_{h\mu}(x-x^2)}{U}$, deren Zähler und Nenner je vom Grade n (oder der Zähler von höherem Grade) verschwinden*), endlich bleiben. Es ist daher

$$(x-x^2)\frac{1}{2}\sum_{i,k}\frac{\partial^2 F}{\partial y_i'\partial y_k'}\eta_i\sum_{h,\mu}\frac{U_{h\mu}u'_{k\mu}}{U}\eta_h=\frac{1}{2}\sum_{i,k}\frac{\partial^2 F}{\partial y_i'\partial y_k'}\eta_i\eta_k+\delta,$$

wo $\lim\limits_{x^2=x}\delta=0$ ist. In derselben Weise lässt sich die Gleichung

$$-(x^3-x)\frac{1}{2}\sum_{i,k}\frac{\partial^2 F}{\partial y_i'\partial y_k'}\eta_i\sum_{h,\mu}\frac{U_{h\mu}u'_{k\mu}}{U}\eta_h=\frac{1}{2}\sum_{i,k}\frac{\partial^2 F}{\partial y_i'\partial y_k'}\eta_i\eta_k+\varepsilon,$$

wo $\lim\limits_{x^3=x}\varepsilon=0$, begründen. Mit Rücksicht auf diese beiden Gleichungen erhält man aber aus der Formel (40) durch Multiplication mit $\frac{(x-x^2)(x^3-x)}{x^3-x^2}$ unmittelbar die folgende:

$$\frac{(x-x^2)(x^3-x)}{x^3-x^2}(\Delta^2 J)_{c'+c''}=\sum_{i,k}\frac{\partial^2 F}{\partial y_i'\partial y_k'}\eta_i\eta_k+\frac{x^3-x}{x^3-x^2}\,\delta+\frac{x-x^2}{x^3-x^2}\,\varepsilon.$$

Dieselbe ist, da die Factoren von δ und ε auf der rechten Seite zwischen 0 und 1 liegen, mit (41) gleichbedeutend.

Aus (41) lässt sich nun schliessen, dass, wenn $(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ niemals negativ werden soll, auch der Ausdruck

$$(43)\qquad \sum_{i,k}\frac{\partial^2 F}{\partial y_i'\partial y_k'}\eta_i\eta_k$$

---

*) Bei der auf Seite 560 getroffenen Wahl der Constanten $c_1c_2\ldots c_{2n}$ ist dies unmittelbar ersichtlich, wenn man in den dortigen Entwickelungen für a den dem Punkte A entsprechenden Werth von x annimmt. Es wird dann $U=(x^2-x)^n(1+\cdots)$, und die Grössen $U_{h\mu}$ enthalten sämmtlich den Factor $(x^2-x)^{n-1}$.

bei keiner Wahl der Grössen $x\eta_1 \ldots \eta_n$ negativ werden darf; denn man kann ja die Werthe x^2 und x^3 immer so nahe an x annehmen, dass $(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ dasselbe Vorzeichen, wie

$$\lim\left(\frac{(x-x^2)(x^3-x)}{x^3-x^2}\,(\Delta^2 J)_{c'+c''}\right)$$

erhält. Hiermit ist eine nothwendige Bedingung des Minimums gefunden.

Ist nun $m''=0$, während die Anzahl m' der gegebenen *endlichen* Gleichungen zwischen den y_i beliebig ist, so hat man in die vorstehenden Betrachtungen nur noch die Bedingung aufzunehmen, dass die dem Punkte A entsprechenden Grössen η_i in Uebereinstimmung mit den Gleichungen (19a) gewählt sein müssen. Man erhält dann die nothwendige Bedingung des Minimums, dass der Ausdruck (43) für kein den Gleichungen (19a) genügendes System der Grössen η_i negativ werden darf.

Ist endlich auch m'' von Null verschieden, so dürfte man auf dem eingeschlagenen Wege nur schwer vorwärts kommen; denn die auf Seite 560 getroffene Wahl der Constanten c_λ wird in diesem Falle unzulässig, wodurch ein wichtiges Hülfsmittel für die Untersuchung der Determinante U und der Grenzwerthe $\lim\limits_{x^2=x}\dfrac{U_{h\mu}(x^2-x)}{U}$ verloren geht. Indess führt unter diesen allgemeinen Voraussetzungen die folgende Ueberlegung, bei welcher statt der Formel (39) die Formel (38) zu Grunde gelegt wird, direct zum Ziele.

Die Grössen $\overline{u}_k$ verschwinden sämmtlich für $\overline{x}=x^2$ und nehmen für $\overline{x}=x$ die Werthe η_k an. Es liegt daher der Gedanke nahe, falls die Werthe x^2 und x nahe zusammen rücken, in der Formel (38) den Ausdruck $\left[\overline{u}_k'\right]^{\overline{x}=x}$ durch $\dfrac{\eta_k}{x-x^2}$ $\left(\text{und ebenso } \overline{v}_k \text{ durch } \dfrac{\eta_k}{x-x^3}\right)$ zu ersetzen. Die Berechtigung einer solchen Substitution hängt von dem Umstande ab, ob bei unbegrenzter Annäherung des Punktes A^2 an den Punkt A (genauer des Werthes x^2 an den Werth x) die von A^2 bis A verlaufende Minimalcurve c' schliesslich geradlinig wird, oder, analytisch ausgedrückt, ob die Verhältnisse der n Functionen $\overline{u}_i$ schliesslich im ganzen Intervalle von $\overline{x}=x^2$ bis $\overline{x}=x$ constant und also gleich den Verhältnissen der Grössen $\left[\overline{u}_i'\right]^{\overline{x}=x^2}$ werden. Nun bestehen zwischen den zuletzt genannten Grössen gewisse lineare, homogene Relationen, welche aus (25_3) hervorgehen, wenn darin $x=x^2$ und die u_i sämmtlich gleich Null gesetzt werden:

$$(44)\qquad \sum_i \frac{\partial\Psi_\beta^2}{\partial y_i^{2'}}\left[\overline{u}_i'\right]^{\overline{x}=x^2}=0.$$

Sollen daher die Verhältnisse der Functionen $\bar{u}_i$ schliesslich im ganzen Intervall x^2x constant werden, so müssen die gegebenen Endwerthe $[\bar{u}_i]^{\bar{x}=x} = \eta_i$ den aus (44) hervorgehenden Relationen

$$(45) \qquad \sum_i \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial y_i'} \eta_i = 0 \qquad (\beta = 1, 2 \ldots m'')$$

genügen. Umgekehrt liegt in jenen Relationen die *hinreichende* Bedingung dafür, dass die Curve c' schliesslich geradlinig wird, vorausgesetzt, dass ausser den Gleichungen (25_3) keine anderen Relationen zwischen den u_i und u_i' (oder auch zwischen den u_i' allein) existiren, welche für jedes *beliebige* System u_i von der Form (26) befriedigt würden. Diese Voraussetzung wollen wir machen. Dass dieselbe nur *ausnahmsweise* unerfüllt sein kann, ist evident; denn jede neue Relation von der angegebenen Art würde entweder ein particuläres Integral der Differentialgleichungen (25) sein (dann könnten auch die Ausdrücke (26) nicht das *vollständige* Integral jener Differentialgleichungen darstellen), oder sie liesse sich aus den Gleichungen (25_2) und (25_3) ohne Integration direct ableiten (dann würde das System der Differentialgleichungen (25) von niederer als der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung werden, die Grössen $u_{i\lambda}$ also nicht mehr linear unabhängige Lösungen derselben sein, und die Determinante $\Delta(x, x^0)$ identisch verschwinden).

Genügen also die Grössen η_i ausser den Gleichungen (19a) noch den Gleichungen (45), so wird (unter der genannten Voraussetzung) $\lim\limits_{x^2=x}\left([\bar{u}_i]^{\bar{x}=x}(x - x^2)\right) = \eta_i$. Ebenso $\lim\limits_{x^3=x}\left([\bar{v}_i']^{\bar{x}=x}(x - x^3)\right) = \eta_i$. Man erhält daher aus der Formel (38), da das zweite Glied auf der rechten Seite wegen (45) gleich Null ist, schliesslich folgendes Analogon der Gleichung (41):

$$(46) \qquad \lim \frac{(x - x^2)(x^3 - x)}{x^3 - x^2} (\Delta^2 J)_{c' + c''} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i' \partial y_k'} \eta_i \eta_k.$$

Diese Gleichung zeigt, dass im Falle des Minimums der Ausdruck auf der rechten Seite bei keiner mit (19a) und (45) übereinstimmenden Wahl der Grössen η_i negativ werden darf.

Hiermit ist *eine nothwendige* Bedingung des Minimums ganz allgemein begründet. Wir bezeichnen dieselbe, wie in § 1, mit I.

Die Formel (39) liefert noch eine zweite *nothwendige* Bedingung des Minimums.

Denken wir uns den Punkt A auf der Curve b bewegt, d. h. verändern wir nach Annahme eines bestimmten Systems von Functionen η_i den Werth von x continuirlich, so wird der Ausdruck auf der rechten Seite von (39) sein Vorzeichen wechseln, wenn man eine

Stelle x passirt, an welcher eine der Determinanten U und V das Zeichen wechselt. Für eine solche Stelle selbst gilt die Formel (39), wie bei Ableitung derselben hervorgehoben wurde, nicht, wohl aber in unmittelbarer Nähe auf beiden Seiten derselben. Verschwindet nun etwa an der Stelle $x = a$ die Determinante U, so lässt sich zunächst jedenfalls durch kleine Verrückungen des Punktes A^3 erreichen, dass V nicht gleichzeitig verschwindet. Nehmen wir dann x nahe genug an der kritischen Stelle a an, so wird nach (39) der Ausdruck $U(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ das Vorzeichen des Ausdrucks

$$(47) \qquad S = \sum_{i,h,\mu} \left(\sum_k \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i' \partial y_k'} u_{k\mu}' + \sum_\beta \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial y_i'} q_{\beta\mu} \right) U_{h\mu} \eta_i \eta_h$$

erhalten, wenn nicht zufällig auch dieser Ausdruck für $x = a$ verschwindet. Letzteres wird aber durch geeignete Wahl der Curve b, d. h. der Functionen η_i, immer zu vermeiden sein, es sei denn, dass der Ausdruck S für $x = a$ überhaupt bei jeder mit (19a) verträglichen Wahl der Grössen η_i verschwindet. Es ist mir nicht gelungen, die Unmöglichkeit eines solchen Verhaltens von S allgemein nachzuweisen; wir müssen daher, wenn wir sagen, $U(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ habe in der Nähe des Punktes x^0 das Vorzeichen von S, diesen Vorbehalt ausdrücklich anmerken. Da nun — abgesehen von einem solchen Ausnahmefalle — das Product $U(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ bei Ueberschreitung der Stelle $x = a$ sein Vorzeichen behält, so folgt, dass der Ausdruck $(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ gleichzeitig mit U das Zeichen wechselt. Wir haben also den Satz: „Wechselt die Determinante $U = \Delta(x, x^2)$ ihr Vorzeichen im Intervalle $x^2\, x^1$, so kann $(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ sowohl positiv als negativ werden, es findet daher kein Minimum statt.“

Hiermit ist eine *zweite nothwendige* Bedingung des Minimums gewonnen. Es wird sich später zeigen, dass mit einer kleinen Modification schon die aus jener für $x^2 = x^0$ hervorgehende speciellere Bedingung in Verbindung mit der vorher begründeten Bedingung I *hinreicht*, umgekehrt die Existenz des Minimums nachzuweisen. Wir verzichten daher auf die weitere Discussion der Formel (39) und stellen mit Ausscheidung dessen, was sich später als überflüssig erweisen wird, die beiden Hauptresultate der vorstehenden Untersuchung zusammen:

Soll der Ausdruck $(\Delta^2 J)_{c'+c''}$ *niemals negativ werden, wie auch die Curve b und auf ihr der Punkt A gewählt sein mag (natürlich in Uebereinstimmung mit* (19a) *u.* (19b)), *so müssen jedenfalls folgende Bedingungen erfüllt sein:*

I. *Der Ausdruck* $\sum_{i,k} \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i' \partial y_k'} \eta_i \eta_k$ *darf nicht negativ werden, so lange die Grössen* η_i *den Gleichungen*

$$(48)\qquad \begin{cases} \sum\limits_i \dfrac{\partial\Phi_\alpha}{\partial y_i}\,\eta_i = 0, & (\alpha = 1, 2 \cdots m'), \\ \sum\limits_i \dfrac{\partial\Psi_\beta}{\partial y_i'}\,\eta_i = 0, & (\beta = 1, 2 \cdots m'') \end{cases}$$

genügen.

II. *Die Determinante* $\Delta(x, x^0)$ *darf im Intervalle* $x^0 x^1$ *nicht das Zeichen wechseln.*

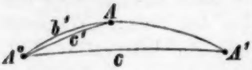
Die Bedingungen I *und* II *sind also nothwendige Bedingungen des Minimums.*

Wir kommen nun zum zweiten Theile der Untersuchung, nämlich zur Discussion der zweiten Variation in ihrer allgemeinsten Gestalt:

$$(49)\qquad (\Delta^2 J)_b = \frac{1}{2}\int_{x^0}^{x^1} \Omega(\eta\,\eta'\,\pi\,\chi)\,dx,$$

wobei wir von den Functionen η_i ausser der Erfüllung der Gleichungen (19a) und (19b) nur noch voraussetzen wollen, dass sie überall endliche Differentialquotienten besitzen.

Entsprechend dem in § 1 angegebenen Gedankengange unterziehen wir zunächst die Differenz $(\Delta^2 J)_{b'} - (\Delta^2 J)_{c'}$ einer näheren Betrachtung. Es mögen nämlich die vorher mit A^2 und A^3 bezeichneten Punkte jetzt resp. mit A^0 und A^1 zusammenfallen. Auf der zwischen diesen Punkten verlaufenden Curve b, welche durch die Functionen η_i definirt ist, werde der Punkt A beliebig angenommen, und unter b' das Stück der Curve b von A^0 bis A, unter c' die durch die Functionen $\overline{u}_i$ definirte Curve, welche sich zwischen denselben Punkten erstreckt, verstanden.



Nach (37) ist

$$(50)\qquad (\Delta^2 J)_{c'} = \frac{1}{4}\sum_{\lambda,\mu} \alpha_\lambda \alpha_\mu \left[\overline{G}_{\lambda\mu}\right]^{\bar{x}=x},$$

wo zur Abkürzung

$$(51)\qquad \sum_i \frac{\partial\overline{\Omega}(\bar{u}_\mu \bar{u}_\mu' \bar{p}_\mu \bar{q}_\mu)}{\partial \bar{u}_{i\mu}'}\,\bar{u}_{i\lambda} = \overline{G}_{\lambda\mu}$$

gesetzt ist. Durch die Formel (50) ist $(\Delta^2 J)_{c'}$ als Function von x dargestellt, indem auch die in $\alpha_\lambda \alpha_\mu$ enthaltenen Grössen η_i als Functionen von x, entsprechend der Curve b', zu betrachten sind. Behufs Bildung der Differenz $(\Delta^2 J)_{b'} - (\Delta^2 J)_{c'}$ haben wir nun nach der Vorschrift von § 1 $(\Delta^2 J)_{c'}$ durch Differentiation und Integration in ein bestimmtes Integral zu verwandeln. Zu dem Zwecke ist erstens

derjenige Werth von x festzustellen, für welchen $(\Delta^2 J)_{c'}$ verschwindet, zweitens zu prüfen, ob $(\Delta^2 J)_{c'}$ im Integrationsintervalle nirgends unendlich wird.

Offenbar ist $(\Delta^2 J)_{c'}^{x=x^0} = 0$. Diess folgt aus der Bedeutung des Ausdrucks $(\Delta^2 J)_{c'}$, der ursprünglich durch ein über die Curve c' erstrecktes Integral definirt wurde (vergl. Formel (35) für $x^2 = x^0$ *). Ferner bleibt $(\Delta^2 J)_{c'}$ von $x = x^0$ bis $x = x$ jedenfalls endlich, wenn in der Formel (50) die als Nenner der Grössen $\alpha_\lambda \alpha_\mu$ (nach (33)) auftretende Determinante U, d. i. $\Delta(x, x^0)$ nicht verschwindet. Wir wollen annehmen, diese Bedingung sei erfüllt; für den Fall, dass $\Delta(x, x^0)$ zwischen x^0 und x^1 das Zeichen wechselt, ist ja ohnehin schon die Unmöglichkeit des Minimums nachgewiesen.

Es wird dann

$$(52) \qquad (\Delta^2 J)_{c'} = \int_{x^0}^{x} \frac{d}{dx} (\Delta^2 J)_{c'} \, dx.$$

In die rechte Seite dieser Gleichung führen wir den aus (50) entnommenen Werth für $(\Delta^2 J)_{c'}$ ein. D. g.

$$\frac{d}{dx} (\Delta^2 J)_{c'} = \frac{1}{4} \sum_{\lambda,\mu} \alpha_\lambda \alpha_\mu \frac{d}{dx} \left[\overline{G}_{\lambda\mu}\right]^{\bar{x}=x} + \frac{1}{4} \left[\sum_{\lambda\mu} \alpha_\mu \frac{d\alpha_\lambda}{dx} \overline{G}_{\lambda\mu}\right]^{\bar{x}=x}$$
$$+ \frac{1}{4} \left[\sum_{\lambda\mu} \alpha_\lambda \frac{d\alpha_\mu}{dx} \overline{G}_{\lambda\mu}\right]^{\bar{x}=x},$$

und wenn $\frac{d}{dx} \left[\overline{G}_{\lambda\mu}\right]^{\bar{x}=x}$ durch $\left[\frac{d\overline{G}_{\lambda\mu}}{d\bar{x}}\right]^{\bar{x}=x}$ ersetzt, ferner in der letzten Summe die Summationsbuchstaben λ und μ vertauscht und gewisse Glieder zusammengezogen werden:

$$(53) \quad \frac{d}{dx} (\Delta^2 J)_{c'} = \frac{1}{4} \left[\sum_{\lambda\mu} \alpha_\lambda \alpha_\mu \frac{d\overline{G}_{\lambda\mu}}{d\bar{x}}\right]^{\bar{x}=x} + \frac{1}{2} \left[\sum_{\lambda\mu} \alpha_\mu \frac{d\alpha_\lambda}{dx} \overline{G}_{\lambda\mu}\right]^{\bar{x}=x}$$
$$+ \frac{1}{4} \left[\sum_{\lambda\mu} \alpha_\mu \frac{d\alpha_\lambda}{dx} (\overline{G}_{\mu\lambda} - \overline{G}_{\lambda\mu})\right]^{\bar{x}=x}.$$

---

*) Diese Begründung ist nicht völlig streng, da zwar die Integralgrenzen in der Formel (35) unendlich nahe an einander rücken, gleichzeitig aber der Ausdruck unter dem Integralzeichen wegen des in den $\bar{u}_i \bar{u}_i' \bar{p}_\alpha \bar{q}_\beta$ enthaltenen Nenners unendlich wird — wenigstens scheinbar. Allein man überzeugt sich für den Fall $m'' = 0$, d. h. den Fall, wo nur endliche Bedingungsgleichungen $\Phi_\alpha = 0$ in der Aufgabe gegeben sind, bei Zugrundelegung der auf Seite 560 eingeführten Con-

Nun ist *erstens* nach (51) *):

$$\frac{d\bar{G}_{\lambda\mu}}{d\bar{x}} = \sum_i \left(\frac{d}{d\bar{x}} \frac{\partial \bar{\Omega}(\bar{u}_\mu \bar{u}_\mu' \bar{p}_\mu \bar{q}_\mu)}{\partial \bar{u}_{i\mu}'} \right) \bar{u}_{i\lambda} + \sum_i \frac{\partial \bar{\Omega}(\bar{u}_\mu \bar{u}_\mu' \bar{p}_\mu \bar{q}_\mu)}{\partial \bar{u}_{i\mu}'} \bar{u}_{i\lambda}'$$

$$= (\text{wegen } (25_1)) \sum_i \left(\frac{\partial \bar{\Omega}(\bar{u}_\mu \ldots)}{\partial \bar{u}_{i\mu}} \bar{u}_{i\lambda} + \frac{\partial \bar{u}'(\bar{u}_\mu \ldots)}{\partial \bar{u}_{i\mu}'} \bar{u}_{i\lambda}' \right).$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit $\alpha_\lambda \alpha_\mu$ und führen vermittelst der Gleichungen (32) die Summirung nach λ und μ aus (letzteres unter Berücksichtigung der Identität

$$(54) \qquad \sum_\mu \alpha_\mu \frac{\partial \bar{\Omega}(\bar{u}_\mu \ldots)}{\partial \bar{u}_{i\mu}'} = \frac{\partial \bar{\Omega}(\bar{u} \ldots)}{\partial \bar{u}_i'} \Big),$$

so erhalten wir

$$\sum_{\lambda\mu} \alpha_\lambda \alpha_\mu \frac{d\bar{G}_{\lambda\mu}}{d\bar{x}} = \sum_i \left(\frac{\partial \bar{\Omega}(\bar{u} \ldots)}{\partial \bar{u}_i} \bar{u}_i + \frac{\partial \bar{\Omega}(\bar{u} \ldots)}{\partial \bar{u}_i'} \bar{u}_i' \right)$$

$$= (\text{nach } (28)) \; 2\,\bar{\Omega}(\bar{u}\,\bar{u}'\,\bar{p}\,\bar{q}).$$

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$(55) \qquad [\bar{u}_i']^{\bar{x}=x} = \zeta_i; \quad [\bar{p}_\alpha]^{\bar{x}=x} = \pi_\alpha; \quad [\bar{q}_\beta]^{\bar{x}=x} = \chi_\beta$$

und berücksichtigen die Gleichung $[\bar{u}_i]^{\bar{x}=x} = \eta_i$, so wird schliesslich

$$(56) \qquad \left[\sum_{\lambda\mu} \alpha_\lambda \alpha_\mu \frac{\partial \bar{G}_{\lambda\mu}}{d\bar{x}} \right]^{\bar{x}=x} = 2\Omega(\eta\zeta\pi\chi).$$

[Der zur Ableitung dieser Formel eingeschlagene Weg ist demjenigen entgegengesetzt, welcher von der Gleichung (35) zur Gleichung

---

stanten c_λ leicht davon, dass jenes Unendlichwerden nur ein scheinbares ist, indem nämlich — unter Voraussetzung endlicher Differentialquotienten η_i' — der Zähler unter dem Integralzeichen in derselben Ordnung (n), wie der Nenner, verschwindet.

*) In der hier beginnenden Rechnung haben wir im Wesentlichen den von Lipschitz (a. a. O.) eingeschlagenen Weg verfolgt. Herr Lipschitz geht davon aus, die Grössen η als lineare Functionen der Grössen $u_{i\lambda}$ darzustellen, natürlich mit Coefficienten, die selbst von x abhängen. Diese Darstellung geht aus unseren Gleichungen (32) für $\bar{x} = x$ hervor: $\eta_i = \sum_\lambda \alpha_\lambda u_{i\lambda}$; aber erst durch das von uns an die Spitze der Untersuchung gestellte Princip ist jene Darstellung (32), bei der jeder Punkt A als Endpunkt einer von A^0 ausgehenden Minimalcurve betrachtet wird, motivirt.

(37) führte. Wir hätten daher die Formel (56) ohne Rechnung direct aus der Relation

$$\sum_{\lambda\mu} \alpha_\lambda \alpha_\mu \overline{G}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\int_{x^0}^{\bar{x}} \overline{\Omega}(\bar{u}\,\bar{u}'\,\bar{p}\,\bar{q})\,d\bar{x}$$

durch Differentiation nach $\bar{x}$ finden können, einer Relation, die a. a. O. zwar nicht explicite aufgestellt ist, aber implicite der Formel (37), die für $\bar{x} = x$ aus ihr entsteht, zu Grunde liegt.]

Zweitens ist nach (51)

$$\sum_{\lambda\mu} \alpha_\mu \frac{d\alpha_\lambda}{dx} \overline{G}_{\lambda\mu} = \sum_i \sum_\mu \alpha_\mu \frac{\partial \overline{\Omega}(\bar{u}_\mu \ldots)}{\partial \bar{u}'_{i\mu}} \sum_\lambda \frac{d\alpha_\lambda}{dx} \bar{u}_{i\lambda}.$$

Führen wir rechts die Summationen über λ und μ aus, erstere, indem wir für den Augenblick

$$(57)\quad \sum_\lambda \frac{d\alpha_\lambda}{dx} \bar{u}_{i\lambda} = (\bar{u}_i); \qquad \sum_\lambda \frac{d\alpha_\lambda}{dx} \bar{p}_{\alpha\lambda} = (\bar{p}_\alpha); \qquad \sum_\lambda \frac{d\alpha_\lambda}{dx} \bar{q}_{\beta\lambda} = (\bar{q}_\beta)$$

setzen, letztere durch Anwendung der Identität (54), so wird

$$\sum_{\lambda\mu} \alpha_\mu \frac{d\alpha_\lambda}{dx} \overline{G}_{\lambda\mu} = \sum_i \frac{\partial \overline{\Omega}(\bar{u}\,\bar{u}'\,\bar{p}\,\bar{q})}{\partial \bar{u}'_i} (\bar{u}_i),$$

und schliesslich, da

$$[\bar{u}_i]^{\bar{x}=x} = \eta_i; \quad [\bar{u}'_i]^{\bar{x}=x} = \zeta_i; \quad [(\bar{u}_i)]^{\bar{x}=x} = \eta'_i - \zeta_i; \quad [\bar{p}_\alpha]^{\bar{x}=x} = \pi_\alpha;$$

$$[\bar{q}_\beta]^{\bar{x}=x} = \chi_\beta$$

ist:

$$(58)\qquad \left[\sum_{\lambda\mu} \alpha_\mu \frac{d\alpha_\lambda}{dx} \overline{G}_{\lambda\mu}\right]^{\bar{x}=x} = \sum_i \frac{\partial \Omega(\eta\zeta\pi\chi)}{\partial \zeta_i} (\eta'_i - \zeta_i).$$

Drittens wird nach (51)

$$\sum_{\lambda\mu} \alpha_\mu \frac{d\alpha_\lambda}{dx} (\overline{G}_{\lambda\mu} - \overline{G}_{\lambda\mu})$$

$$= \sum_i \left(\sum_\lambda \frac{d\alpha_\lambda}{dx} \frac{\partial \overline{\Omega}(\bar{u}_\lambda \ldots)}{\partial \bar{u}'_{i\lambda}} \sum_\mu \alpha_\mu \bar{u}_{i\mu} - \sum_\mu \alpha_\mu \frac{\partial \overline{\Omega}(\bar{u}_\mu \ldots)}{\partial \bar{u}'_{i\mu}} \sum_\lambda \frac{d\alpha_\lambda}{dx} \bar{u}_{i\lambda} \right)$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial \overline{\Omega}((\bar{u}) \ldots)}{\partial (\bar{u}'_i)} \bar{u}_i - \frac{\partial \overline{\Omega}(\bar{u} \ldots)}{\partial \bar{u}'_i} (\bar{u}'_i) \right).$$

Nun gilt für die Functionen $\bar{u}\,\bar{p}\,\bar{q}$, $(\bar{u})(\bar{p})(\bar{q})$ die Formel (31), wenn darin alle Buchstaben durch überstrichene ersetzt werden. Denn

jene Functionen genügen der Bedingung (an welche die Gültigkeit jener Formel geknüpft war), dass die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll}(59) & \sum_i \frac{\partial \overline{\Phi}_\alpha}{\partial \overline{y}_i}\overline{u}_i = 0,\\ (60) & \sum_i \frac{\partial \overline{\Phi}_\alpha}{\partial \overline{y}_i}(\overline{u}_i) = 0\end{array}\right\} \alpha = 1, 2 \cdots m'$$

mindestens für zwei und daher überhaupt für alle Werthe von $\overline{x}$ erfüllt sind. Die Gleichung (59) gilt nämlich für $\overline{x} = x^0$ (da an dieser Stelle die $\overline{u}_i$ verschwinden) und für $\overline{x} = x$ (da hier $\overline{u}_i$ gleich η_i wird); die Gleichung (60) aber entsteht aus (59), nachdem darin für $\overline{u}_i$ die Ausdrücke (32) eingeführt sind, durch Differentiation nach x, und ist daher ebenfalls richtig. Es wird daher nach (31)

$$(61) \qquad \sum_i \left(\frac{\partial \overline{\Omega}((\overline{u})\ldots)}{\partial (\overline{u}_i)}\overline{u}_i - \frac{\partial \overline{\Omega}(\overline{u}\ldots)}{\partial \overline{u}_i'}(\overline{u}_i)\right) = \text{const.}$$

Nun verschwinden für $\overline{x} = x^0$ alle Grössen $\overline{u}_i$, und da dies für jeden Werth von x der Fall ist, auch die Ableitungen $\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x}$, d. h. (nach (32)) die Grössen $(\overline{u}_i)$; die Constante auf der rechten Seite der Gleichung (61) hat also den Werth Null. So wird schliesslich

$$(62) \qquad \sum_{\lambda\mu} \alpha_\mu \frac{d\alpha_\lambda}{dx}(\overline{G}_{\mu\lambda} - \overline{G}_{\lambda\mu}) = 0.$$

Durch Einführung der Ausdrücke (56), (58), (62) in die Gleichung (53) und des so gewonnenen Werthes von $\frac{d}{dx}(\Delta^2 J)_{c'}$ in die Formel (52) findet man mit Rücksicht auf (49):

$$(63) \qquad (\Delta^2 J)_{b'} - (\Delta^2 J)_{c'}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x^0}^{x} \left(\Omega(\eta\eta'\pi\chi) - \Omega(\eta\zeta\pi\chi) - \sum_i \frac{\partial \Omega(\eta\zeta\pi\chi)}{\partial \zeta_i}(\eta_i' - \zeta_i)\right) dx.$$

Nun ist nach der Taylor'schen Reihenentwickelung

$$\begin{aligned}\Omega(\eta\eta'\pi\chi) &= \Omega(\eta, \zeta + (\eta' - \zeta), \pi, \chi)\\ &= \Omega(\eta\zeta\pi\chi) + \sum_i \frac{\partial \Omega(\eta\zeta\pi\chi)}{\partial \zeta_i}(\eta_i' - \zeta_i)\\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,k} \frac{\partial^2 \Omega(\eta\zeta\pi\chi)}{\partial \zeta_i \partial \zeta_k}(\eta_i' - \zeta_i)(\eta_k' \quad \zeta_k),\end{aligned}$$

und

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k}\frac{\partial^2\Omega(\eta\zeta\varkappa\chi)}{\partial\zeta_i\partial\zeta_k}(\eta_i'-\zeta_i)(\eta_k'-\zeta_k)=\sum_{i,k}\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i'\partial y_k'}(\eta_i'-\zeta_i)(\eta_k'-\zeta_k);$$

also wird schliesslich

$$(64)\qquad (\Delta^2 J)_{\mathfrak{G}'}-(\Delta^2 J)_{\mathfrak{G}'}=\int\limits_{x^0}^{x}\sum_{i,k}\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i'\partial y_k'}(\eta_i'-\zeta_i)(\eta_k'-\zeta_k)\,dx.$$

Die Grössen $\eta_i'-\zeta_i$ sind durch gewisse Relationen mit einander verbunden. Man erhält dieselben durch die Ueberlegung, dass erstens die Functionen η_i sowohl den Bedingungen (19b), als auch denjenigen Bedingungen genügen müssen, welche aus (19a) durch Differentiation nach x entstehen; und dass zweitens die Functionen $\bar{u}_i$ denjenigen Bedingungen genügen, in welche die ebengenannten übergehen, wenn man alle Buchstaben durch überstrichene und η durch $\bar{u}$ ersetzt. Man erhält auf diese Weise folgende Gleichungen:

$$\sum_i\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial y_i}\right)\eta_i+\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial y_i}\eta_i'\right)=0;\quad \sum_i\left(\frac{\partial\Psi_\beta}{\partial y_i}\eta_i+\frac{\partial\Psi_\beta}{\partial y_i'}\eta_i'\right)=0,$$

$$\sum_i\left(\frac{d}{d\bar{x}}\left(\frac{\partial\bar{\Phi}_\alpha}{\partial\bar{y}_i}\right)\bar{u}_i+\frac{\partial\bar{\Phi}_\alpha}{\partial\bar{y}_i}\bar{u}_i'\right)=0;\quad \sum_i\left(\frac{\partial\bar{\Psi}_\beta}{\partial\bar{y}_i}\bar{u}_i+\frac{\partial\bar{\Psi}_\beta}{\partial\bar{y}_i'}\bar{u}_i'\right)=0.$$

Subtrahirt man diese Gleichungen paarweise von einander, nachdem man in den beiden unteren $\bar{x}=x$ gesetzt hat (wodurch $\bar{u}_i$ in η_i, $\bar{u}_i'$ in ζ_i übergeht), so ergeben sich schliesslich die Gleichungen:

$$(65)\qquad \begin{cases}\displaystyle\sum_i\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial y_i}(\eta_i'-\zeta_i)=0 & (\alpha=1,2,\ldots,m'),\\[2ex] \displaystyle\sum_i\frac{\partial\Psi_\beta}{\partial y_i'}(\eta_i'-\zeta_i)=0 & (\beta=1,2,\ldots,m'').\end{cases}$$

Die Bedingungen (65) zwischen den Grössen $(\eta_i'-\zeta_i)$ sind genau dieselben, denen wir auf Seite 574 bei Betrachtung des Ausdrucks

$$\sum_{i,k}\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i'\partial y_k'}\eta_i\eta_k$$

die Grössen η_i unterwerfen mussten (48). Nun wurde bei Begründung der Formel (64) nur vorausgesetzt, dass die Determinante $\Delta(x,x^0)$ zwischen x^0 und x^1 nicht verschwinde. Ist also diese Voraussetzung erfüllt und ausserdem der Ausdruck

$$\sum_{i,k}\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i'\partial y_k'}\eta_i\eta_k$$

für alle Werthe von $\eta_1 \ldots \eta_n$, welche den Bedingungen (48) genügen, positiv, so zeigt jene Formel (64), dass auch die Differenz $(\Delta^2 J)_{b'} - (\Delta^2 J)_{c'}$ zum mindesten nicht negativ ist.

Lassen wir jetzt den auf der Curve b gelegenen Punkt A mit A^1, d. h. x mit x^1 zusammenfallen, so wird $(\Delta^2 J)_{c'} = 0$, $(\Delta^2 J)_{b'} - (\Delta^2 J)_{c'} = (\Delta^2 J)_b$, und die Formel (64), in welcher nun $x = x^1$ zu setzen ist, sagt geradezu aus, dass die allgemeine zweite Variation $(\Delta^2 J)_b$ unter den gemachten Voraussetzungen niemals negativ wird.

Es fragt sich noch, ob $(\Delta^2 J)_b$ verschwinden kann.*) Dies würde unter den genannten Annahmen offenbar nur dann möglich sein, wenn alle Grössen $\eta_i' - \zeta_i$ identisch gleich Null wären, d. h. (mit Rücksicht auf die Definition der Grössen ζ_i), wenn die η_i den Differentialgleichungen

$$(66) \qquad \eta_i' - \sum_{\lambda k} \frac{U_{k\lambda} u_{i\lambda}'}{U} \eta_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

genügten. Nun sind diese Differentialgleichungen integrabel durch Ausdrücke von der Form

$$(67) \qquad \eta_k = \sum_{\mu=1}^{2n} a_\mu u_{k\mu},$$

und zwar stellt *jedes* System von Functionen η_i, welches die Eigenschaft hat, für $x = x^0$ zu verschwinden, ein Integral jener Differentialgleichungen dar. Denn ist $U_{k\lambda}^0$ die zum Element $u_{k\lambda}^0$ gehörende Subdeterminante von U, d. h. von $\Delta(x, x^0)$, so besteht nach einem bekannten Satze die Identität

$$\sum_{k=1}^{n} U_{k\lambda} u_{k\mu} + \sum_{k=1}^{n} U_{k\lambda}^0 u_{k\mu}^0 = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda \lessgtr \mu \\ U & \text{für } \lambda = \mu; \end{cases}$$

es wird daher, wenn unter η_k die Ausdrücke (67) verstanden werden:

$$\sum_{k=1}^{n} U_{k\lambda} \eta_k + \sum_{k=1}^{n} U_{k\lambda}^0 \eta_k^0 = a_\lambda U,$$

und da alle Functionen η_k für $x = x^0$ verschwinden sollen,

$$\sum_{k=1}^{n} U_{k\lambda} \eta_k = a_\lambda U.$$

Mit Benutzung dieser Relation erkennt man sogleich, dass die Differentialgleichungen (66) durch die Ausdrücke (67) befriedigt werden. Da die $2n$ Systeme $u_{i\lambda}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, 2n)$ linear unabhängig sind, folgt ferner, dass in jenen Ausdrücken (67) noch n der Contanten a_μ will-

*) Die folgende Betrachtung rührt, wie Herr Mayer angiebt von Richelot her.

kürlich bleiben, dass also jene Ausdrücke die *vollständigen* Integrale von (66) darstellen. Wäre nun b eine Curve, für welche $(\Delta^2 J)_b$ gleich Null würde, und wären die derselben entsprechenden Functionen η_k auf einer Strecke $a < x < b$ nicht identisch Null, so müssten dieselben für diese Strecke in der Form (67) darstellbar sein und überdies für $x = a$ und $x = b$ verschwinden. Dieses wäre aber, da die η_k, um Lösungen der Differentialgleichungen (66) zu sein, bereits für $x = x^0$ verschwinden müssen, nur möglich, wenn die Determinante U, d. i. $\Delta(x, x^0)$, für $x = a$ und $x = b$ verschwände. Nun haben wir angenommen, dass $\Delta(x, x^0)$ im *Inneren* des Intervalles $(x^0\, x^1)$ jedenfalls nicht verschwindet. Ist also auch $\Delta(x^1\, x^0)$ noch von Null verschieden, so können die η_k nur *identisch* gleich Null sein; ist dagegen $\Delta(x^1, x^0) = 0$, so kann man die Coefficienten a_μ so bestimmen, dass die η_k für $x = x^0$ und $x = x^1$ verschwinden, und für dieses System von Functionen η_k wird dann auch die zweite Variation $(\Delta^2 J)_b$ gleich Null.

Fassen wir die vorstehenden Ergebnisse der Untersuchung mit den früheren, welche aus der Discussion der Formel (39) hervorgingen, zusammen, so können wir folgendes Endresultat aufstellen:

Zur Lösung des Problems, das Minimum des Integrales

$$\int_{x^0}^{x^1} F(x y_1 y_1' \ldots y_n y_n') dx$$

zu finden, wenn die Functionen y_i an gegebene endliche Gleichungen

$$\Phi_\alpha(x\, y_1 \ldots y_n) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m')$$

und Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\Psi_\beta(x y_1 y_1' \ldots y_n y_n') = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, m'')$$

gebunden sind und überdies an den Grenzen x^0 und x^1 vorgeschriebene Werthe annehmen sollen, dienen, wenn

$$F + \sum_\alpha P_\alpha \Phi_\alpha + \sum_\beta Q_\beta \Psi_\beta = F_1$$

gesetzt wird, folgende $n + m' + m''$ Differentialgleichungen (nach Lagrange):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_i} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F_1}{\partial y_i'} = 0 & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ \dfrac{d^2 \Phi_\alpha}{dx^2} = 0 & (\alpha = 1, 2, \ldots, m'), \\ \Psi_\beta = 0 & (\beta = 1, 2, \ldots, m''). \end{cases}$$

Durch Integration derselben erhält man (wenn nicht die Determinante

des Systems identisch verschwindet), die $n + m' + m''$ Grössen $y_i P_\alpha Q_\beta$ als Functionen von x mit $2n$ willkürlichen Constanten $c_1 \ldots c_{2n}$. Wir nehmen an — was im Allgemeinen der Fall ist —, dass die Werthe dieser Constanten sich durch die für $x = x^0$ und $x = x^1$ vorgeschriebenen Grenzwerthe der y_i bestimmen lassen.

Bezeichnet man dann die partielle Ableitung von y_i nach c_λ mit $u_{i\lambda}$, so verschwindet die Determinante

$$\Delta(x, x^0) = \sum \pm u_{1,1}\, u_{2,2} \ldots u_{n,n}\, \overset{0}{u}_{1,n+1}\, \overset{0}{u}_{2,n+2} \ldots \overset{0}{u}_{n,2n}$$

im Allgemeinen nicht identisch.

Damit nun wirklich ein Minimum stattfinde, darf nach Einsetzung der gefundenen Functionen $y_i P_\alpha Q_\beta$

I. der Ausdruck

$$\sum_{i,k} \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i' \partial y_k'} \eta_i \eta_k$$

für keinen Werth von x zwischen x^0 und x^1 negativ werden, falls die Grössen $\eta_1 \ldots \eta_n$ den $m' + m''$ Bedingungen

$$\sum_i \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i} \eta_i = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m'),$$

$$\sum_i \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial y_i'} \eta_i = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, m'')$$

genügen, und es darf

II. die Determinante $\Delta(x, x^0)$ zwischen x^0 und x^1 nicht das Vorzeichen wechseln. Diese beiden Bedingungen sind nothwendig; denn ist eine derselben nicht erfüllt, so kann die zweite Variation $\Delta^2 J$ sowohl positiv als negativ werden (abgesehen von einem pag. 573 erwähnten Ausnahmefalle).

Ist andererseits der Ausdruck

$$\sum_{i,k} \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i' \partial y_k'} \eta_i \eta_k$$

für solche Grössen η, welche den genannten Bedingungen genügen, im Intervalle $x^0 x^1$ beständig positiv und verschwindet 1) $\Delta(x, x^0)$ weder zwischen x^0 und x^1 noch an der Stelle $x = x^1$ selbst, so ist auch die zweite Variation beständig positiv und es findet sicher ein Minimum statt; verschwindet dagegen 2) $\Delta(x, x^0)$ zwar nicht zwischen x^0 und x^1, aber für $x = x^1$, so kann die zweite Variation den Werth Null annehmen, ohne indessen negativ zu werden, das Minimum hängt daher von den Variationen dritter und höherer Ordnung ab.

§ 4.

Die isoperimetrischen Probleme auf Flächen.

Wir wollen die im vorigen Paragraphen entwickelten allgemeinen Resultate auf den wichtigsten Fall anwenden, nämlich auf den Fall, dass zwischen den Grössen y_i gegebene endliche Gleichungen bestehen, und dass überdies gewisse bestimmte Integrale, welche unter dem Integrationszeichen die Grössen y_i und y_i' enthalten, vorgeschriebene Werthe annehmen sollen.*) Als Typus von Aufgaben dieser Art können die isoperimetrischen Probleme auf einer Oberfläche betrachtet werden.

Es sei

$$J = \int_{x^0}^{x^1} F(x y_1 y_1' \dots y_m y_m') \, dx$$

das Integral, welches ein Minimum werden soll;

$$(68) \qquad \Phi_\alpha(x y_1 \dots y_m) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, m')$$

die gegebenen endlichen Gleichungen;

$$(69) \qquad J_\beta = \int_{x^0}^{x^1} f_\beta(x y_1 y_1' \dots y_m y_m') \, dx \qquad (\beta = 1, 2, \dots, m'')$$

die Integrale, welche vorgeschriebene Werthe annehmen müssen. Ausserdem seien die den Grenzen x^0 und x^1 entsprechenden Werthe der Functionen $y_1\, y_2 \dots y_m$ gegeben.

Wir behandeln zunächst kurz die erste Variation, und zwar nach einer Methode, deren Grundgedanke einer Vorlesung von Weierstrass über Variationsrechnung (vom Sommer 1877) entlehnt ist.**) Wir werden durch dieselbe zu einem speciellen Falle der Lagrange'schen Regel gelangen, deren Gültigkeit wir in § 3 bei den Untersuchungen über die zweite Variation vorausgesetzt haben, ohne sie allgemein streng begründen zu können.

Bekanntlich muss, wenn ein Minimum stattfinden soll, die erste Variation verschwinden, d. h. es muss die Gleichung

$$(70) \qquad (\Delta J)_\eta = \int_{x^0}^{x^1} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} \eta_i + \frac{\partial F}{\partial y_i'} \eta_i' \right) dx = 0$$

---

*) Dieses Problem ist von Lundström (a. a. O.) und von Mayer (Math. Ann. Bd. XIII) behandelt worden, jedoch ohne die Annahme endlicher Gleichungen zwischen den y_i.

**) Dieselbe Methode ist von Herrn du Bois-Reymond entwickelt worden (Math. Ann. Bd. XV, p. 311 und 573).

für jedes System von Functionen $\eta_1 \ldots \eta_m$ erfüllt sein, welches für $x = x^0$ und $x = x^1$ verschwindet und überall den aus (68) und (69) hervorgehenden Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i} \eta_i = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m'), \tag{71}$$

$$(\Delta J_\beta)_\eta = \int_{x^0}^{x^1} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial y_i} \eta_i + \frac{\partial f_\beta}{\partial y_i'} \eta_i' \right) dx = 0 \qquad (\beta = 1 \ldots m'') \tag{72}$$

genügt.

Wir können nun zunächst die Bedingungen (72) eliminiren, indem wir den Functionen $\eta_1 \ldots \eta_m$ eine solche Form geben, dass jene Bedingungen von selbst erfüllt werden.

Zu dem Zwecke setzen wir

$$\eta_i = \eta_i^0 + \sum_{\gamma=1}^{m''} k_\gamma \eta_i^\gamma \qquad (i = 1 \ldots m), \tag{73}$$

wo mit $k_1 \ldots k_{m''}$ Constanten bezeichnet sind, und wählen die Functionen η_i^γ so, dass sie sämmtlich an den Grenzen x^0 und x^1 verschwinden und durchweg den Gleichungen

$$\sum_i \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i} \eta_i^\gamma = 0 \qquad (\alpha = 1 \ldots m'; \ \gamma = 1 \ldots m'') \tag{74}$$

genügen, und dass überdies die Determinante

$$\sum \pm (\Delta J_1)_{\eta^1} (\Delta J_2)_{\eta^2} \ldots (\Delta J_{m''})_{\eta^{m''}}$$

einen von Null verschiedenen Werth erhält. Durch Einführung dieser Functionen η_i in die Gleichungen (72) gewinnen wir die neuen Gleichungen

$$(\Delta J_\beta)_{\eta^0} + \sum_{\gamma=1}^{m''} k_\gamma (\Delta J_\beta)_{\eta^\gamma} = 0 \qquad (\beta = 1 \ldots m'') \tag{75}$$

welche, nach $k_1 \ldots k_{m''}$ aufgelöst, die Werthe

$$k_\gamma = \sum_{\beta=1}^{m''} K_{\beta\gamma} (\Delta J_\beta)_{\eta^0} \tag{76}$$

für diese Constanten liefern. Es ist zu beachten, dass die Grössen $K_{\beta\gamma}$ nur von den Integralen $(\Delta J_\beta)_{\eta^\gamma}$ $(\beta = 1 \ldots m''; \ \gamma = 1 \ldots m'')$ abhängig sind und daher unverändert bleiben, wenn die Functionen η_i^0 durch beliebige andere ersetzt werden.

Die Ausdrücke (73), mit den berechneten Werthen (76) der Constanten k_γ genügen den Bedingungen (72). Damit auch die Bedingungen (71) und die Grenzbedingungen erfüllt seien, ist nur noch nöthig, dass die Functionen η_i^0 den Gleichungen

$$\sum_i \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i} \eta_i^0 = 0 \qquad (\alpha = 1 \ldots m'') \tag{77}$$

genügen und an den Grenzen x^0 und x^1 verschwinden. Nun geht die Gleichung (70) durch Einführung der Ausdrücke (73) und (76) in die folgende über:

$$(\Delta J)_{\eta^0} + \sum_\beta Q_\beta (\Delta J_\beta)_{\eta^0} = 0. \tag{78}$$

Hier ist $Q_\beta = \sum_{\gamma=1}^{m''} K_{\beta\gamma} (\Delta J)_{\eta^\gamma}$, sodass also die Q_β wiederum Grössen sind, deren Werthe nicht von der Wahl der Functionen η_i^0 abhängen. Soll daher ein Minimum stattfinden, so muss nach Annahme eines Systems von Functionen $\eta_i^\beta (i = 1 \ldots m;\ \beta = 1 \ldots m'')$ und Bestimmung der denselben entsprechenden Grössen Q_β die Gleichung (78) stattfinden, wie auch die Functionen η_i^0 (in Uebereinstimmung mit den Bedingungen (77) und den Grenzbedingungen) gewählt werden mögen.

Definiren wir die Function F_2 durch die Gleichung

$$F_2 = F + \sum_{\beta=1}^{m''} Q_\beta f_\beta \tag{79}$$

und setzen statt $\eta_1^0 \ldots \eta_m^0$ wieder einfach die Zeichen $\eta_1 \ldots \eta_m$, so können wir den gefundenen Satz auch so aussprechen:

Findet ein Minimum statt, so lassen sich die Constanten Q_β so bestimmen, dass die Gleichung

$$\int_{x^0}^{x^1} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial F_2}{\partial y_i} \eta_i + \frac{\partial F_2}{\partial y_i'} \eta_i' \right) dx = 0 \tag{80}$$

für jedes beliebige System von Functionen η_i erfüllt ist, welches den Gleichungen (71) genügt und an den Grenzen x^0 und x^1 verschwindet.

Hiermit sind die Bedingungen (72) eliminirt. Auf ganz ähnliche Weise gelangt man zur Elimination der Bedingungen (71), indem man, ausgehend von dem eben gefundenen Satze, für die Functionen η_i jetzt eine solche Form annimmt, dass jene Bedingungen von selbst erfüllt werden. Es ist indess hierzu zweckmässig, die Gleichung (80)

durch die folgende zu ersetzen, welche aus jener vermittelst partieller Integration unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen entsteht:

$$(81)\qquad \int\limits_{x^0}^{x^1} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial F_2}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F_2}{\partial y_i'} \right) \eta_i \, dx = 0$$

Nach Analogie von (73) setzen wir nun

$$(82)\qquad \eta_i = \eta_i^0 + \sum_{\gamma=1}^{m'} g_\gamma \eta_i^\gamma,$$

wo jedoch die Grössen g_γ nicht, wie die Grössen k_γ in (73), Constanten, sondern Functionen von x bedeuten sollen. Die Functionen

$$\eta_i^\gamma (i = 1 \ldots m;\ \gamma = 1 \ldots m')$$

wählen wir so, dass sie an den Grenzen x^0 und x^1 verschwinden, und dass die Determinante

$$\sum \pm \left(\sum_i \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_i} \eta_i^1 \right) \left(\sum_i \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_i} \eta_i^2 \right) \cdots \left(\sum_i \frac{\partial \Phi_{m'}}{\partial y_i} \eta_i^{m'} \right)$$

nicht identisch gleich Null wird.*)

Durch Einführung der Functionen (82) in die Gleichungen (71) gewinnen wir die neuen Gleichungen

$$(83)\qquad \sum_i \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i} \eta_i^0 + \sum_{\gamma=1}^{m'} g_\gamma \left(\sum_i \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i} \eta_i^\gamma \right) = 0 \quad (\alpha = 1 \ldots m'),$$

und durch Auflösung derselben nach $g_1\, g_2 \ldots g_{m'}$:

$$(84)\qquad g_\gamma = \sum_{\alpha=1}^{m'} G_{\alpha\gamma} \left(\sum \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i} \eta_i^0 \right).$$

Die Functionen $G_{\alpha\gamma}$ sind, wie es in (76) die Grössen $K_{\beta\gamma}$ waren,

---

*) Diese Forderung ist immer erfüllbar, wenn irgend eine aus m' Colonnen zusammengesetzte Determinante des Systems

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} \cdots\cdots \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_m}, \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ \dfrac{\partial \Phi_{m'}}{\partial y_1} \cdots\cdots \dfrac{\partial \Phi_{m'}}{\partial y_m}. \end{matrix}$$

nicht identisch gleich Null ist. Man braucht dann nur die jenen m' Colonnen entsprechenden Functionen η_i^γ so zu wählen, dass auch ihre Determinante nicht identisch verschwindet, alle übrigen Functionen η_i^γ aber gleich Null zu setzen.

aus den Grössen $\eta_i^\alpha (i = 1 \ldots m;\ \alpha = 1 \ldots m')$ zusammengesetzt und bleiben unverändert, wenn die Functionen $\eta_1^0 \cdots \eta_m^0$ beliebig variirt werden.

Die Gleichungen (71) werden durch die Functionen (82) mit den Werthen (84) der g_γ identisch erfüllt; damit auch die Grenzbedingungen befriedigt werden, ist nur noch nöthig, dass die Functionen η_i^0 für $x = x^0$ und $x = x^1$ verschwinden.

Die Gleichung (81) geht nun in die folgende über

$$(85) \qquad \int_{x^0}^{x^1} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial F_2}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F_2}{\partial y_i'} + \sum_{\alpha=1}^{m'} P_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i} \right) \eta_i^0 \, dx = 0.$$

Hier ist

$$P_\alpha = \sum_{\gamma=1}^{m'} G_{\alpha\gamma} \left(\frac{\partial F_2}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F_2}{\partial y_i'} \right) \eta_i^\gamma,$$

so dass also die P_α wiederum Functionen bedeuten, die nicht von der Wahl der Functionen η_i^0 abhängen. Soll daher ein Minimum stattfinden, so muss nach Annahme eines Systems von Functionen

$$\eta_i^\gamma \ (i = 1 \ldots m;\ \gamma = 1 \ldots m')$$

und Bestimmung der denselben entsprechenden Functionen P_α die Gleichung (85) stattfinden, *wie auch die Functionen η_i^0 gewählt werden mögen* (vorausgesetzt nur, dass dieselben an den Grenzen verschwinden). Hiermit sind auch die Bedingungen (71) eliminirt.

Es folgt jetzt weiter, dass nach Bestimmung der P_α die Coefficienten der Grössen $\eta_1^0 \ldots \eta_m^0$ in der Gleichung (85) unter dem Integralzeichen einzeln identisch verschwinden müssen. Denn wäre z. B. der Coefficient von η_i^0 von $x = a$ bis $x = b$ positiv, so würde auch der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (85) einen positiven Werth erhalten, wenn man die Functionen

$$\eta_1^0 \ldots \eta_{i-1}^0\, \eta_{i+1}^0 \ldots \eta_m^0$$

im ganzen Intervalle $x^0 x^1$ gleich Null, die Function η_i^0 aber im Intervalle $a\,b$ gleich $(x - a)\,(b - x)$ und in den Intervallen $x^0 a$ und $b\,x^1$ ebenfalls gleich Null annähme.

Es müssen also, wenn ein Minimum stattfindet, die Functionen $P_1 \ldots P_{m'}$ sich so bestimmen lassen, dass die m Gleichungen

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F_2}{\partial y_i'} + \sum_{\alpha=1}^{m'} P_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i} = 0 \qquad (i = 1 \ldots m)$$

erfüllt sind. Oder, wenn wir einen neuen Ausdruck $\overline{F}$ folgendermassen definiren

$$(86)\qquad \overline{F} = F_2 + \sum_{\alpha=1}^{m'} P_\alpha \Phi_\alpha = F + \sum_{\alpha=1}^{m'} P_\alpha \Phi_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m''} Q_\beta f_\beta,$$

so müssen sich die m' Functionen P_α und die m'' Constanten Q_β so bestimmen lassen, dass die Gleichungen

$$(87)\qquad \frac{\partial \overline{F}}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \overline{F}}{\partial y_i'} = 0 \qquad (i = 1 \ldots m)$$

gelten.

Dieser Umstand dient zur Lösung des Problems, das Minimum aufzustellen. Denn die Gleichungen (87) in Verbindung mit den Gleichungen (71) und (72) und mit den vorgeschriebenen Grenzbedingungen reichen aus, um die unbekannten Functionen y_i und P_α, sowie die Constanten Q_β zu finden.

Sowohl das Problem, als die eben entwickelte Lösung desselben, können nun leicht so formulirt werden, dass ersteres unter die in § 3 behandelte Gruppe von Problemen fällt, während die letztere in die ebenfalls bereits in § 3 auseinandergesetzte Lagrange'sche Regel übergeht.

Setzt man $m + m'' = n$ und definirt die Functionen $y_{m+1} \ldots y_n$ durch die Gleichungen

$$(88)\qquad y_{m+\beta} = \int_{x^0}^{x} f_\beta(x y_1 y_1' \ldots y_m y_m')\, dx \qquad (\beta = 1 \ldots m''),$$

so gelten offenbar die m'' Differentialgleichungen

$$(89)\qquad \Psi_\beta(x y_1 y_1' \ldots y_n y_n') = f_\beta(x y_1 y_1' \ldots y_m y_m') - y_{m+\beta}' = 0$$
$$(\beta = 1 \ldots m''),$$

und den neuen Functionen $y_{m+\beta}$ sind überdies für $x = x^0$ und $x = x^1$ die Werthe 0 und J_β vorgeschrieben. Definirt man ferner die Function F_1 durch die Gleichung

$$(90)\qquad F_1 = F + \sum_{\alpha=1}^{m'} P_\alpha \dot{Q}_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m''} Q_\beta \Psi_\beta,$$

so lassen sich die Gleichungen (87) auch folgendermassen schreiben

$$(91)\qquad \frac{\partial F_1}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F_1}{\partial y_i'} = 0 \qquad (i = 1 \ldots m);$$

die entsprechenden Gleichungen für $i = m + 1, \ldots, n$ aber reduciren sich auf die folgenden

(92) $$\frac{dQ_1}{dx} = 0, \ldots \frac{dQ_{m''}}{dx} = 0$$

und drücken daher nur die Thatsache aus, dass die Grössen $Q_1 \ldots Q_{m''}$ Constanten sind.

Mit Anwendung der neuen Definitionen kann man daher *erstens* folgende neue Formulirung unseres *Problems* aufstellen, durch welche dasselbe der im vorigen Paragraphen allgemein behandelten Gruppe von Problemen eingefügt wird: „Das Integral

$$\int_{x^0}^{x^1} F(xy_1 y_1' \ldots y_m y_m')\, dx,$$

in welchem die Functionen $y_1 \ldots y_n$ den endlichen Gleichungen

(93) $$\Phi_\alpha(xy_1 \ldots y_m) = 0 \qquad (\alpha = 1 \ldots m')$$

und den Differentialgleichungen

(94) $$\Psi_\beta(xy_1 \ldots y_n') = 0 \qquad (\beta = 1 \ldots m'')$$

genügen und an den Grenzen x^0 und x^1 vorgeschriebene Werthe erhalten müssen, soll ein Minimum werden.*)" *Zweitens* erhält man für die entwickelte *Lösung* des Problems folgende Formulirung, welche mit der Lagrange'schen Regel übereinstimmt: „Findet ein Minimum statt, so lassen sich die Functionen P_α und Q_β so bestimmen, dass ausser den Gleichungen (93) und (94) noch die n Gleichungen

(95) $$\frac{\partial F_1}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F_1}{\partial y_i'} = 0 \qquad (i = 1 \ldots n)$$

gelten."

Die Ergebnisse der im vorigen Paragraphen angestellten allgemeinen Untersuchungen können jetzt ohne Weiteres auf unseren Fall angewendet werden. Da hierbei die bei Integration der Differentialgleichungen (95) etc. auftretenden Constanten eine wichtige Rolle spielen, werden wir zunächst nachsehen, in welchen Verbindungen jene Constanten sich bei unserem Probleme darstellen, um daraus diejenigen Vereinfachungen für die Behandlung der zweiten Variation herleiten zu können, welche in der speciellen Natur dieses Problemes begründet sind.

---

*) Die in § 3 an die Differentialgleichungen $\Psi_\beta = 0$ gestellte Forderung, keine einzige allgemeine Integralgleichung zu besitzen, geht hier in die Forderung über, dass weder eine der Functionen f_β selbst noch irgend ein linear mit constanten Coefficienten aus denselben zusammengesetzter Ausdruck ein vollständiger Differentialquotient sein darf.

Entsprechend den am Schlusse des vorigen Paragraphen zusammengefassten Vorschriften haben wir das System der $n + m' + m''$ Differentialgleichungen

$$(96)\qquad \begin{cases} 1)\ \dfrac{\partial F_1}{\partial y_i} - \dfrac{d}{dx}\,\dfrac{\partial F_1}{\partial y_i'} = 0 & (i = 1 \ldots n), \\[2mm] 2)\ \dfrac{d^2 \Phi_\alpha}{dx^2} = 0, & (\alpha = 1 \ldots m'), \\[2mm] 3)\ \Psi_\beta = 0, & (\beta = 1 \ldots m'') \end{cases}$$

allgemein zu integriren. Die letzten m'' der n Gleichungen (96_1) reduciren sich auf die Gleichungen (92), sagen also aus, dass die Grössen $Q_1 \ldots Q_{m''}$ Constanten sind. Die übrigen m Gleichungen (96_1) bilden zusammen mit (96_2) ein System, welches *nur* die Functionen $y_1 \ldots y_m$ mit ihren ersten und zweiten Ableitungen und die Functionen $P_1 \ldots P_{m'}$, sowie die Constanten $Q_1 \ldots Q_{m''}$ enthält. Dieses System kann nach den Grössen $y_1'' \ldots y_m''$, $P_1 \ldots P_{m'}$, welche linear darin eingehen, aufgelöst werden, falls die Determinante R nicht identisch verschwindet — was wir annehmen. Es ergeben sich dann in bekannter Weise durch Integration die Functionen $y_1 \ldots y_m$ $P_1 \ldots P_{m'}$ mit $2m$ willkürlichen Integrationsconstanten $c_1 \ldots c_{2m}$ noch ausser den bereits vorher vorhandenen Constanten $Q_1 \ldots Q_{m''}$. Führt man die gefundenen Functionen $y_1 \ldots y_m$ in die Gleichungen (96_3) ein und integrirt, so erhält man schliesslich

$$(97)\qquad y_{m+\beta} = C_\beta + \int_{x^0}^{x} f_\beta\, dx \qquad (\beta = 1 \ldots m''),$$

wo mit $C_1 \ldots C_{m''}$ wieder neue Integrationsconstanten bezeichnet sind. Hiermit ist das System (96) vollständig integrirt.

Die Vertheilung der $2n$ Integrationsconstanten $c_1 \ldots c_{2m}$ $Q_1 \ldots Q_{m''}$ $C_1 \ldots C_{m''}$ unter die verschiedenen Functionen wird durch folgendes Schema dargestellt:

$$(98)\qquad \begin{cases} y_1 \ \ldots y_m : (c_1 \ldots c_{2m}\ Q_1 \ldots Q_{m''}), \\ y_{m+1} \ldots y_n : (c_1 \ldots c_{2m}\ Q_1 \ldots Q_{m''}\ C_1 \ldots C_{m''}), \\ P_m \ \ldots P_{m'} : (c_1 \ldots c_{2m}\ Q_1 \ldots Q_{m''}). \end{cases}$$

Die Bestimmung dieser Constanten durch die Forderungen der Aufgabe geschieht so: Wegen der Grenzbedingung, dass die $y_{m+\beta}$ für $x = x^0$ verschwinden müssen, sind die Grössen C_β gleich Null; von den $2m + m''$ übrigen Constanten $c_1 \ldots c_{2m}$ $Q_1 \ldots Q_{m''}$ dienen m'' dazu, den Integralen J_β (d. h. den Functionen $y_{m+\beta}$ für $x = x^1$) die vorgeschriebenen Werthe zu geben, $2n$ aber zur Erfüllung der Grenzbedingungen für $y_1 \ldots y_m$, durch welche, da sie in Uebereinstimmung mit (93) gegeben

sein müssen, zugleich das Bestehen dieser letzteren Gleichungen gesichert wird.

Die Functionen $u_{i\lambda}$ werden nun durch partielle Differentiation der Functionen y_i nach den Constanten $c_1 \ldots c_{2m}$ $Q_1 \ldots Q_{m''}$ $C_1 \ldots C_{m''}$ gebildet. Wir setzen

$$(99) \qquad \begin{cases} u_{i\lambda} &= \dfrac{\partial y_i}{\partial c_\lambda} \qquad (\lambda = 1 \ldots 2m), \\[2ex] u_{i,2m+\beta} &= \dfrac{\partial y_i}{\partial Q_\beta} \qquad (\beta = 1 \ldots m''), \\[2ex] u_{i,2m+m''+\beta} &= \dfrac{\partial y_i}{\partial C_\beta} \qquad (\beta = 1 \ldots m''). \end{cases}$$

Nach (97) sind dann die Grössen $u_{m+\beta,\mu}$ ($\mu = 1 \ldots 2n$) für $x = x^0$ sämmtlich gleich Null, ausgenommen die Grössen $u_{m+\beta,2m+m''+\beta}$, d. i. $\dfrac{\partial y_{m+\beta}}{\partial C_\beta}$, welche gleich 1 werden. Dadurch erhält die Determinante

$$\Delta(x, x^0) = \sum \pm u_{11}\, u_{22} \ldots u_{nn}\, \overset{0}{u}_{1,n+1} \ldots \overset{0}{u}_{n,2n},$$

welche eigentlich aus $4n^2$ Elementen besteht, unmittelbar die folgende Form, in welcher nur $(2m + m'')^2$ Elemente vorkommen:

$$(100) \quad \Delta(x, x^0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial c_{2m}} & \dfrac{\partial y_1}{\partial Q_1} & \cdot & \dfrac{\partial y_1}{\partial Q_{m''}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial c_{2m}} & \dfrac{\partial y_m}{\partial Q_1} & \cdot & \dfrac{\partial y_m}{\partial Q_{m''}} \\ \left[\dfrac{\partial y_1}{\partial c_1}\right]_{x=x^0} & \cdots & \left[\dfrac{\partial y_1}{\partial c_{2m}}\right]_{x=x^0} & \left[\dfrac{\partial y_1}{\partial Q_1}\right]_{x=x^0} & \cdot & \left[\dfrac{\partial y_1}{\partial Q_{m''}}\right]_{x=x^0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \left[\dfrac{\partial y_m}{\partial c_1}\right]_{x=x^0} & \cdots & \left[\dfrac{\partial y_m}{\partial c_{2m}}\right]_{x=x^0} & \left[\dfrac{\partial y_m}{\partial Q_1}\right]_{x=x^0} & \cdot & \left[\dfrac{\partial y_m}{\partial Q_{m''}}\right]_{x=x^0} \\ \dfrac{\partial i_1}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial i_1}{\partial c_{2m}} & \dfrac{\partial i_1}{\partial Q_1} & \cdot & \dfrac{\partial i_1}{\partial Q_{m''}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial i_{m''}}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial i_{m''}}{\partial c_{2m}} & \dfrac{\partial i_{m''}}{\partial Q_1} & \cdot & \dfrac{\partial i_{m''}}{\partial Q_{m''}} \end{vmatrix}.$$

Mit i_β sind hier die Functionen $y_{m+\beta}$, d. h. die Integrale $\int_{x^0}^{x} f_\beta\, dx$ bezeichnet, welche für $x = x^1$ vorgeschriebene Werthe annehmen mussten.

Die unserem Probleme entsprechende Formulirung der am Ende von § 3 allgemein ausgesprochenen Kriterien des Minimums unterliegt

nun keiner Schwierigkeit mehr. Um alles Ueberflüssige aus dem Resultate zu entfernen, werden wir die Erwähnung der als Hülfsgrössen benutzten Functionen $y_{m+\beta}$ ganz vermeiden und demgemäss auch statt der Function F_1 die schon früher (durch die Gleichung (86)) definirte Function $\overline{F}$ einführen, welche sich von F_1 nur durch das Fehlen gewisser mit $y_{m+1} \dots y_{m+m''}$ behafteter Glieder unterscheidet. Man sieht leicht, dass

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_i} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial y_i} \qquad (i = 1 \dots m),$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_i'} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial y_i'} \qquad (i = 1 \dots m),$$

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i' \partial y_k'} \eta_i \eta_k = \sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial y_i' \partial y_k'} \eta_i \eta_k$$

wird. Ferner erkennt man, dass nach beliebiger Annahme der Functionen $\eta_1 \dots \eta_m$ die Functionen $\eta_{m+1} \dots \eta_n$ sich immer so bestimmen lassen, dass die m'' Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial y_i'} \eta_i = 0 \qquad (\beta = 1 \dots m''),$$

welche in den Kriterien des Minimums eine Rolle spielen, erfüllt werden, sodass also diese Gleichungen den Functionen $\eta_1 \dots \eta_m$ keinerlei Beschränkung auferlegen.

Mit Rücksicht hierauf liefern die am Schlusse von § 3 zusammengestellten allgemeinen Sätze für unseren Fall folgendes Resultat:

Zur Lösung des Problems, das Minimum des Integrales

$$J = \int_{x^0}^{x^1} F(x y_1 y_1' \dots y_m y_m')\, dx$$

zu finden, wenn die Functionen $y_1 \dots y_m$ an gegebene endliche Gleichungen

$$\Phi_\alpha(x y_1 \dots y_m) = 0 \qquad (\alpha = 1 \dots m')$$

gebunden sind, an den Grenzen x^0 und x^1 vorgeschriebene Werthe erhalten sollen und überdies der Bedingung unterliegen, dass auch die Integrale

$$J_\beta = \int_{x^0}^{x^1} f_\beta(x y_1 y_1' \dots y_m y_m')\, dx \qquad (\beta = 1 \dots m'')$$

vorgeschriebene Werthe annehmen, dienen, wenn

$$F + \sum_{\alpha=1}^{m'} P_\alpha \Phi_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m''} Q_\beta f_\beta = \overline{F}$$

gesetzt wird, folgende $m + m'$ *Differentialgleichungen*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{F}}{\partial y_i} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial \overline{F}}{\partial y'_i} = 0 & (i = 1 \ldots m), \\ \dfrac{d^2 \Phi_\alpha}{dx^2} = 0 & (\alpha = 1 \ldots m'), \end{cases}$$

in denen die Grössen $Q_1 \ldots Q_{m''}$ *als Constanten zu betrachten sind. Durch Integration derselben erhält man — wenn die Determinante* (R) *des Systems nicht identisch verschwindet — die Grössen* y_i, P_α *als Functionen von* x *mit* $2m$ *Integrationsconstanten* $c_1 \ldots c_{2m}$. *Die* $2m + m''$ *Constanten* $Q_1 \ldots Q_{m''}$ $c_1 \ldots c_{2m}$ *werden durch die Forderungen bestimmt, dass sowohl die Functionen* y_i *für* $x = x^0$ *und* $x = x^1$, *als auch die Integrale* J_β *die vorgeschriebenen Werthe erhalten sollen.*

Damit nun wirklich ein Minimum des Integrales J *stattfinde, darf nach Einsetzung der gefundenen Lösungen* $y_i P_\alpha Q_\beta$

I. der Ausdruck

$$\sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial y'_i \partial y'_k} \eta_i \eta_k$$

für keinen Werth von x *zwischen* x^0 *und* x^1 *negativ werden, falls die Grössen* $\eta_1 \ldots \eta_m$ *den* m' *Bedingungen*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i} \eta_i = 0 \qquad (\alpha = 1 \ldots m')$$

genügen, und es darf

II. Die durch die Gleichung (100) *definirte Determinante* $\Delta(x, x^0)$ *zwischen* x^0 *und* x^1 *nicht das Vorzeichen wechseln. Diese beiden Bedingungen sind nothwendig; denn ist eine derselben nicht erfüllt, so kann die zweite Variation sowohl positiv als negativ werden* (*abgesehen von einem pag.* 573 *erwähnten Ausnahmefalle*).

Ist andererseits der Ausdruck

$$\sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial y'_i \partial y'_k} \eta_i \eta_k$$

für solche Grössen η, *welche den genannten Bedingungen genügen, im Intervalle* $x^0 x^1$ *beständig positiv und verschwindet* 1) $\Delta(x, x^0)$ *weder zwischen* x^0 *und* x^1 *noch an der Stelle* $x = x^1$ *selbst, so ist auch die zweite Variation beständig positiv und es findet sicher ein Minimum statt; verschwindet dagegen* 2) $\Delta(x, x^0)$ *zwar nicht zwischen* x^0 *und* x^1, *aber für* $x = x^1$, *so kann die zweite Variation den Werth Null annehmen, ohne indessen negativ zu werden, das Minimum hängt daher von den Variationen dritter und höherer Ordnung ab.*

Berlin, October 1884.

Bemerkungen zu dem vorstehenden Aufsatze.

Von L. Scheeffer in München.

Zwei Mittheilungen, die ich der Güte der Herren A. Mayer und Weierstrass verdanke, veranlassen mich zu folgenden Bemerkungen.

In § 3 des vorstehenden Aufsatzes habe ich darauf hingewiesen, dass die Lagrange'sche Regel für die Behandlung der ersten Variation bei Problemen relativer Minima in ihrer Allgemeinheit noch nicht streng begründet ist. Inzwischen hat Herr A. Mayer einen völlig befriedigenden Beweis gefunden, welcher sich auf den in § 3 angegebenen allgemeinen Fall erstreckt*). Setzt man diesen Beweis an die Spitze des § 3, so gestalten sich die Entwickelungen des letzteren zu einem abgeschlossenen Ganzen, indem alsdann die daselbst gestellte Aufgabe allseitig zur Erledigung kommt. Die erste Hälfte des § 4 wird dadurch insofern überflüssig, als das dort entwickelte Resultat nunmehr nur noch ein specieller Fall des von Mayer bewiesenen Satzes ist.

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf den Gültigkeitsbereich der im vorstehenden Aufsatze für das Eintreten eines Maximums oder Minimums angegebenen Criterien. Ich hebe ausdrücklich hervor, dass dieselben nur gültig sind, wofern man das über eine Curve erstreckte Integral bloss mit solchen Integralen vergleicht, welche sich auf *benachbarte* Curven beziehen; denn nur dann ist das Vorzeichen der zweiten Variation massgebend für dasjenige der Differenz der beiden Integrale. Unter einer *benachbarten* Curve aber ist nicht überhaupt jede Curve zu verstehen, welche innerhalb eines die gegebene Curve einschliessenden schmalen Flächenstreifens liegt, sondern speciell nur jede solche, welche zugleich in ihrem Verlaufe überall nahezu *parallel* zu der gegebenen bleibt; denn die Potenzreihe, deren Glieder zweiter Ordnung die zweite Variation liefern, enthält ausser den Potenzen der Coordinatendifferenzen η auch diejenigen ihrer Ableitungen η', es müssen daher auch diese unterhalb gewisser Grenzen liegen, wenn das Vorzeichen der zweiten Variation massgebend sein soll.**)

Stellt man die Frage, ob ein Maximum oder Minimum überhaupt im Vergleich mit sämmtlichen Curven stattfindet, die innerhalb eines die gegebene Curve einschliessenden schmalen Flächenstreifens liegen, ohne ausserdem der Bedingung der angenäherten Parallelität genügen zu dürfen, so sind jetzt die aus der Betrachtung der zweiten Variation hervorgehenden Criterien zwar immer noch *nothwendig*, aber nicht mehr

*) Leipz. Ber. 12. Jan. 1885. Vergl. auch Band 26 dieser Annalen, Heft 1.

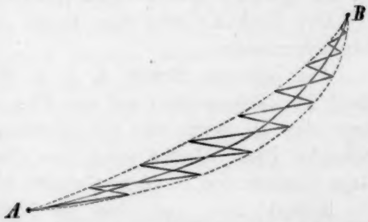
**) Genaueres hierüber findet man in meinem inzwischen erschienenen Aufsatze „Ueber die Bedeutung der Begriffe Maximum und Minimum in der Variationsrechnung" (Leipz. Ber. 2. März 1885), welcher ebenfalls in den Mathematischen Annalen zum Abdruck gelangen soll.

hinreichend. In der That hat Herr Weierstrass Beispiele gefunden, bei denen ein Minimum in diesem *weiteren* Sinne nicht stattfindet, obschon die zweite Variation durchaus positiv ist. Ich erlaube mir, ein solches Beispiel mitzutheilen.

Soll der Körper, dessen Oberfläche durch Rotation einer zwischen gegebenen Endpunkten sich erstreckenden Curve um die x-Axe entsteht, bei der Fortbewegung in einem Fluidum möglichst geringen Widerstand erfahren, so muss das Integral

$$J = \int y \left(\frac{dy}{ds}\right)^3 ds$$

ein Minimum werden (Newton). Nimmt man von der Curve, welche sich durch Nullsetzen der ersten Variation ergiebt, ein stetiges Stück, so ist die zweite Variation durchaus positiv. Grenzt man jetzt aber um diese Curve einen beliebig schmalen Flächenstreifen ab, so kann man innerhalb desselben immer eine Curve zwischen den Endpunkten A und B construiren, für welche das Integral J so klein wird, wie man will. Man braucht nur eine Zickzacklinie von der Art zu wählen, dass der Differentialquotient $\frac{dy}{ds}$ seinem absoluten Betrage nach auf jedem einzelnen Stücke derselben überall unter einer gewissen Grenze g liegt (vergl. Fig.), und die Ecken nachträglich abzurunden. Dass für diese Linie in der That das Integral J sehr klein wird, leuchtet unmittelbar ein, wenn man dasselbe auf die Form $\int y \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 dy$ bringt und bedenkt, dass y beim Fortschreiten auf der Zickzacklinie beständig wächst. In dem *erweiterten* Sinne *existirt* also hier überhaupt *kein* Minimum, da das über eine ganz beliebige Curve erstreckte Integral durch Abänderung *jeder* Curve immer noch verkleinert werden kann.



Herr Weierstrass hat, einer inzwischen erfolgten gütigen mündlichen Mittheilung nach, für das Maximum oder Minimum in jenem *erweiterten* Sinne vor einigen Jahren Criterien gefunden und diese seinen Zuhörern vorgetragen. Da denselben ähnliche, freilich in anderem Sinne ausgebeutete, Betrachtungen, wie die hier p. 536 u. 542 angestellten, zu Grunde zu liegen scheinen, so möchte ich ausdrücklich hervorheben, dass ich von der Existenz jener Untersuchungen des Herrn Weierstrass erst nachträglich Kenntniss erhalten habe; mir stand nur ein Vorlesungsheft vom Jahre 1877 zur Verfügung, in welchem sich noch keine Andeutung jener Gedanken findet.

München im Januar 1885.

Ueber den Pohlke'schen Satz.

Von

Friedrich Schur in Leipzig.

Der sogenannte Pohlke'sche Satz oder der Fundamentalsatz der Axonometrie ist zwar mehrfach behandelt worden, indessen scheint man kaum versucht zu haben, ihn in projective Form*) zu kleiden, obwohl von vornherein zu erwarten war, dass er dann alles Ueberraschende verlieren, sein Beweis sich somit von selbst ergeben würde. Dies fand ich in der That bestätigt, als ich bei einer zufälligen Beschäftigung mit dem Pohlke'schen Satze diesen Versuch machte. Es sei mir gestattet dies kurz auseinanderzusetzen.

Der Pohlke'sche Satz lautet in etwas allgemeinerer Fassung folgendermassen:

Vier gegebene Punkte A, B, C, O des Raumes lassen sich stets so durch Parallelprojection auf eine Ebene projiciren, dass die Projectionsfigur einer gegebenen aus vier Punkten A', B', C', O' einer Ebene bestehenden Figur ähnlich wird; von diesen letzten Punkten dürfen allerdings niemals drei in einer Geraden liegen.

Bedenkt man nun, dass die ähnliche Beziehung zweier Ebenen im projectiven Sinne aufzufassen ist als eine collineare, für welche die imaginären Kreispunkte im Unendlichen der einen Ebene denen der anderen entsprechen, so sieht man, dass der Pohlke'sche Satz in projectiver Form folgendermassen lautet:

Vier gegebene Punkte A, B, C, O des Raumes lassen sich von einem gewissen Punkte S einer gegebenen Ebene ω stets so auf eine zu suchende Ebene ε projiciren, dass, wenn die vier Projectionen derselben vier gegebenen Punkten A', B', C', O' einer gegebenen Ebene ε' collinear

---

*) Die Bemerkung auf S. 339 von Fiedlers darstellender Geometrie, 1. Th., 3. Aufl., Leipzig 1883 setzt zwar den einen Theil des Pohlke'schen Satzes, soweit er sich auf Affinität bezieht, in projective Form, nicht aber denjenigen, welcher sich auf Aehnlichkeit bezieht; gerade diesem Theile aber verdankt der Satz seine Verwendbarkeit in der Axonometrie. Auf S. 367 desselben Werkes findet man die auf den Pohlke'schen Satz bezügliche Litteratur angegeben.

gesetzt werden, gleichzeitig den beiden Schnittpunkten von ε' mit einem gegebenen (reellen oder imaginären) Kegelschnitte k^2 von ω die Schnittpunkte von ε mit demselben Kegelschnitte entsprechen; von den vier Punkten A', B', C', O' dürfen allerdings keine drei in einer Geraden liegen.

Der Beweis dieses Satzes ist aber sehr einfach. Zunächst sieht man, dass der Punkt S eindeutig dadurch bestimmt ist, dass das Bündel durch S so collinear auf die Ebene ε' bezogen sein soll, dass den Strahlen SA, SB, SC, SO und der Ebene ω die Punkte A', B', C', O' und die Gerade $(\varepsilon'\omega)$ entsprechen sollen. Es bilden nämlich alle derart collinear auf einander bezogenen Bündel des Raumes, dass die Strahlen durch die Punkte A, B, C, O einander entsprechen, ein Gebüsch collinearer Ebenenbündel; ist nun festgesetzt, welche Ebene ω einer gegebenen Ebene irgend eines dieser Bündel entsprechen soll, so genügt nur ein Bündel des Gebüsches dieser Bedingung.*) Ich stütze mich absichtlich auf diesen allgemeineren Satz, obwohl der specielle sich in unserem Falle leicht nachweisen lässt, eben um den Beweis ohne jeden Kunstgriff zu bewerkstelligen.

Ist nun der Punkt S gefunden, so suche man diejenigen Strahlen p und q durch S, welche den Schnittpunkten P' und Q' von ε' mit k^2 entsprechen. Schneiden diese k^2 in resp. P_1, P_2 und Q_1, Q_2, so erfüllt irgend eine Ebene ε durch irgend eine der vier Geraden P_1Q_1, P_1Q_2, P_2Q_1, P_2Q_2 die Forderungen unseres Satzes.

Ist der Kegelschnitt k^2, wie beim Pohlke'schen Satze selbst, imaginär, so werden p und q durch eine elliptische Strahleninvolution vertreten, und es giebt dann zwei durch Zirkel und Lineal construirbare reelle gerade Linien in ω, auf welchen diese Strahleninvolution sowohl als das Polarsystem von k^2 dieselbe Punktinvolution bestimmen; irgend eine Ebene durch eine dieser beiden Geraden liefert dann eine reelle Lösung unserer Aufgabe. Es liefert also unser Beweis auch die Mittel, die gesuchten Stücke des Pohlke'schen Satzes mit Zirkel und Lineal zu construiren.

Leipzig, im November 1884.

---

*) Siehe meine Abh.: „Ueber die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven und Flächen", diese Annalen Bd. XVIII, S. 15.

Eine einfache lineare Construction der ebenen rationalen Curven 5. Ordnung.

Von

KARL ROHN in Dresden.

Um eine bequeme Ausdrucksweise zu haben, will ich dieser Note folgende Definition vorausschicken: *Zwei Punkte sollen conjugirt heissen in Bezug auf ein System von 7 festen Punkten, wenn sie mit diesen zusammen den vollständigen Durchschnitt zweier Curven 3. Ordnung bilden.* Ist das System der 7 festen Punkte selbstverständlich, so werde ich einfach von conjugirten Punkten sprechen, ohne das System der festen Punkte weiter zu erwähnen. Es wird sich nun zeigen, dass die Construction der rationalen Curve 5. Ordnung darauf hinausläuft, zu den Punkten einer Geraden die conjugirten Punkte zu construiren.

1) Den Ausgangspunkt werde ich hierbei von einer gewissen Classe von ebenen Curven 6. Ordnung nehmen, da ich selbst auf diesem Wege zur Construction der rationalen Curve 5. Ordnung gelangt bin, und da diese Betrachtungen sich in bestimmter Weise auf Curven höherer Ordnung übertragen lassen.

Wir betrachten demgemäss Curven 6. Ordnung mit 7 Doppelpunkten, deren Punkte *paarweise conjugirt* sind in Bezug auf das System der 7 Doppelpunkte. Wie wir sofort erkennen werden, braucht eine Curve 6. Ordnung mit 7 Doppelpunkten nur *einer einzigen* Bedingung zu genügen, damit ihre Punkte paarweise conjugirt werden. Man kann dieses dadurch beweisen, dass man zeigt, dass *alle* Punkte der Curve paarweise conjugirt sind, sobald es nur *ein* conjugirtes Punktepaar auf derselben giebt.*) Jede Curve 3. Ordnung durch die 7 Doppelpunkte

---

*) Analytisch liegt die Sache sehr einfach. Sind $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ drei Curven 3. Ordnung durch 7 feste Punkte und ist $J(\varphi\ \psi, \chi) = 0$ die Jacobi'sche Curve des durch jene drei Curven bestimmten Curvenbündels, so ist die Gleichung der allgemeinen Curve 6. Ordnung mit 7 Doppelpunkten:

$$\alpha\varphi^2 + \beta\psi^2 + \gamma\chi^2 + 2k\psi\chi + 2\lambda\chi\varphi + 2\mu\varphi\psi + \varrho J(\varphi, \psi, \chi) = 0.$$

Ist $\varrho = 0$, so sind die Punkte der Curve 6. Ordnung paarweise conjugirt, wie die Gleichung unmittelbar lehrt.

und das conjugirte Punktepaar schneidet nämlich noch ein zweites Punktepaar aus, welches ebenfalls conjugirt ist.

Da jede Curve 3. Ordnung durch die 7 Doppelpunkte noch zwei Mal zwei conjugirte Punkte ausschneidet, so folgt daraus, *dass es noch unendlich viele Curven 3. Ordnung durch die 7 Doppelpunkte giebt, welche die Curve 6. Ordnung zwei Mal berühren*, d. h. *welche dieselbe umhüllen*. Jede Curve 3. Ordnung durch die 7 Doppelpunkte, welche die Curve 6. Ordnung ein Mal berührt, berührt sie immer noch ein zweites Mal.

2) Es soll nun gezeigt werden, *dass jede Curve 6. Ordnung mit 7 Doppelpunkten, deren Punkte paarweise conjugirt sind, einen Berührungskegelschnitt besitzt*, wenn man darunter einen die Curve 6 Mal berührenden Kegelschnitt versteht. Seien die Doppelpunkte mit $D_1, D_2, \ldots, D_7$ bezeichnet und nennen wir unsere Curve 6. Ordnung c_6. Dann legen wir durch die 7 Doppelpunkte irgend zwei Curven 3. Ordnung c_3 und c_3', welche die Curve c_6 noch je zwei Mal berühren, etwa in den Punkten B_1, B_2 respective B_1', B_2'. Die beiden Curven 3. Ordnung schneiden sich noch in zwei Punkten S_1 und S_2, deren Verbindungslinie $S_1 S_2 = g$ die beiden Curven noch in je einem Punkte schneidet, sie seien respective P und P'.

Nun legen wir durch die 13 Punkte: $D_1, D_2, \ldots, D_7, B_1, B_2, B_1', B_2', S_1, S_2$ eine Curve 4. Ordnung c_4 der Art, dass ihre Tangente in S_1 mit g zusammen den Winkel der Curven c_3 und c_3' harmonisch theilt. Da aber diese Curve c_4 mit der Curve c_3 eilf Punkte, nämlich $D_1, \ldots, D_7, B_1, B_2, S_1, S_2$, gemein hat, so schneidet sie noch einen weiteren, durch die eilf Punkte mitbestimmten Punkt aus derselben aus. Dieser Punkt ist nichts anderes als der Punkt P, weil die 9 Punkte $D_1, \ldots, D_7, B_1, B_2$ den vollständigen Schnitt zweier Curven 3. Ordnung bilden. Wir erkennen somit, dass die Curve c_4 durch die Punkte P und P' hindurchgeht.

Wir untersuchen jetzt das Curvenbüschel: $c_4^2 - \varrho g^2 c_6 = 0$, und achten dabei auf diejenige Curve des Büschels, welche mit der Curve c_3 noch einen Punkt gemein hat. Die Curve 8. Ordnung zerfällt offenbar in die Curve c_3 und eine Curve 5. Ordnung, deren Tangente in S_1 mit der Curve c_3 zusammen den Winkel von g und c_4 harmonisch theilt. Daraus folgt weiter, dass die Curve 5. Ordnung abermals zerfällt in die Curve c_3' und einen Kegelschnitt, denn sie hat mit c_3' fünfzehn Punkte gemein und ausserdem fällt ihre Tangente in S_1 mit der Tangente von c_3' zusammen. Der hier auftretende Kegelschnitt ist ein Berührungskegelschnitt unserer Curve 6. Ordnung, er geht ersichtlich durch die beiden Punkte P und P' hindurch. Man ersieht hieraus, wie man Punkte des Kegelschnitts construiren kann.

Umgekehrt giebt es durch die 6 Berührungspunkte des Kegel-

schnittes und die 7 Doppelpunkte unserer Curve 6. Ordnung noch doppelt unendlich viele Curven 4. Ordnung, welche dieselbe noch je in zwei Mal zwei conjugirten Punkten schneiden. Es mag noch erwähnt werden, dass die hier studirten *ebenen* Curven 6. Ordnung mit 7 Doppelpunkten stets als Projectionen von Raumcurven 6. Ordnung aufgefasst werden, welche aus einer Fläche 2. Grades durch Flächen 4. Ordnung, die noch zwei Erzeugende einer Schaar enthalten, ausgeschnitten werden.

3) Die Curve 6. Ordnung mit 7 vorgegebenen Doppelpunkten kann noch durch beliebige 5 Paare conjugirter Punkte hindurchgelegt werden. Legt man nun durch einen Doppelpunkt, etwa D_7 eine Gerade und nimmt auf derselben 5 Punkte an, so zerfällt die zugehörige Curve 6. Ordnung in eine Curve 5. Ordnung mit 6 Doppelpunkten und diese Gerade. Daraus ergiebt sich sofort *die Construction der rationalen Curve 5. Ordnung, von welcher die 6 Doppelpunkte $D_1, \ldots, D_6$ und zwei weitere Punkte P und Q gegeben sind.*

Man construire zu Q den conjugirten Punkt Q' in Bezug auf die 7 andern Punkte, verbinde Q' mit P durch eine Gerade g; dann erhält man alle Punkte der rationalen Curve 5. Ordnung, wenn man zu jedem Punkt der Geraden g den conjugirten Punkt sucht in Bezug auf die 7 festen Punkte: $D_1, \ldots, D_6, P$. Statt des Punktes P kann man jeden andern Punkt der Curve 5. Ordnung wählen.

Aus dieser Bemerkung folgt weiter: *Zu jeder rationalen Curve 5. Ordnung gehört ein einziger ausgezeichneter Kegelschnitt, welcher sie 5 Mal berührt. Markirt man auf der Curve einen beliebigen Punkt P und zieht durch jeden Punkt der Curve eine Gerade durch denjenigen Punkt der Ebene, welcher dem Curvenpunkt conjugirt ist in Bezug auf die 7 Punkte $D_1, \ldots, D_6, P$, so sind alle diese Geraden Tangenten jenes ausgezeichneten Kegelschnittes.* Diese Verhältnisse lassen sich leicht auf die Fläche 2. Grades und die Raumcurve 5. Ordnung, welche von den Geraden der einen Schaar in je 4, von denen der andern Schaar in je einem Punkte getroffen wird, übertragen.

4) Neben dem bereits erwähnten ausgezeichneten Kegelschnitt giebt es noch *andere, die Curve 5. Ordnung 5 Mal berührende Kegelschnitte*, deren Beziehung zur Curve wir ebenfalls kurz ableiten wollen. Auch hier gehen wir wiederum von den Curven 6. Ordnung aus und zwar von den *Curven 6. Ordnung mit solchen 6 Doppelpunkten, welche auf einem Kegelschnitte liegen.* Wir werden beweisen, *dass diese Curven 6. Ordnung immer einen Berührungskegelschnitt besitzen.*

Bezeichnen wir wieder die Doppelpunkte mit $D_1, \ldots D_6$ und den sie enthaltenden Kegelschnitt mit k. Jede Curve 3. Ordnung c_3 durch die 6 Doppelpunkte schneidet aus der Curve 6. Ordnung noch 6 Punkte, $P_1, P_2, \ldots, P_6$ aus, welche auf einem Kegelschnitte l liegen. Der

Kegelschnitt l schneidet unsere Curve noch in 6 weiteren Punkten $Q_1, Q_2, \ldots, Q_6$, die mit den Punkten $D_1, \ldots, D_6$ auf einer zweiten Curve 3. Ordnung c_3' liegen; denn *eine* Curve des Büschels $c_6 - \varrho k^2 l = 0$ zerfällt in die Curve c_3 und eine andere Curve 3. Ordnung. Wir finden also, dass alle Curven 3. Ordnung durch die 6 Doppelpunkte $D_1 \ldots D_6$ einander *paarweise zugeordnet* sind, wie z. B. die Curven c_3 und c_3'.

5) Giebt es unter diesen Curven 3. Ordnung eine *sich selbst zugeordnete* Curve, so rücken die Punkte $Q_1, \ldots, Q_6$ mit den Punkten $P_1, \ldots, P_6$ zusammen; unsere Curve 6. Ordnung besitzt alsdann einen Berührungskegelschnitt. Zeigen wir nun, dass in der That immer *eine* sich selbst conjugirte Curve 3. Ordnung existirt.

Zu diesem Ende construire man in D_1 diejenige Gerade s_1, welche mit der Tangente t_1 des Kegelschnitts zusammen den Winkel der beiden Aeste unserer Curve 6. Ordnung in D_1 harmonisch theilt; ebenso construire man in den übrigen Doppelpunkten die Geraden $s_2, s_3, \ldots, s_6$ respective. Je zwei einander zugeordnete Curven 3. Ordnung c_3 und c_3' theilen dann die Winkel der 6 Geradenpaare $t_1 s_1, t_2 s_2, \ldots, t_6 s_6$ harmonisch, da $c_3 . c_3' = 0$ eine Curve des Büschels $c_6 - \varrho k^2 l = 0$ ist. Wählt man demnach diejenige Curve 3. Ordnung durch $D_1, D_2, \ldots, D_6$, welche in D_1, D_2, D_3 die Geraden s_1, s_2, s_3 respective tangirt, so entspricht ihr eine zweite Curve 3. Ordnung, welche die gleichen Eigenschaften besitzt, d. h. diese Curve 3. Ordnung entspricht sich selbst und tangirt folglich auch die Geraden s_4, s_5, s_6 in den Punkten D_4, D_5, D_6 respective. Hiermit ist aber der Beweis für die Existenz eines Berührungskegelschnitts erbracht; zugleich haben wir gefunden, *dass die* 6 *Berührungspunkte des Berührungskegelschnitts mit den* 6 *Doppelpunkten auf einer Curve* 3. *Ordnung liegen*. Die ebenen Curven 6. Ordnung mit 6 Doppelpunkten, welche auf einem Kegelschnitte liegen, können stets als Projectionen von Raumcurven 6. Ordnung aufgefasst werden, welche den Schnitt einer Fläche zweiter und einer Fläche dritter Ordnung bilden. Der Beweis hierfür ist nach dem Vorhergehenden sehr einfach.

6) Kehren wir zur rationalen Curve 5. Ordnung zurück. Durch vier ihrer Doppelpunkte, etwa D_1, D_2, D_3, D_4 legen wir einen Kegelschnitt, welcher sie noch in zwei Punkten P_1 und P_2 schneidet. Ihre Verbindungslinie $\overline{P_1 P_2} = g$ bildet mit der Curve 5. Ordnung zusammen eine Curve 6. Ordnung von der soeben behandelten Art, d. h. es giebt einen Kegelschnitt, welcher die Curve 5. Ordnung 5 Mal und die Gerade g ein Mal berührt. Variiren wir den Kegelschnitt durch die Punkte D_1, D_2, D_3, D_4, so ändert sich dabei beständig die Gerade g; aber sie bleibt immer Tangente an den 5 Mal berührenden Kegelschnitt; denn der letztere kann sich nicht stetig ändern, da es nur eine endliche Zahl von solchen Kegelschnitten giebt. *Legt man durch*

irgend 4 *Doppelpunkte einer rationalen Curve* 5. *Ordnung ein Kegelschnittbüschel, so bilden die Verbindungslinien der Punktepaare, welche die einzelnen Kegelschnitte noch aus der Curve* 5. *Ordnung ausschneiden, die Tangenten eines, die Curve* 5. *Ordnung* 5 *Mal berührenden Kegelschnittes. Es existiren* 15 *solche Kegelschnitte,* zu je 4 Doppelpunkten ist einer eindeutig zugeordnet. Jedem dieser 5 Mal berührenden Kegelschnitte entsprechend kann die rationale Curve 5. Ordnung als Projection einer Raumcurve 5. Ordnung aufgefasst werden, welche als Schnitt einer Fläche zweiter und einer Fläche 3. Ordnung (die noch eine Gerade gemein haben) erscheint.

Ausser den aufgezählten 5 Mal berührenden Kegelschnitten der rationalen Curve 5. Ordnung kann es keine weiteren geben. Denn es lässt sich die ebene rationale Curve 5. Ordnung, jedem 5 Mal berührenden Kegelschnitt entsprechend, als Projection einer Raumcurve 5. Ordnung ansehen und wir werden also zu den bereits erwähnten Kegelschnitten zurückgeführt. *Jede rationale ebene Curve* 5. *Ordnung besitzt* 16, *fünf Mal berührende Kegelschnitte,**) *in Folge dessen kann sie auf* 16 *verschiedene Weisen als Projection einer Raumcurve* 5. *Ordnung dargestellt werden, und zwar* 15 *Mal als Projection einer Raumcurve* 5. *Ordnung, welche den theilweisen Schnitt einer Fläche zweiter und einer Fläche dritter Ordnung ausmacht, und* e i n *Mal als Projection einer Raumcurve* 5. *Ordnung, welche den theilweisen Schnitt einer Fläche zweiter und einer Fläche vierter Ordnung bildet.*

D r e s d e n, im December 1884.

---

*) Für eine allgemeine Curve 5. Ordnung giebt es 208 fünf Mal berührende Kegelschnitte, was ich ohne Beweis hier anführe.

el-
he
n,
el-
en
el-
o-
ls
ch

er
es
e-
ve
n
g
n
l-
a-
er
o-
tt

e